

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Victor Antônio Paludetto Magri

# **Desenvolvimento de um Simulador Térmico para Poços Horizontais**

Florianópolis, SC - Brasil

2013



Victor Antônio Paludetto Magri

## **Desenvolvimento de um Simulador Térmico para Poços Horizontais**

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC

Centro Tecnológico

Curso de Graduação em Engenharia Mecânica

Orientador: Antônio Fábio Carvalho da Silva

Florianópolis, SC - Brasil

2013

---

Paludetto Magri, Victor Antônio, 1990

Desenvolvimento de um Simulador Térmico para Poços Horizontais/ Victor Antônio Paludetto Magri. – Florianópolis, SC - Brasil, 2013-  
120 p. : il. (color.) ; 30 cm.

Orientador: Antônio Fábio Carvalho da Silva

Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Curso de Graduação em Engenharia Mecânica, 2013.

1. Sensores de Temperatura Distribuídos. 2. Modelo térmico. 3. Acoplamento Poço/Reservatório. I. Da Silva, Antônio Fábio de Carvalho. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Curso de Graduação em Engenharia Mecânica

---

Victor Antônio Paludetto Magri

## **Desenvolvimento de um Simulador Térmico para Poços Horizontais**

Este Trabalho de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico e aprovado em sua forma final pela Comissão examinadora e pelo Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

---

**Prof. Lauro Cesar Nicolazzi, Dr.**  
Coordenador do Curso

---

**Prof. Dylton do Vale Pereira Filho,**  
**M.Eng.**  
Professor da Disciplina

**Comissão Examinadora:**

---

**Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva, Dr.**  
Orientador

---

**Gustavo Gondran Ribeiro, M.Eng.**  
SINMEC - UFSC

---

**Prof. Dylton do Vale Pereira Filho, M.Eng.**  
EMC - UFSC

Florianópolis, SC - Brasil  
2013



*Dedico este trabalho aos meus pais, que tanto se esforçaram em me prover uma boa educação.*



# Agradecimentos

Agradeço ao apoio concedido pelos meus pais Marcos e Márcia, os quais representam para mim exemplo de vida a ser seguido. Além disso, sou grato por todos os votos de confiança concedidos a mim pelos meus demais familiares ao longo dos cinco anos e meio de graduação.

Aos amigos de trabalho no laboratório SINMEC pela sua amizade e companheirismo, fazendo com que esse se configurasse em um ótimo ambiente de trabalho. Ao professor Clóvis Maliska por ter me aceito no laboratório e também pelas aulas ministradas, ao professor António Fábio pela orientação do trabalho, ao Giovani, exímio conhecedor de sinônimos na língua portuguesa, ao Tada pela indicação do tema de pesquisa, à Tati pelo empenho dedicado ao provimento de uma bolsa de estudos, ao Arthur pela ajuda nas dúvidas técnicas, ao Tchê pela revisão do trabalho e a todos os demais pela sua amizade.

A todos os amigos feitos nessa jornada que foram companheiros ao longo de várias noites de estudo e comemorações realizadas após cada disciplina difícil vencida. Àqueles provenientes do grupo de oração da igreja, com os quais dividi tantos momentos de alegria e aprendizado pessoal e dos quais recebi apoio em momentos de dificuldade.

Entre todos esses amigos, não posso deixar de ressaltar o Edão, pessoa de coração sincero, a qual foi minha parceira em praticamente todas as matérias da graduação, sempre me auxiliando com boa vontade e prontidão nas minhas dúvidas técnicas. Ressalto também os fiéis amigos Vitão, Serginho, Japita voador e Renanzão, todos companheiros de morada presentes em muitos dos momentos de minha vida, seja no momento da janta no RU, nos passeios de bicicleta pela ilha, *etc.*

À Universidade Federal de Santa Catarina e ao Departamento de Engenharia Mecânica, pela excelência do curso oferecido. Ao Programa de Recursos Humanos da ANP pela estrutura disponibilizada e pelo apoio financeiro e a Fundação de Ensino de Engenharia do Estado de Santa Catarina - FEESC - pelo apoio financeiro.

Por fim ao Programa Avançado de Matemática - PAM. Em especial, aos professores Jáuber Cavalcante de Oliveira, Mário César Zambaldi e Jardel Moraes Pereira que ministraram as 7 disciplinas desse curso fundamental para o estabelecimento de um sólido embasamento matemático.



*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,  
mas transformai-vos pela renovação da mente,  
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:  
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.  
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*



# Resumo

O presente trabalho tem como objetivo analisar a influência da entrada de diferentes tipos de fluido em poços horizontais sobre as curvas de pressão e, especialmente, temperatura média do escoamento ao longo do poço. Para tanto, Desenvolve-se um modelo matemático para a representação dos escoamentos que ocorrem no reservatório e no poço. Tal modelo é constituído, basicamente, pelas equações da conservação da massa, quantidade de movimento e energia, além de relações termodinâmicas. Esse conjunto de expressões matemáticas é implementado computacionalmente dando origem a um simulador numérico. Os resultados obtidos com esse programa mostram que os perfis de pressão e temperatura estão intimamente ligados entre si através do coeficiente *Joule-Thomson*, além disso, o comportamento de cada perfil é notavelmente modificado a medida que o poço atravessa diferentes regiões de produção. O perfil de temperatura pode apresentar variações da ordem de até 3 K, enquanto a ordem de variação do perfil de pressão pode chegar até a 1 MPa nos casos de escoamento de gás. Conclui-se que dadas as curvas de pressão e temperatura no poço, é possível estimar as vazões e tipos de fluido que entram lateralmente no poço de petróleo.

**Palavras-chave:** Sensores de Temperatura Distribuídos. Poços Horizontais. Equação da Conservação da Energia. Escoamento Multifásico.



# Abstract

The objective of the present work is to assess the influence of fluid inflow in horizontal wells on the pressure and temperature flow profiles along the well. In order to accomplish this study, a mathematical model is developed for representing the fluid flow in the reservoir and in the well, this model is composed by the mass, momentum and energy conservation equations, besides thermodynamic relationships. The set of equations relative to the reservoir flow is then solved analytically, while the equations relative to the well flow is solved numerically via finite volume method. The results obtained from the developed numerical simulator show that the pressure and temperature profiles in the wellbore are closely linked to each other through the *Joule-Thomson* coefficient, besides that, the curves' behavior is notably modified once the well hits different production zones. The variation order showed by the temperature profile can be up to 3 K for the cases tested, while the variation order for the pressure profile can be up to 1 MPa in the case of gas flow. It can be concluded that, given the pressure and temperature profiles in the well, it is possible to estimate fluid inflow types and flow rates in the well.

**Keywords:** Distributed Temperature Sensors. Horizontal Wells. Energy Conservation Equation. Multiphase Flow



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Volume de controle multifásico . . . . .	32
Figura 2 – Escalas de comprimento envolvidas em escoamentos através de meios porosos (KAVIANY, 1995). . . . .	36
Figura 3 – Esquema do experimento <i>Joule-Thomson</i> (OTT; BOERIO-GOATES, 2000). . . . .	37
Figura 4 – Diagrama pressão/temperatura para o processo 1-2 . . . . .	38
Figura 5 – Esboço de um sistema de sensores de temperatura distribuídos. Adaptado de Wang (2012) . . . . .	39
Figura 6 – Esquema do modelo poço/reservatório. . . . .	42
Figura 7 – Visão do topo do reservatório. . . . .	43
Figura 8 – Queda de pressão no reservatório segundo mapeamento conforme e Furui, Zhu e Hill (2002) . . . . .	48
Figura 9 – Camadas radiais de um poço. . . . .	59
Figura 10 –Representação do poço. . . . .	62
Figura 11 –Balanço de força para um volume de controle no poço. . . . .	67
Figura 12 –Esquema de armazenamento das variáveis do escoamento no poço . . . . .	79
Figura 13 –Esquema do poço, caso 1. . . . .	85
Figura 14 –Pressão média ao longo do poço, caso 1. . . . .	86
Figura 15 –Queda da pressão média ao longo do poço por unidade de comprimento para a simulação A, caso 1. . . . .	87
Figura 16 –Queda da pressão média ao longo do poço por unidade de comprimento para a simulação B, caso 1. . . . .	87
Figura 17 –Vazão de entrada por unidade de comprimento ao longo do poço, caso 1. . . . .	88
Figura 18 –Temperatura média ao longo do poço, caso 1. . . . .	89
Figura 19 –Temperatura de entrada no poço, caso 1. . . . .	90
Figura 20 –Esquema do poço, caso 2 . . . . .	91
Figura 21 –Pressão média do escoamento ao longo do poço, caso 2. . . . .	93
Figura 22 –Vazão de entrada por unidade de comprimento ao longo do poço, caso 2. . . . .	93
Figura 23 –Temperatura média do escoamento ao longo do poço, caso 2. . . . .	94
Figura 24 –Temperatura de entrada no poço, caso 2. . . . .	94
Figura 25 –Esquema do poço, caso 3 . . . . .	96

Figura 26 –Pressão média do escoamento ao longo do poço, caso 3. . . . .	97
Figura 27 –Vazão de entrada por unidade de comprimento ao longo do poço, caso 3. . . . .	97
Figura 28 –Temperatura média do escoamento ao longo do poço, caso 3. . . . .	98
Figura 29 –Temperatura na interface poço/reservatório, caso 3. . . . .	98
Figura 30 –Temperatura média do escoamento ao longo do poço variando-se $U_{total}$ , caso 3. . . . .	100
Figura 31 –Fluxo de calor por condução na direção radial entre o escoamento no poço e reservatório, caso 3. . . . .	101
Figura 32 –Transporte advectivo de energia causado pelo fluxo de massa en- trando lateralmente no poço, caso 3. . . . .	101
Figura 33 –Temperatura na interface poço/reservatório variando-se $U_{total}$ , caso 3.	102

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Propriedades do poço, caso 1. . . . .	85
Tabela 2 – Propriedades do reservatório, caso 1. . . . .	85
Tabela 3 – Propriedades do gás, caso 1 . . . . .	86
Tabela 4 – Propriedades do óleo, caso 2 . . . . .	92
Tabela 5 – Propriedades da água, caso 2 . . . . .	92



# Lista de abreviaturas e siglas

DTS	<i>Distributed Temperature Sensors</i> , Sensores de Temperatura Distribuídos - STD.
SINMEC	Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor.
VER	Volume Elementar Representativo.



# Lista de símbolos e variáveis

## Símbolos gregos maiúsculos

$\Gamma$	Número de fases	[—]
$\Phi$	Propriedade genérica do escoamento	[—]

## Símbolos gregos minúsculos

$\lambda$	Fração volumétrica	[—]
$\epsilon$	Fração volumétrica da fase beta	[—]
$\mu$	Viscosidade dinâmica	[kg/m.s]
$\beta$	Coefficiente de expansão térmica	[1/K]
$\rho$	Densidade do fluido	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\tau'$	Tensor tensão completo	[N/m <sup>2</sup> ]
$\tau$	Tensor tensão viscoso	[N/m <sup>2</sup> ]

## Símbolos romanos maiúsculos

$A_\beta$	Fronteira do volume $V_\beta$	[—]
$C_J$	Coefficiente de <i>Joule-Thomson</i>	[K/Pa]
$E$	Energia total extensiva	[J]
$K$	Tensor permeabilidade	[m <sup>2</sup> ]
$K_T$	Tensor condutividade térmica	[W/m · K]
$L$	Comprimento do reservatório	[m]

$P$	Pressão	$[Pa]$
$Q$	Calor	$[J]$
$Re$	Número de Reynolds	$[-]$
$V$	Volume	$[m^3]$
$T$	Temperatura	$[K]$
$V$	Vetor velocidade	$[m/s]$
$U$	Coefficiente de transferência de calor	$[W/m^2.K]$
$X$	Vetor força de corpo por unidade de massa	$[m/s^2]$
$W$	Trabalho	$[J]$

### Símbolos romanos minúsculos

$c_p$	Calor específico à pressão constante	$[J/kg.K]$
$e$	Energia específica	$[J/kg]$
$g$	Vetor gravidade	$[m/s^2]$
$f$	Fator de atrito	$[-]$
$h$	Entalpia específica	$[J/kg]$
$h^*$	Espessura do reservatório	$[m]$
$i$	Energia interna específica	$[J/kg]$
$k$	Permeabilidade absoluta	$[m^2]$
$n_\beta$	Vetor unitário normal à superfície $A_\beta$	$[-]$
$\dot{m}$	Vazão mássica	$[kg/s]$
$q''$	Vetor fluxo de calor	$[W/m^2]$
$y^*$	Largura do reservatório	$[m]$

## Subscritos

avg	Média
ext	Externo
int	Interno
poço	Poço
lam	Laminar
turb	Turbulento
total	Total
a	Fase água
o	Fase óleo
g	Fase gás
liq	Fase líquida
mix	Fase mistura
I	Influxo
f	atrito
grav	gravitacional
acc	aceleração



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>27</b>
1.1	Motivação	28
1.2	Objetivo Geral	28
1.3	Objetivos Específicos	28
1.4	Organização do trabalho	29
<b>2</b>	<b>Conceitos Fundamentais</b>	<b>31</b>
2.1	Escoamentos multifásicos	31
2.1.1	Conceitos básicos	32
2.2	Meios Porosos	34
2.3	Efeito <i>Joule-Thomson</i>	35
2.4	Sensores de temperatura distribuídos	39
<b>3</b>	<b>Modelo de Escoamento no Reservatório</b>	<b>41</b>
3.1	Conservação da Massa	42
3.1.1	Escoamento monofásico	42
3.1.2	Escoamento multifásico	44
3.2	Conservação da Quantidade de Movimento	44
3.3	Equação da difusividade hidráulica	46
3.4	Conservação da Energia	48
3.4.1	Escoamento monofásico	49
3.4.2	Escoamento multifásico	53
3.4.3	Solução da equação	55
3.4.3.1	Região de escoamento radial	56
3.4.3.2	Região de escoamento linear	57
3.4.3.3	Fechamento do problema	58
<b>4</b>	<b>Modelo de Escoamento no Poço</b>	<b>61</b>
4.1	Conservação da Massa	61
4.1.1	Escoamento monofásico	61
4.1.2	Escoamento multifásico	63
4.2	Cálculo do <i>Holdup</i>	64
4.3	Conservação da Quantidade de Movimento	66
4.3.1	Escoamento monofásico de água ou óleo	66
4.3.2	Escoamento monofásico de gás	69
4.3.3	Escoamento bifásico água-óleo	70

4.3.4	Escoamento multifásico . . . . .	70
4.4	Conservação da Energia total . . . . .	71
4.4.1	Escoamento monofásico . . . . .	71
4.4.2	Escoamento multifásico . . . . .	75
4.5	Cálculo da temperatura . . . . .	76
4.5.1	Escoamento monofásico . . . . .	76
4.5.2	Escoamento multifásico . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Formulação Numérica . . . . .</b>	<b>79</b>
5.1	Algoritmo de solução . . . . .	80
5.1.1	Escoamento no reservatório . . . . .	80
5.1.2	Escoamento no poço . . . . .	80
5.1.3	Acoplamento poço/reservatório . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Resultados . . . . .</b>	<b>83</b>
6.1	Caso 1 . . . . .	84
6.2	Caso 2 . . . . .	91
6.3	Caso 3 . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Conclusões e contribuições . . . . .</b>	<b>103</b>
<b>8</b>	<b>Recomendações . . . . .</b>	<b>105</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>107</b>
	<b>Apêndices . . . . .</b>	<b>109</b>
	<b>APÊNDICE A Resultados de álgebra linear e cálculo tensorial . . . . .</b>	<b>111</b>
	<b>APÊNDICE B Relações termodinâmicas . . . . .</b>	<b>113</b>
B.1	Derivada total da entropia em função da pressão e temperatura . . . . .	113
B.2	Derivada total da entalpia em função da entropia e pressão . . . . .	114
B.3	Derivada total da entalpia em função da pressão e temperatura . . . . .	114
	<b>Anexos . . . . .</b>	<b>117</b>
	<b>ANEXO A Solução da equação de conservação da energia no reservatório . . . . .</b>	<b>119</b>

# 1 Introdução

Segundo [Wang e Horne \(2011\)](#), medições de temperatura e pressão ao longo do poço têm sido empregadas para o monitoramento da performance de poços produtores e injetores de água, no diagnóstico de tratamentos de fraturamento hidráulico e na localização de regiões de entrada de massa em poços verticais que interceptam diferentes reservatórios concomitantemente. No entanto, ao longo de muitos anos, as medições de temperatura foram largamente subutilizadas em relação a outras aferições obtidas através de sistemas sofisticados.

Recentemente, novos métodos para a aquisição da temperatura no poço foram desenvolvidos, o que fez surgir o interesse em novas aplicações para tal informação. Dentre eles, o uso de sensores distribuídos de temperatura vem ganhando grande espaço na indústria de petróleo, sendo utilizados, por exemplo, em poços inteligentes ([JUNIOR, 2012](#)). Nesse caso, o perfil de temperatura ao longo do poço é empregado para estimar o tipo e a quantidade de fluido produzido do reservatório. A partir disso, o engenheiro de reservatórios pode controlar a área aberta ao influxo do reservatório em diferentes regiões do poço.

Dado o interesse sobre as informações carregadas pelo perfil de temperatura média do escoamento ao longo do poço, desenvolve-se nesse trabalho um simulador numérico capaz de resolver as equações do transporte, isto é, conservação da massa, quantidade de movimento e energia, para os escoamentos no reservatório e no poço, uma vez que eles estão acoplados entre si. Com tal programa, é possível avaliar a influência de diferentes cenários de produção sobre as diversas variáveis do escoamento ao longo do poço e do reservatório.

A geometria do reservatório considerado é fixa em formato de paralelepípedo. As fronteiras superiores e inferiores do reservatório são impermeáveis ao escoamento e as laterais apresentam fluxo constante de massa e energia. O seu centro é ocupado por um poço horizontal produtor totalmente penetrante sendo que este pode interceptar diferentes zonas de produção de fluido no reservatório. Os modelos empregados para o reservatório e poço são apresentados com maiores detalhes nos capítulos [3](#) e [4](#) e tem como base aqueles desenvolvidos por [Dawkrajai \(2006\)](#). As propriedades termofísicas dos fluidos que escoam em ambos domínios são consideradas constantes.

Entre os resultados obtidos do simulador, analisam-se os perfis de temperatura e pressão média do escoamento no poço, bem como os perfis de vazão e temperatura

do fluido que entra lateralmente no poço para diferentes cenários de produção. A partir disso, avalia-se a viabilidade do emprego de sistemas DTS para a aquisição do perfil de temperatura no poço e posterior uso dessa informação para se estimar os tipos de fluidos que entram ao longo do poço. Os perfis de pressão e temperatura do escoamento no reservatório também são apresentados a título de familiarização com o seu comportamento nessa região.

## 1.1 Motivação

O laboratório de simulação numérica em mecânica dos fluidos e transferência de calor - SINMEC - desenvolve desde a década de 90 projetos relacionados à simulação de reservatórios e, mais recentemente, projetos relacionados à simulação do escoamento no poço.

Estes trabalhos apresentam uma hipótese em comum a qual é considerar escoamento isotérmico em ambos os domínios citados. Essa é uma boa afirmação quando se busca simular processos de recuperação primária ou secundária do petróleo já que o escoamento nesses casos é praticamente isoentálpico e portanto as variações de temperatura ao longo de ambos os domínios são desprezíveis. No entanto, apesar de serem pequenas, elas podem representar informações valiosas a respeito da quantidade e dos tipos de fluidos que escoam para o interior do poço.

Dado o fato de o laboratório SINMEC não apresentar nenhum trabalho que soluciona a equação da conservação da energia nas regiões do reservatório e poço e dado o interesse em se avaliar a resposta do perfil de temperatura mediante a diferentes cenários de produção, o presente trabalho é desenvolvido no sentido de suprir tais necessidades.

## 1.2 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo geral analisar o comportamento dos perfis de pressão e, especialmente, temperatura ao longo do poço de acordo com diferentes cenários de produção, que são funções do tipo e quantidade de fluido que escoam do reservatório para o poço.

## 1.3 Objetivos Específicos

Afim de que o objetivo geral seja alcançado, estabelecem-se os seguintes objetivos específicos:

1. Apresentar dedução detalhada dos modelos matemáticos empregados na representação dos escoamentos no poço e no reservatório.
2. Familiarizar-se com as equações de conservação da energia no reservatório e no poço.
3. Analisar o comportamento dos perfis de escoamento no poço de acordo com a entrada de diferentes tipos de fluido ao longo deste domínio.
4. Avaliar a influência dos termos referentes à dissipação viscosa e expansão de *Joule-Thomson* sobre o perfil de temperatura no reservatório.
5. Validar o simulador numérico desenvolvido através de problemas teste descritos na referência base.

## 1.4 Organização do trabalho

No capítulo 1 apresentam-se as justificativas para a realização do trabalho, o objetivo principal deste e os pontos-chave que nortearão a obtenção desse objetivo. No capítulo 2 serão apresentados conceitos básicos abordados ao longo do desenvolvimento do trabalho e, também, uma breve revisão sobre os sensores de temperatura distribuídos. Os capítulos 3 e 4 apresentarão os modelos matemáticos utilizados para a descrição do reservatório e do poço, respectivamente. No capítulo 5, será discutida a maneira com que os modelos matemáticos desenvolvidos serão solucionados. O capítulo 6 mostrará resultados obtidos com o código numérico construído, os quais serão comparados com aqueles obtidos por Dawkrajai (2006). Por fim, os capítulos 7 e 8 apresentarão as conclusões do trabalho e sugestões para a continuidade deste.



## 2 Conceitos Fundamentais

Apresentam-se neste capítulo conceitos básicos que serão empregados ao longo do desenvolvimento do modelo matemático referente ao problema a ser resolvido. Além disto, apresenta-se uma breve revisão sobre sistemas de monitoramento de temperatura realizado por sensores distribuídos - DTS.

### 2.1 Escoamentos multifásicos

De acordo com [Paladino \(2005\)](#), escoamento multifásico é definido como aquele constituído por dois ou mais fluidos imiscíveis separados por uma interface, podendo esta ser conexa ou desconexa de acordo com o padrão de escoamento multifásico observado. Este, por sua vez, é função das velocidades superficiais de cada uma das fases presentes no escoamento. Esta classe de escoamento é recorrente na indústria de petróleo, estando presente:

1. No meio poroso, que constitui o reservatório de petróleo;
2. Nos poços, onde há produção de fluidos do reservatório e sua condução para a superfície;
3. Nas linhas de produção da superfície, que conduzem os fluidos retirados do reservatório para as unidades de separação.

No presente trabalho, o poço pode estar dividido em várias regiões de produção responsáveis pela recuperação de diferentes tipos de fluidos como água, óleo e gás. Logo, há possibilidade de haver escoamento multifásico nesse domínio.

Em escoamentos multifásicos, percebe-se que é grande o nível de dificuldade em se localizar as interfaces que separam as diferentes fases. Tomando-se o problema em estudo, o processo de localização das interfaces é ainda mais agravado devido ao distúrbio causado no escoamento pela entrada lateral de massa no poço. Felizmente, informações a respeito da descontinuidade das propriedades dos fluidos nas interfaces e sua correta localização nem sempre são de interesse prático ([FAGHRI, 2006](#)).

De fato, para condução do presente estudo, os aspectos macroscópicos do escoamento multifásico são os que geram interesse para a sua modelagem. Assim, serão empregadas técnicas de média das propriedades do escoamento sobre as equações de

transporte afim de se obter modelos descrevendo esta classe de escoamentos. Esse procedimento elimina a necessidade de se conhecer a localização exata das interfaces existentes entre as fases e as variações locais das suas propriedades (FAGHRI, 2006). Entre as técnicas disponíveis na literatura, é possível citar:

1. Média sobre o espaço: Aplicada para cada fase de um volume de controle multifásico, ela conduz ao modelo multi-fluido em que as equações conservativas são escritas para cada uma das fases do escoamento.
2. Média sobre as fases: Aplicada sobre todas as fases de um volume de controle multifásico conduzindo ao modelo homogêneo ou de mistura. Esta técnica é mais restrita que a anterior sendo que pode ser obtida a partir daquela através do somatório de suas equações ao longo das fases pertencentes ao volume de controle em consideração.
3. Média sobre a área: Semelhante ao caso de média sobre as fases, porém aplicada ao caso de escoamento em dutos. Sua diferença para o caso anterior consiste no fato de que a média calculada se dá ao longo de toda a seção transversal do duto. Logo, informações a respeito das distribuições das variáveis do escoamento ao longo das direções radial e angular não podem ser obtidas.

### 2.1.1 Conceitos básicos

Considere um escoamento constituído por diversas fases. Um volume de controle elementar representativo do escoamento, VER, é definido como uma região do espaço suficientemente grande de modo a englobar flutuações locais das variáveis do escoamento mas pequeno o suficiente para não ocultar variações macroscópicas, em nível de sistema, da mesma (FAGHRI, 2006). A Figura 1 ilustra um VER composto por  $\Gamma$  fases distintas de interfaces conexas.

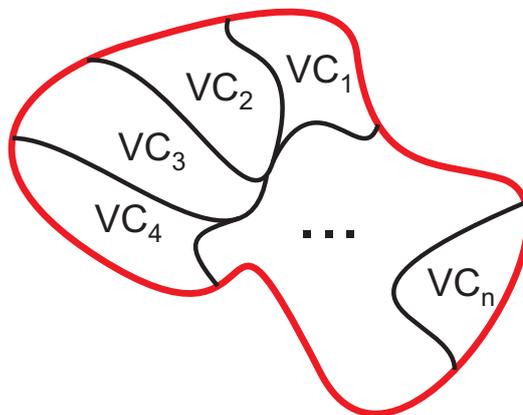


Figura 1 – Volume de controle multifásico

A porção de volume ocupada por uma fase genérica  $\psi$  é definida como:

$$\lambda_\psi := \frac{\Delta V_\psi}{\Delta V}, \quad (2.1)$$

em que  $\Delta V$  representa o volume total da região em análise, enquanto  $\Delta V_\psi$  representa o volume ocupado pela fase  $\psi$ .

Seja  $\Theta$  uma variável genérica do escoamento podendo representar um campo escalar, vetorial ou tensorial. A média volumétrica euleriana dessa propriedade sobre as fases do escoamento é definida por:

$$\langle \Theta \rangle := \frac{1}{\Delta V} \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \int_{\Delta V_\psi} \Theta_\psi dV. \quad (2.2)$$

Dada a fase genérica  $\psi$ , a média volumétrica extrínseca da variável  $\Theta$  representa o valor médio dessa variável ao longo de todo o volume de controle multifásico, sendo definida da seguinte maneira:

$$\langle \Theta_\psi \rangle := \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_\psi} \Theta_\psi dV. \quad (2.3)$$

Dada a fase genérica  $\psi$ , a média volumétrica intrínseca da variável  $\Theta$  representa o valor médio dessa variável ao longo do sub-volume de controle ocupado pela fase  $\psi$ , sendo definida como:

$$\langle \Theta_\psi \rangle^\psi := \frac{1}{\Delta V_\psi} \int_{\Delta V_\psi} \Theta_\psi dV. \quad (2.4)$$

As médias volumétrica extrínseca e intrínseca estão relacionadas por meio da fração volumétrica  $\lambda_\psi$  da seguinte maneira:

$$\langle \Theta_\psi \rangle := \lambda_\psi \langle \Theta_\psi \rangle^\psi. \quad (2.5)$$

A média volumétrica euleriana, definida na Equação 2.2, pode ser escrita em função das médias extrínseca e intrínseca através da Equação 2.6.

$$\langle \Theta \rangle = \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \langle \Theta_\psi \rangle = \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \lambda_\psi \langle \Theta_\psi \rangle^\psi. \quad (2.6)$$

O desvio da variável  $\Theta_\psi$  da média intrínseca é definido como:

$$\tilde{\Theta}_\psi := \Theta_\psi - \langle \Theta_\psi \rangle^\psi. \quad (2.7)$$

Note que, tomando-se a média intrínseca da Equação 2.7, conclui-se que a média do desvio de  $\Theta_\psi$  é igual a zero.

Seja  $\Omega_\psi$  variável genérica do escoamento, a qual se refere à fase  $\psi$ , assim como  $\Theta_\psi$ . A média extrínseca do produto entre  $\Theta_\psi$  e  $\Omega_\psi$  pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\langle \Theta_\psi \Omega_\psi \rangle = \lambda_\psi \langle \Theta_\psi \rangle^\psi \langle \Omega_\psi \rangle^\psi + \langle \tilde{\Omega}_\psi \tilde{\Theta}_\psi \rangle. \quad (2.8)$$

Já a média intrínseca do produto entre  $\Theta_\psi$  e  $\Omega_\psi$  pode ser calculada por:

$$\langle \Theta_\psi \Omega_\psi \rangle^\psi = \langle \Theta_\psi \rangle^\psi \langle \Omega_\psi \rangle^\psi + \langle \tilde{\Omega}_\psi \tilde{\Theta}_\psi \rangle^\psi. \quad (2.9)$$

A média volumétrica extrínseca do gradiente da variável  $\Theta_\psi$  é definida como:

$$\langle \nabla \Theta_\psi \rangle = \nabla \langle \Theta_\psi \rangle + \frac{1}{\Delta V} \int_{A_\psi} \Theta_\psi \mathbf{n}_\psi dA, \quad (2.10)$$

em que  $\mathbf{n}_\psi$  é o vetor normal a superfície do sub-volume de controle ocupado pela fase  $\psi$ .

Seja  $\Phi_\psi$  variável vetorial arbitrária do escoamento, a média volumétrica extrínseca do divergente de  $\Phi_\psi$  é dada por:

$$\langle \nabla \cdot \Phi_\psi \rangle = \nabla \cdot \langle \Phi_\psi \rangle + \frac{1}{\Delta V} \int_{A_\psi} \Phi_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi dA. \quad (2.11)$$

## 2.2 Meios Porosos

Um meio poroso é uma matriz sólida que contém uma infinidade de espaços porosos. Estes tem a característica de serem permeáveis podendo estar preenchidos por diferentes espécies de fluidos, os quais, mediante um diferencial de pressão, podem escoar através do meio poroso. Diversas são as áreas de engenharia que se interessam no estudo dos meios porosos, entre elas estão a mecânica, materiais, química, ambiental e engenharia de petróleo (FAGHRI, 2006).

Analisando-se a aplicação em engenharia de petróleo, meios porosos são empregados como modelos para as rochas-reservatórios que podem aprisionar, entre outras substâncias, água, gás ou petróleo, hidrocarboneto proveniente da degradação biológica de fósseis de animais e plantas ao longo de milhares de anos (LJMBACH, 1975).

A movimentação de fluidos através do meio poroso constitui escoamento do tipo multifásico, inclusive para o caso em que a pressão no reservatório é maior que a pressão de ponto de bolha e o óleo encontra-se somente na fase líquida. Isso se dá pelo fato de a própria rocha-reservatório representar uma fase do escoamento, mesmo que seja imóvel. Assim, o conceito de fração volumétrica apresentado na seção 2.1 aplica-se aqui conforme a equação 2.12, porém é denotado como porosidade.

$$\phi = \frac{V_\alpha}{V}, \quad (2.12)$$

em que, dado um volume elementar representativo para o sistema multifásico rocha/fluido  $V$ , a quantia  $V_\alpha$  representa o volume ocupado pelo(s) fluido(s) que escoam através do meio poroso. Os valores comuns de porosidade para rochas reservatório estão entre 5% e 35%.

Outra importante medida relativa a meios porosos é o tensor permeabilidade absoluta. Este é responsável por indicar a condutância do meio poroso ao escoamento de acordo com a direção do escoamento. Em coordenadas cartesianas, o tensor assume a forma:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

em que a quantidade  $k_{ab}$  representa a condutividade do meio ao escoamento na direção  $a$  quando submetido a uma diferença de pressão na direção  $b$ . Um meio poroso é chamado de isotrópico se as componentes cruzadas do tensor são nulas e se a condutividade é a mesma para qualquer direção. A unidade de medida da condutividade no sistema internacional é o  $m^2$ . Conforme [Kaviany \(1995\)](#), o valor dessa propriedade apresentado pelas rochas-reservatório vai desde  $5 \times 10^{-16} m^2$  até  $3 \times 10^{-12} m^2$ , de acordo com o material que compõe a rocha.

Diferentes escalas de comprimento estão associadas ao escoamento em um meio poroso. Considere a Figura 2, a primeira escala, denotada por  $d_\kappa$ , refere-se ao comprimento dos poros através dos quais se dá o escoamento. A segunda, denotada por  $l_\kappa$  refere-se à dimensão do volume elementar representativo do meio poroso, aquele que compreende porção significativa da rocha/reservatório e do escoamento a ponto de se tornar viável a definição de propriedades médias do escoamento. Por fim, a última,  $L_\kappa$  refere-se à dimensão macroscópica do meio poroso.

Nos problemas de engenharia de petróleo, a escala  $L_\kappa$  é muito maior que  $l_\kappa$ , portanto, não é interesse da simulação numérica de reservatórios a obtenção detalhada dos campos de escoamento ao redor dos poros. Isso justifica o uso das técnicas de média volumétrica sobre as equações do transporte para a obtenção de novas equações responsáveis por reger o escoamento sobre o domínio em questão.

## 2.3 Efeito *Joule-Thomson*

Na termodinâmica, o efeito *Joule-Thomson* descreve a mudança de temperatura de um fluido causada pelo seu escoamento através de uma válvula ou membrana porosa, considerando que nenhum calor é trocado entre o ambiente e o fluido ([OTT; BOERIO-GOATES, 2000](#)).

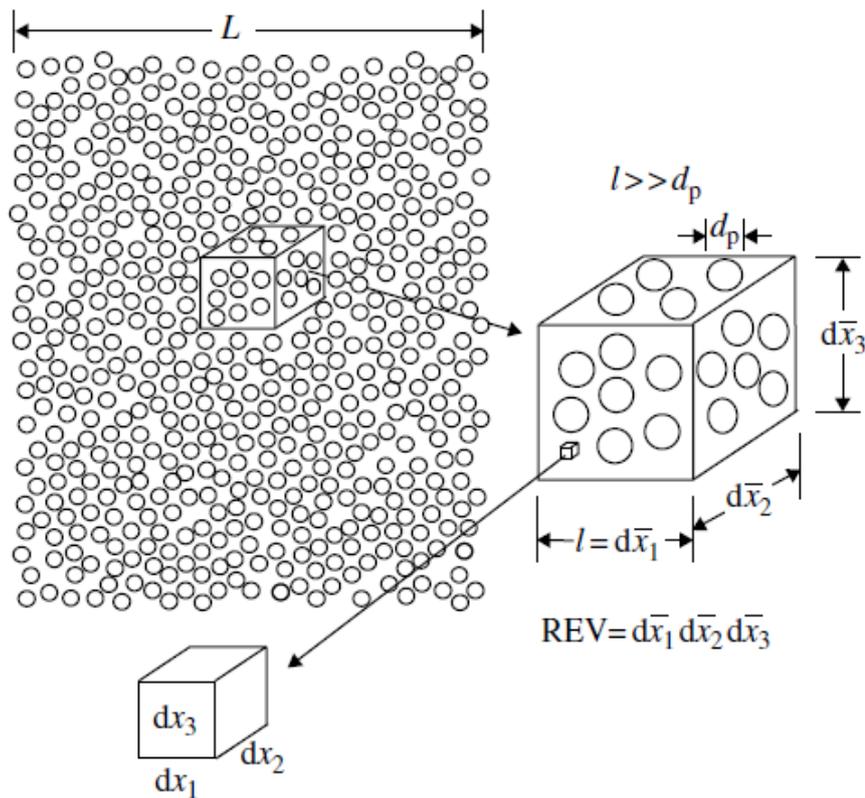


Figura 2 – Escalas de comprimento envolvidas em escoamentos através de meios porosos (KAVIANY, 1995).

O processo descrito, também conhecido como estrangulamento, pode fazer com que o fluido se aqueça ou se resfrie de acordo com as suas propriedades físicas e o estado termodinâmico final alcançado no processo. Este foi reproduzido pela primeira vez em 1852 por *James Prescott Joule* e *William Thomson*, que deram nome ao efeito observado. Tal experimento é esquematizado na Figura 3.

Nesse experimento, uma amostra de gás à pressão  $P_1$ , volume  $V_1$  e temperatura  $T_1$  escoava no interior de um canal isolado termicamente com o ambiente até o encontro de uma membrana porosa. O gás se expande livremente contra um pistão à pressão  $P_2$  e atinge estado de equilíbrio termodinâmico dado por  $P_2$ ,  $V_2$ ,  $T_2$ . Considera-se que tal processo ocorre a baixas velocidades e, portanto, a variação de energia cinética entre os estados 1 e 2 é desprezível, além disso, despreza-se a variação de energia potencial. Escrevendo-se a primeira lei da termodinâmica para o processo  $1 \rightarrow 2$ :

$$\Delta U_{12} = W. \quad (2.14)$$

Como ambos processos de compressão e expansão no canal ocorrem à pressão

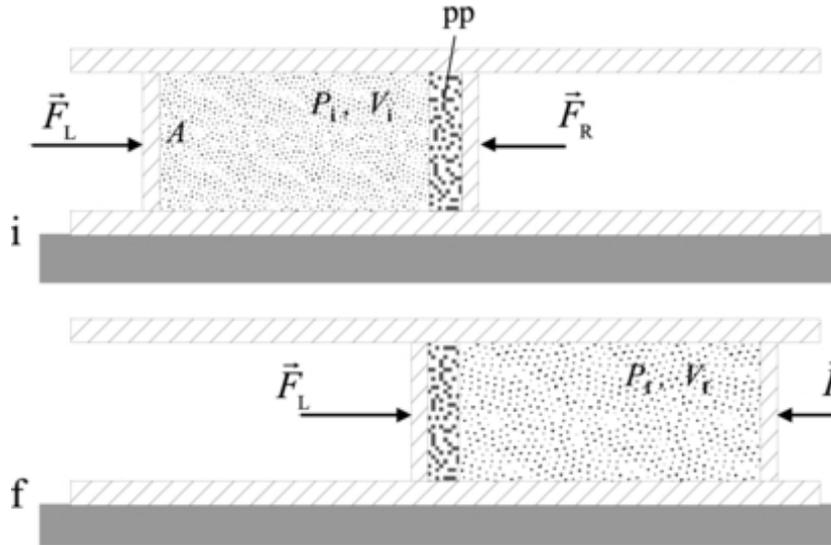


Figura 3 – Esquema do experimento *Joule-Thomson* (OTT; BOERIO-GOATES, 2000).

constante, o trabalho  $W$  pode ser calculado por:

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 = -P_1(0 - V_1) - P_2(V_2 - 0) \\ &= P_1V_1 - P_2V_2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

em que  $P$  e  $V$  são, respectivamente, a pressão e o volume do fluido. Logo, da Equação 2.14:

$$U_2 + P_2V_2 = U_1 + P_1V_1. \quad (2.16)$$

Recorrendo-se à definição da entalpia,  $H = U + PV$ , a Equação 2.16 pode ser reduzida para  $\Delta H_{12} = 0$ , o que leva à conclusão que o processo descrito é isoentálpico.

A Figura 4 ilustra como a pressão e a temperatura estão relacionadas de acordo com uma série de expansões isoentálpicas. Tais linhas são tracejadas pelo fato de não se referirem a uma sucessão de estados de equilíbrio termodinâmico. O processo do experimento é ilustrado pela linha que conecta os estados 1 e 2.

Dadas a pressão e a entalpia referentes a um estado termodinâmico genérico, define-se o coeficiente de *Joule-Thomson* de acordo com a Equação 2.17.

$$C_J = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_h. \quad (2.17)$$

De acordo com a Figura 4, o coeficiente  $C_J$  é negativo para altas pressões e temperaturas, isto é, a expansão isoentálpica do fluido o aquece nessas condições. Para valores baixos de temperatura, o fluido se aquece desde que a pressão seja elevada. No entanto, para valores baixos de pressão, a inclinação da linha isoentálpica é positiva e o fluido se resfria na expansão. No limiar entre essas duas últimas situações está o caso em que

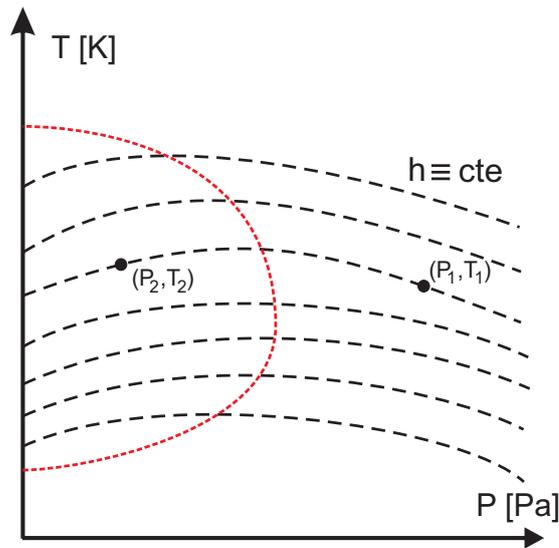


Figura 4 – Diagrama pressão/temperatura para o processo 1-2

$C_J = 0$ , denominado como ponto de inversão. A temperatura referente a esta condição é denominada como temperatura de inversão.

Escrevendo-se a derivada total da entalpia, dada pela Equação B.16, para um processo isoentálpico:

$$\frac{(1 - \beta T)}{\rho} dP + c_p dT = 0, \quad (2.18)$$

em que  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica do fluido,  $\rho$  é a sua densidade e  $c_p$ , o calor específico à pressão constante. Resolvendo-se a Equação 2.18 para a derivada da temperatura em função da pressão, o coeficiente de *Joule-Thomson* pode ser escrito como:

$$C_J = \left( \frac{\partial T}{\partial P} \right)_h = -\frac{(1 - \beta T)}{\rho c_p}. \quad (2.19)$$

O coeficiente de *Joule-Thomson* mede, basicamente, a dependência da temperatura de um fluido em relação às variações de pressão a entalpia constante. Usualmente, as simulações de reservatórios que modelam o transporte de energia desconsideram tal efeito. Isso se dá justamente por este não apresentar grande influência, em relação a outros fenômenos como o transporte de calor por advecção e condução, sobre o perfil de temperatura a ser calculado. Esse é o caso das simulações envolvendo processos de recuperação térmica como drenagem gravitacional assistida por vapor e combustão *in-situ*.

No entanto, o presente trabalho busca analisar efeitos que causam pequenas variações do perfil de temperatura e avaliar se os sensores de temperatura distribuídos ao

longo do poço são capazes de captá-las, portanto, o efeito *Joule-thomson* será incluído na modelagem matemática da equação da conservação da energia.

## 2.4 Sensores de temperatura distribuídos

Um sistema de sensores de temperatura distribuídos, ou DTS - *Distributed Temperature Sensors* - é composto basicamente por um cabo de fibra óptica, uma fonte de laser, um *splitter* óptico, uma unidade de processamento de sinais e uma unidade de saída de dados, conforme ilustrado na Figura 5 (WANG, 2012).

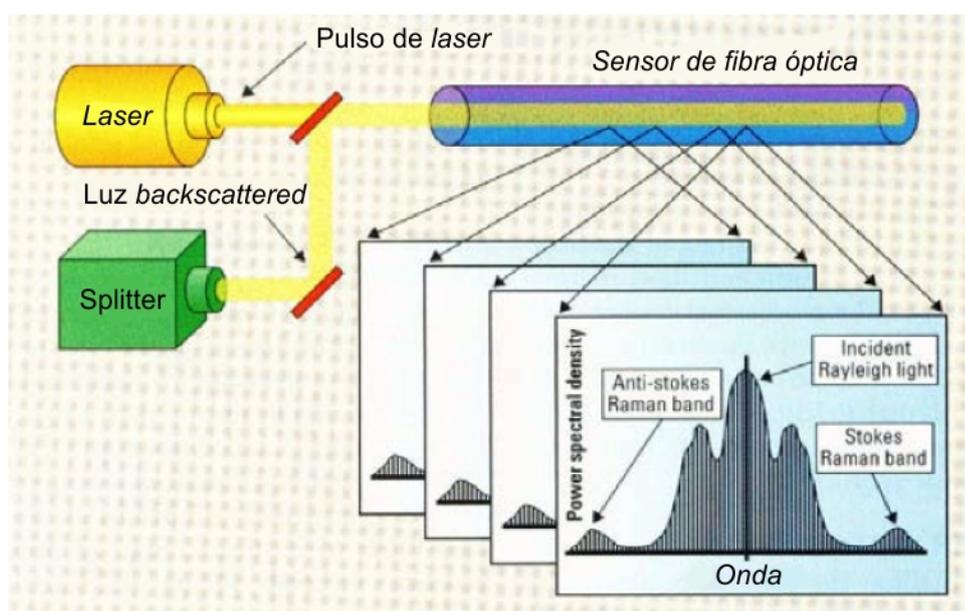


Figura 5 – Esboço de um sistema de sensores de temperatura distribuídos. Adaptado de Wang (2012)

O cabo de fibra óptica é constituído por um núcleo da ordem de  $550 \mu\text{m}$ , o qual é envolvido por uma camada de proteção de sílica com índice de reflexão distinto daquele relativo ao material do centro do cabo (WANG, 2012).

Os DTS são sistemas capazes de medir temperatura com alta precisão, até mesmo ao longo de grandes distâncias. A resolução espacial desse sistema de medição pode ser de até 1 m para cabos de  $3 \times 10^1$  km de distância, o que representam  $3 \times 10^4$  pontos de medição. Já a resolução do sensor de medição de temperatura pode chegar até  $2,5000 \times 10^{-3}$  K. Estes aparelhos providenciam a leitura de um perfil praticamente contínuo de temperatura, uma vez que sua resolução espacial é muito pequena (UKIL; BRAENDLE; KRIPPNER, 2012).

De acordo com Ukil, Braendle e Krippner (2012), o conhecimento de dados de temperatura proveniente dos DTS pode ser aplicado de diversas maneiras em diferentes áreas:

- Indústria de óleo e gás: detecção de regiões de entrada de gás ao longo do poço; informações sobre o resfriamento de poços injetores de água; chegada da frente de vapor em poços produtores.
- Engenharia civil: detecção de vazamentos em barragens e diques, monitoramento estrutural
- Segurança de construções: detecção de incêndios.

Restringindo-se ao caso da indústria de óleo e gás, o conhecimento do perfil de temperatura ao longo do poço pode ser empregado, ainda, de acordo com as seguintes finalidades:

- Monitoramento da injeção/produção de vapor, alocação de escoamento em poços, avaliação da performance de técnicas de elevação artificial como *gas lift*. (JUNIOR, 2012);
- Medidas de temperatura tem sido utilizadas para o monitoramento de poços produtores e na avaliação de processos de fraturamento hidráulico (WANG, 2012);
- Identificação de problemas de escoamento no poço como deposição de componentes pesados do petróleo em suas paredes (WANG, 2012);
- Monitoramento do *breakthrough*<sup>1</sup> de óleo, gás e vapor. (UKIL; BRAENDLE; KRIPPER, 2012).

Os sistemas DTS podem ser instalados em poços de petróleo através de três diferentes maneiras determinando o local do poço em que o perfil de temperatura é medido. De acordo com Wang (2012), podem-se citar os seguintes métodos de instalação:

- Ao longo da interface poço/reservatório em poços completados abertamente. Nesse caso, mede-se a temperatura da mistura que escoar no poço.
- Em poços verticais, no interior do tubing<sup>2</sup>, instalado com válvulas de controle de fluxo ICV - *Inflow Control Valves* em que também é realizada a medição da temperatura da mistura.
- Permanentemente na camada cimentada do poço. Assim, mede-se a temperatura de entrada do fluido no poço.

Através dos resultados apresentados no capítulo 6, avalia-se a posição de medição do perfil de temperatura ao longo do poço que melhor identifica diferentes regiões de produção do poço.

<sup>1</sup> Designa o momento em que uma frente de fluido entra em contato pela primeira vez com o poço.

<sup>2</sup> Tubo através do qual o fluido proveniente do reservatório escoar para a superfície

### 3 Modelo de Escoamento no Reservatório

Um reservatório de petróleo é definido como uma região rochosa subterrânea que apresenta porosidade e permeabilidade suficiente para armazenar e promover o escoamento de hidrocarbonetos, água e outras substâncias através deste meio (SCHLUMBERGER, 2013).

Neste capítulo, apresentam-se as equações referentes ao escoamento no reservatório. A rocha pode ser vista como uma fase sólida, enquanto que o fluido escoando através do meio poroso pode ser classificado como uma fase líquida ou gasosa. Assim, o escoamento através de meios porosos é necessariamente multifásico, portanto, utilizarão-se as técnicas de média volumétrica apresentadas na seção 2.1 para a obtenção das equações que governam o escoamento.

Considera-se nesse trabalho que o reservatório apresenta formato fixo de caixa cujo centro é ocupado por um poço horizontal totalmente penetrante de raio  $r_{poço}$  conforme ilustrado na Figura 6. Tal simplificação tem como finalidade viabilizar a obtenção da solução analítica do escoamento no reservatório, porém é importante salientar que as equações desenvolvidas aqui podem ser resolvidas numericamente para qualquer geometria de reservatório.

As fronteiras superiores e inferiores do reservatório são isoladas ao fluxo de massa e energia, enquanto que as fronteiras laterais do reservatório apresentam as condições de pressão e temperatura constante ao longo do eixo  $z$ . As dimensões  $y^*$  e  $L$  são muito maiores que a espessura  $h^*$  do reservatório.

Assume-se que o escoamento nesse domínio se dá em regime permanente, além disso, assume-se que a pressão no poço seja menor que a pressão na fronteira externa do reservatório de modo que o poço é produtor.

O reservatório pode ser dividido em diferentes zonas de produção ao longo do eixo  $x$ , de modo que, cada zona está associada ao escoamento de um tipo de fluido possivelmente diferente dos demais ou então pode representar uma região onde não há escoamento no reservatório. Tais regiões são isoladas umas das outras de forma que não há fluxo de massa ou energia através destas. A Figura 7 ilustra visão do reservatório que mostra essa divisão.

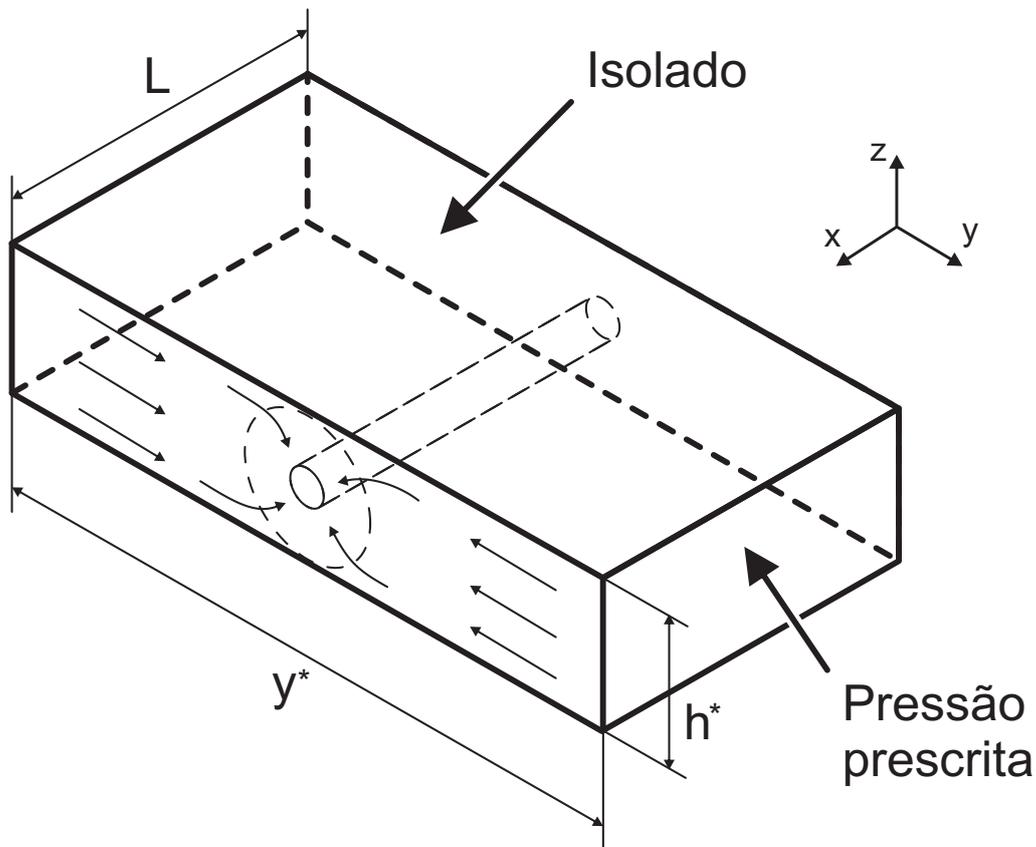


Figura 6 – Esquema do modelo poço/reservatório.

### 3.1 Conservação da Massa

A primeira das equações que regem o escoamento no reservatório a ser deduzida é a conservação da massa. Inicialmente, será abordado o caso de escoamento monofásico e, logo após, a equação escrita para o caso de escoamento multifásico será demonstrada.

#### 3.1.1 Escoamento monofásico

Seja  $V_\psi$  o volume de um volume de controle arbitrário no espaço, ou sistema aberto, através do qual escoam um fluido composto de uma única fase  $\psi$ . Seja  $A_\psi$  a área da superfície externa desse volume de controle. Denotando por  $m_\psi$  a massa da fase  $\psi$ , a relação entre a lei da conservação da massa para um sistema fechado e aquela para um sistema aberto é dada pelo teorema do transporte de Reynolds conforme a Equação 3.1.

$$\left( \frac{dm_\psi}{dt} \right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\psi} \rho_\psi dV + \int_{A_\psi} \rho_\psi (\mathbf{V}_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi) dA. \quad (3.1)$$

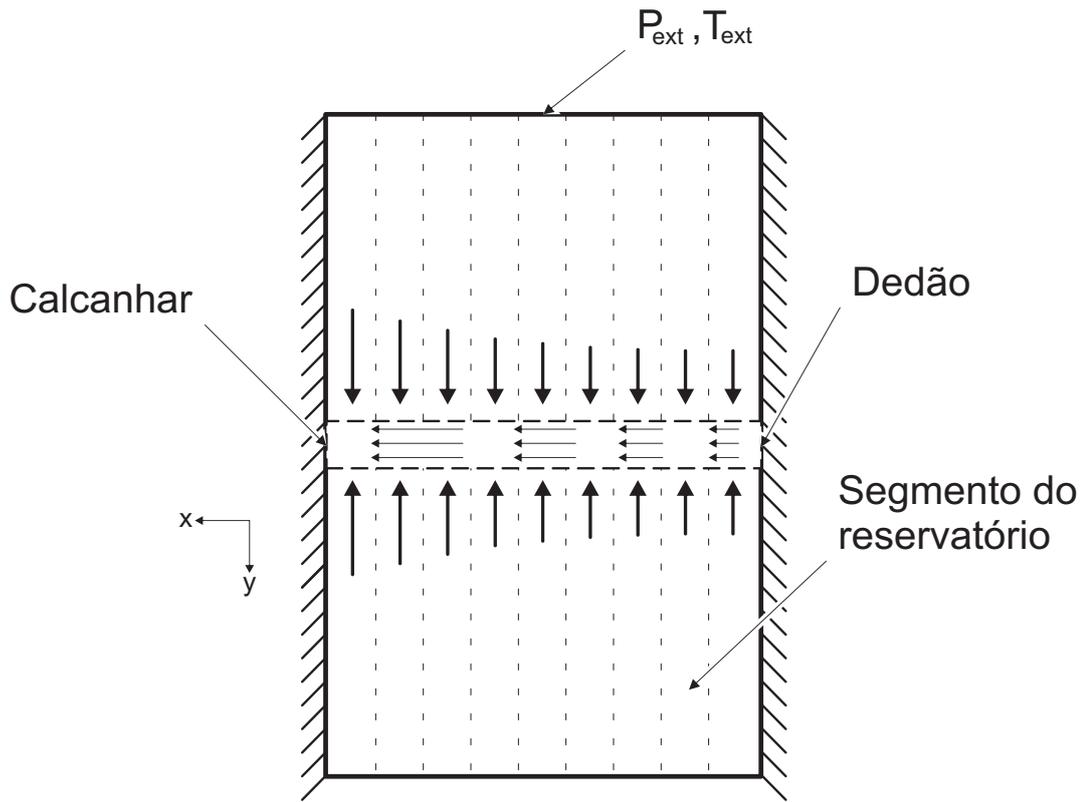


Figura 7 – Visão do topo do reservatório.

Como a massa de um sistema fechado é constante, a Equação 3.1 se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\psi} \rho_\psi dV + \int_{A_\psi} \rho_\psi (\mathbf{v}_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi) dA = 0. \quad (3.2)$$

Considerando-se que o volume de controle em questão é fixo no tempo, é possível aplicar a regra de Leibniz:

$$\int_{V_\psi} \frac{\partial \rho_\psi}{\partial t} dV + \int_{A_\psi} \rho_\psi (\mathbf{v}_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi) dA = 0. \quad (3.3)$$

Por meio do teorema da divergência, o balanço integral de massa no volume de controle pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\int_{V_\psi} \left( \frac{\partial \rho_\psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\psi \mathbf{v}_\psi) \right) dV = 0. \quad (3.4)$$

Como o volume de controle escolhido é arbitrário, a equação 3.4 é válida somente se o integrando for igual a zero. Logo:

$$\frac{\partial \rho_\psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\psi \mathbf{v}_\psi) = 0. \quad (3.5)$$

Considera-se que o escoamento no reservatório se dá em regime permanente, portanto, o balanço de massa na forma diferencial para o caso de escoamento monofásico é dado por:

$$\nabla \cdot (\rho_\psi \mathbf{V}_\psi) = 0. \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Escoamento multifásico

Seja  $V$  o volume de um volume de controle multifásico que engloba as fases  $\alpha$ , representando o fluido que escoar no reservatório e  $\kappa$ , representando a rocha/reservatório. Tomando-se a média extrínseca da Equação 3.6 e aplicando-se a Equação 2.11, a equação da continuidade, ou conservação da massa, média referente à fase  $\alpha$  pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot \langle \rho_\alpha \mathbf{V}_\alpha \rangle = -\frac{1}{V} \int_{A_\alpha} \rho_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha) dA. \quad (3.7)$$

O termo à direita da equação 3.7 representa a transferência de massa por unidade de volume da fase  $\kappa$  para a fase  $\alpha$ . Como não há mudança de fase entre a rocha e o fluido, esse termo é nulo. Aplicando-se a relação 2.6, tem-se

$$\nabla \cdot \left( \phi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle \mathbf{V}_\psi \rangle^\psi + \langle \tilde{\rho}_\psi \tilde{\mathbf{V}}_\psi \rangle \right) = 0. \quad (3.8)$$

Admitindo-se que o termo dispersivo  $\langle \tilde{\rho}_\psi \tilde{\mathbf{V}}_\psi \rangle$  é pequeno em comparação com o termo  $\phi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle \mathbf{V}_\psi \rangle^\psi$  e usando-se a velocidade extrínseca, a equação da conservação da massa para a fase  $\alpha$  no formato diferencial se reduz a:

$$\nabla \cdot (\rho \langle \mathbf{V}_\psi \rangle) = 0, \quad (3.9)$$

onde, por conveniência, escreve-se  $\rho = \langle \rho_\psi \rangle^\psi$ , uma vez que há somente uma fase do tipo fluido que escoar no reservatório.

## 3.2 Conservação da Quantidade de Movimento

Henry Darcy, em 1856, desenvolveu um modelo empírico para o cálculo da resistência ao escoamento monofásico unidimensional em regime permanente provocada por um meio poroso uniforme, rígido, não consolidado (FAGHRI, 2006). Esse modelo se tornou conhecido como a lei de Darcy, largamente aplicada para a descrição do acoplamento entre velocidade e pressão de um fluido escoando através de um meio poroso sujeito a baixas velocidades, ou no regime de Stokes (KAVIANY, 1995). De acordo com sua derivação empírica, a lei de Darcy é dada por:

$$u_y = \frac{K}{\mu} \left( \frac{dP}{dy} - \rho g \right). \quad (3.10)$$

em que  $u_y$  é a velocidade na direção  $y$ ;  $K$  é a permeabilidade absoluta;  $\mu$  é a viscosidade do fluido e  $P$ , a pressão.

Recentemente, a lei empírica desenvolvida por *Darcy* foi obtida teoricamente por [Whitaker \(1986\)](#). Nesse trabalho assume-se escoamento de Stokes, isto é, a baixas velocidades, ao longo de um meio poroso rígido. O método da média volumétrica é empregado na equação de conservação da quantidade de movimento para um escoamento livre, *Navier-Stokes*. A expressão obtida é, por sinal, mais genérica que a lei de Darcy derivada experimentalmente, no sentido que é válida para meios anisotrópicos. Considerando-se o escoamento de uma fase genérica  $\psi$ , que não seja rochosa, através do meio poroso, a lei em discussão é definida por:

$$\langle \mathbf{V}_\psi \rangle = -\frac{\mathbf{K}_\psi}{\mu_\psi} \cdot \left[ \nabla \langle P_\psi \rangle^\psi - \rho_\psi \mathbf{g} \right]. \quad (3.11)$$

É importante notar que a velocidade contida na Equação 3.11 é a velocidade média extrínseca relativa à fase  $\psi$ . Logo, dado um volume elementar representativo do meio poroso, esta representa a velocidade média da fase  $\psi$  sobre todo o volume. Tal quantidade é usualmente chamada de velocidade de Darcy.

O modelo de Darcy conforme enunciado na Equação 3.11 é um dos modelos mais utilizados para a conservação da quantidade de movimento para escoamentos em meios porosos, nele desconsideram-se efeitos de escoamento não-inercial, o que é uma aproximação boa para baixas velocidades, por esse mesmo motivo, desconsideram-se também as flutuações na velocidade média de uma fase representadas pelo termo dispersivo de velocidade.

Conforme descrito no início do capítulo 3, o escoamento no reservatório considerado no presente trabalho pode ser dividido em duas regiões: ao redor do poço tem-se escoamento radial, enquanto que no restante do reservatório tem-se escoamento linear na direção  $y$ . Escrevendo-se a Equação 3.11 em coordenadas cilíndricas e admitindo que o efeito gravitacional sobre a velocidade do escoamento é desprezível em comparação ao gradiente de pressão, tem-se que:

$$\langle V_r \rangle = \frac{q_r}{2\pi r L} = -\frac{k}{\mu} \frac{dP}{dr}, \quad (3.12)$$

onde  $q_r$  é a vazão volumétrica na direção radial. Por sua vez, a velocidade média na região de escoamento linear, ao longo da direção  $y$ , é obtida escrevendo-se a Equação 3.11 em coordenadas cartesianas sendo dada por:

$$\langle V_y \rangle = \frac{q_y}{2hL} = -\frac{k}{\mu} \frac{dP}{dy}, \quad (3.13)$$

onde  $q_y$  é a vazão volumétrica na direção  $y$ . Como o escoamento no reservatório ocorre em regime permanente, é válido que  $q_r = q_y = q$ .

### 3.3 Equação da difusividade hidráulica

Desprezando-se o efeito gravitacional sobre o campo de velocidade do fluido no reservatório, das Equações 3.9 e 3.11, é possível escrever:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\rho_\psi}{\mu_\psi} \mathbf{K} \cdot \nabla \langle \mathbf{P}_\psi \rangle^\psi \right) = 0. \quad (3.14)$$

Considera-se que o escoamento no reservatório é praticamente incompressível, portanto a densidade  $\rho_\psi$  é tomada como sendo constante. Essa é uma hipótese razoável para os escoamentos de água e óleo acima da pressão do ponto de bolha. Com relação ao escoamento de gás, verifica-se a validade dessa hipótese caso a pressão do escoamento seja elevada, acima de  $1,4000 \times 10^1$  MPa, conforme especificado em Dawkrajai (2006). Assume-se que a viscosidade da fase  $\psi$  também é constante. Por fim, considera-se que o tensor permeabilidade é isotrópico cujas componentes são constantes ao longo de todo o domínio, porém, a componente  $k_{xx}$  do tensor é considerada nula uma vez que assume-se fluxo de massa nulo na direção  $x$  no reservatório. Assim, a equação anterior pode ser reduzida a:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0. \quad (3.15)$$

A partir da equação diferencial parcial 3.15 calcula-se o campo de pressão do fluido que escoar no reservatório. A fim de que ela seja solucionada, é necessário a especificação das condições de contorno do problema. Tomando-se a geometria do reservatório em análise, tem-se que suas fronteiras podem ser divididas em duas regiões: externa, por onde há entrada de fluido no reservatório e interna, formada pela superfície em contato com o poço. Logo, informações a respeito do campo de pressão nesses locais são necessárias para a obtenção do perfil de pressão do fluido ao longo de todo o reservatório.

Tomando-se um segmento do reservatório transversal ao eixo  $x$  e de comprimento arbitrário igual a  $L$ , considera-se que a vazão volumétrica de fluido do reservatório para o poço por unidade de comprimento do poço seja uniforme e igual a  $q/L$ . Logo, as condições de contorno para a pressão referentes à região interna do reservatório podem ser escritas como:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial r} \right|_{r=r_{\text{poço}}} = \frac{\mu q}{2\pi r_{\text{poço}} k L}; \quad (3.16)$$

Na região externa do reservatório considera-se que as fronteiras superiores são

isoladas ao escoamento e que as fronteiras laterais apresentam pressão prescrita, logo:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=h/2} = 0; \quad (3.17)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial z} \right|_{z=-h/2} = 0; \quad (3.18)$$

$$P(-y^*/2, z) = P_{ext}; \quad (3.19)$$

$$P(y^*/2, z) = P_{ext}. \quad (3.20)$$

Dadas as condições de contorno 3.16 a 3.20, a solução analítica da Equação 3.15 é encontrada a partir da técnica matemática mapeamento conforme. De acordo com Dawkrajai (2006), tal solução é dada por:

$$P(y, z) - P_{poço} = \frac{\mu}{4\pi k} \left( \frac{q}{L} \right) \log \left[ \frac{\left( \cosh\left(\frac{2\pi y}{h}\right) - \cosh\left(\frac{2\pi z}{h}\right) \right)}{\left( \cosh\left(\frac{2\pi r_{poço}}{h}\right) - 1 \right)} \right]. \quad (3.21)$$

Furui, Zhu e Hill (2002) observaram linhas de fluxo no reservatório provenientes de simulações numéricas em elementos finitos e concluíram que, dada a geometria do reservatório em consideração, o escoamento através dele pode ser dividido em duas zonas distintas. Ao redor do poço, este é considerado radial, enquanto na porção restante do reservatório, é considerado paralelo ao eixo  $y$ . A partir disso, a Equação 3.21 pode ser aproximada para cada uma dessas regiões de acordo com as seguintes expressões:

$$P(r) - P_{poço} = \frac{\mu}{2\pi k} \left( \frac{q}{L} \right) \log \left( \frac{r}{r_{poço}} \right), \quad \text{se } r_{poço} \leq |r| < h/2. \quad (3.22)$$

$$P(y) - P_{poço} = \frac{\mu}{2\pi kh} \left( \frac{q}{L} \right) \left[ h \log \left( \frac{h}{2r_{poço}} \right) + \pi \left( y - \frac{h}{2} \right) \right], \quad \text{se } h/2 \leq |y| < y^*/2. \quad (3.23)$$

Considera-se um reservatório cujas propriedades são dadas pela Tabela 2 produzindo gás com propriedades físicas dadas pela Tabela 3 e contendo um poço horizontal especificado pela Tabela 1. Fixando-se a coordenada  $x$  na posição do dedão, as variações de pressão entre reservatório e poço na direção  $y$  obtidas a partir da Equação 3.21 e através das Equações 3.22 e 3.23 é ilustrada pela Figura 8.

Percebe-se que a aproximação da solução analítica proposta por Furui, Zhu e Hill (2002) apresenta ótima concordância, assim, com o intuito de facilitar o processo de obtenção da solução analítica para o perfil de temperatura no reservatório, as Equações 3.22 e 3.23 são empregadas em contraposição à Equação 3.21.

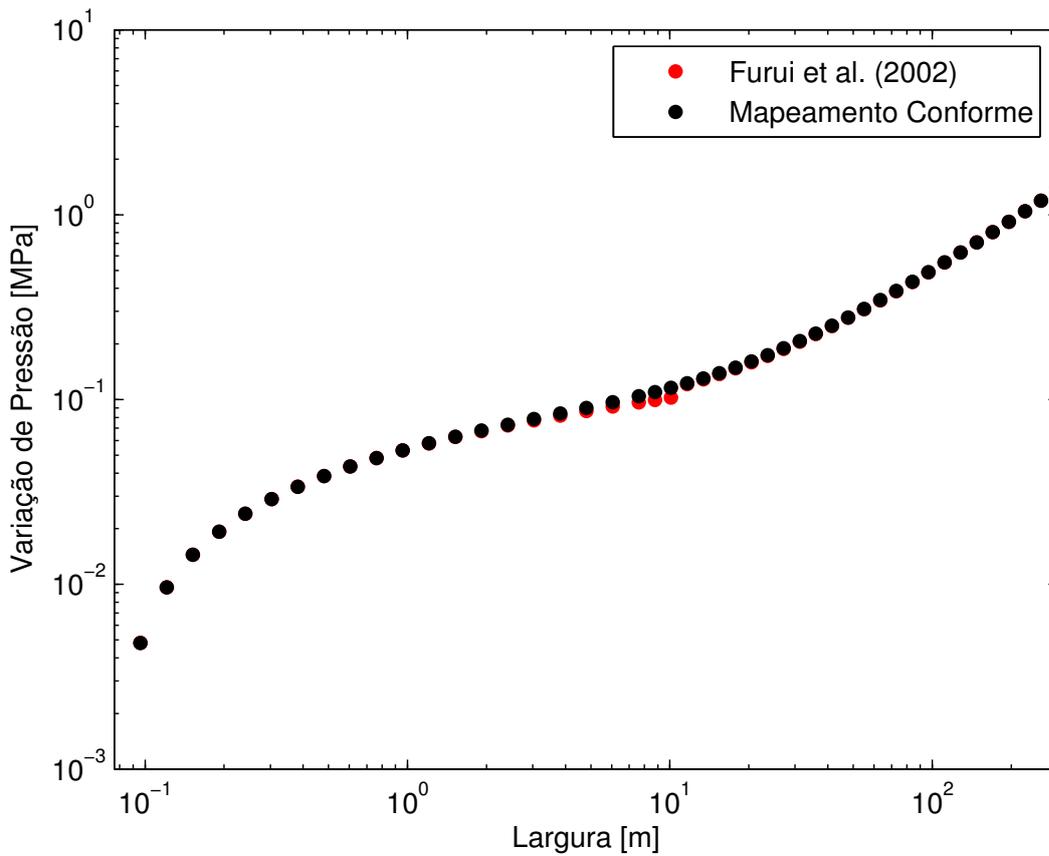


Figura 8 – Queda de pressão no reservatório segundo mapeamento conforme e [Furui, Zhu e Hill \(2002\)](#)

### 3.4 Conservação da Energia

Na maioria dos modelos de reservatório, assume-se que, dada uma camada transversal ao eixo  $z$ , a sua temperatura é constante, porém crescente a medida que se aumenta a profundidade, uma vez que calor é transferido do centro da terra para sua superfície. Alguns autores adicionaram o efeito de expansão térmica numa região suficientemente próxima ao poço, no entanto, a variação de temperatura causada por tais efeitos é praticamente insignificante se comparada àquela causada pelo gradiente geotérmico ([YOSHIOKA, 2007](#)).

Como o presente trabalho busca avaliar as variações de temperatura ao longo de um poço horizontal, o gradiente geotérmico deixa de ser fator impactante sobre o perfil de temperatura calculado, porém, efeitos sutis de transferência de calor no domínio do reservatório como condução térmica ao longo da rocha e fluido, dissipação viscosa e expansão térmica do fluido devem ser considerados.

Nessa seção, desenvolve-se o modelo matemático para a conservação da energia no domínio do reservatório. Inicialmente, considera-se o caso de escoamento monofásico, logo após, as equações desenvolvidas para esse caso são manipuladas com o uso

das técnicas de média volumétrica a fim de que se obtenha o modelo referente ao caso de escoamento multifásico.

### 3.4.1 Escoamento monofásico

Escrevendo-se a primeira lei da termodinâmica para um sistema fechado composto por uma única fase  $\psi$ :

$$\left(\frac{dE_\psi}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{\partial Q_\psi}{dt} - \frac{\partial W_\psi}{dt}. \quad (3.24)$$

$E_\psi$  representa a energia total carregada pela fase  $\psi$ , esta é composta pela soma das energias interna e cinética<sup>1</sup>, logo  $E_\psi = I_\psi + |\mathbf{V}_\psi|^2/2$ .  $Q_\psi$  representa o calor transferido do meio para o sistema, enquanto  $W_\psi$  representa o trabalho realizado pelo sistema sobre o meio.

Considere um volume de controle estacionário que engloba uma única fase  $\psi$ . Seja  $V$  o volume dessa região e  $A$  a sua área superficial. Como este é um sistema aberto, o teorema do transporte de Reynolds é aplicado para a obtenção da primeira lei da termodinâmica nesse domínio (BEJAN, 2013):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_\psi (i_\psi + |\mathbf{V}_\psi|^2/2) dV + \int_A \rho_\psi (i_\psi + |\mathbf{V}_\psi|^2/2) (\mathbf{V}_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi) dA = \frac{\partial Q_\psi}{dt} - \frac{\partial W_\psi}{dt}, \quad (3.25)$$

onde,  $\rho_\psi$  é a massa específica da fase  $\psi$  e  $i_\psi$  é a energia interna intensiva. A taxa de transferência de calor do meio para o sistema é composta de duas parcelas conforme a equação abaixo:

$$\frac{\partial Q_\psi}{dt} = - \int_A (\mathbf{q}_\psi'' \cdot \mathbf{n}_\psi) dA + \int_V q_\psi''' dV, \quad (3.26)$$

$\mathbf{q}_\psi''$  é o vetor fluxo de calor na superfície do volume de controle da fase  $\psi$ , a qual é função do gradiente de temperatura nessa posição. O produto interno  $\mathbf{q}_\psi'' \cdot \mathbf{n}_\psi$  representa o calor transferido para fora do volume de controle. Por sua vez,  $q_\psi'''$  não é exatamente uma taxa de transferência de calor mas sim um termo fonte de energia por unidade de volume, o qual pode ser proveniente de reações químicas ou aquecimento elétrico. O segundo termo do lado direito da Equação 3.25 é dado por:

$$\frac{\partial W_\psi}{dt} = - \int_A (\mathbf{n}_\psi \cdot \boldsymbol{\tau}'_\psi) \cdot \mathbf{V}_\psi dA - \int_V \rho_\psi (\mathbf{X}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi) dV, \quad (3.27)$$

em que, a primeira expressão ao lado direito representa a energia trocada entre o volume de controle e o meio através do trabalho realizado pelas tensões normais e cisalhantes

<sup>1</sup> Desconsidera-se o termo referente à energia potencial uma vez que o poço é horizontal.

na superfície do volume de controle, enquanto a segunda expressão representa o trabalho realizado pelas forças de corpo,  $\mathbf{X}_\psi$  é o vetor força de corpo por unidade de volume agindo sobre o volume de controle referente à fase  $\psi$ . É importante notar que o tensor tensão completo,  $\boldsymbol{\tau}'_\psi$ , é constituído por duas componentes conforme mostrado na Equação 3.28.

$$\boldsymbol{\tau}'_\psi = -P_\psi \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_\psi, \quad (3.28)$$

o primeiro termo é a pressão termodinâmica isotrópica, enquanto o segundo é o tensor tensão viscoso, ambos referentes à fase  $\psi$ . Por fim, a equação de conservação da energia para a fase  $\psi$  em formato de balanço integral é dada por:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\underline{V}} \rho_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) dV + \int_A \rho_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) (\mathbf{V}_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi) dA \\ & - \int_A (-\mathbf{q}''_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi) dA - \int_{\underline{V}} q''' dV - \int_A (\mathbf{n}_\psi \cdot \boldsymbol{\tau}'_\psi) \cdot \mathbf{V}_\psi dA - \int_{\underline{V}} \rho_\psi (\mathbf{X}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi) dV = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por meio do teorema da divergência, as integrais de fluxo na superfície do volume de controle são transformadas em integrais volumétricas:

$$\begin{aligned} & \int_{\underline{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] dV + \int_{\underline{V}} \nabla \cdot \left[ \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] dV \\ & + \int_{\underline{V}} \nabla \cdot \mathbf{q}''_\psi dV - \int_{\underline{V}} q''' dV - \int_{\underline{V}} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}'_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi) dV - \int_{\underline{V}} \rho_\psi (\mathbf{X}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi) dV = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Como o volume de controle escolhido inicialmente é arbitrário, a Equação 3.30 será válida somente se o somatório dos integrandos for igual a zero, logo:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] = \\ & - \nabla \cdot \mathbf{q}''_\psi + q''' + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}'_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi) + \rho_\psi (\mathbf{X}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi), \end{aligned} \quad (3.31)$$

assumindo-se que o termo fonte de energia no domínio em questão é nulo, a Equação 3.31 se reduz a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] = \\ & - \nabla \cdot \mathbf{q}''_\psi + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}'_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi) + \rho_\psi (\mathbf{X}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi), \end{aligned} \quad (3.32)$$

a qual corresponde ao balanço de energia total, incluindo os termos de energia mecânica e térmica, no volume de controle ocupado pela fase  $\psi$ .

Tomando-se o produto interno entre o vetor velocidade e a lei da conservação da quantidade de movimento de Navier-Stokes, obtém-se a lei da conservação da energia mecânica:

$$\left( \frac{\partial (\rho_\psi \mathbf{V}_\psi)}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{V}_\psi + (\nabla \cdot \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \mathbf{V}_\psi^T) \cdot \mathbf{V}_\psi = (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}'_\psi) \cdot \mathbf{V}_\psi + (\rho_\psi \mathbf{X}_\psi) \cdot \mathbf{V}_\psi, \quad (3.33)$$

Segundo as relações A.12, A.13 e A.14:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_\psi \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) = \nabla \cdot \left( (\boldsymbol{\tau}'_\psi) \cdot \mathbf{V}_\psi \right) - (\boldsymbol{\tau}'_\psi)^T : \nabla \mathbf{V}_\psi + \rho_\psi (\mathbf{X}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi). \quad (3.34)$$

O tensor tensão completo pode ser decomposto conforme a Equação 3.28, logo, a conservação da energia mecânica pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho_\psi \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) = \\ \nabla \cdot \left( (\boldsymbol{\tau}_\psi) \cdot \mathbf{V}_\psi \right) - \nabla \cdot (P_\psi \mathbf{V}_\psi) - \boldsymbol{\tau}_\psi : \nabla \mathbf{V}_\psi + P_\psi (\nabla \cdot \mathbf{V}_\psi) + \rho_\psi (\mathbf{X}_\psi \cdot \mathbf{V}_\psi). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Subtraindo-se as Equações 3.31 e 3.35, obtém-se a lei da conservação da energia térmica:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\psi i_\psi)}_1 + \underbrace{\nabla \cdot (\rho_\psi \mathbf{V}_\psi i_\psi)}_2 = - \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{q}''_\psi}_3 + \underbrace{\boldsymbol{\tau}_\psi : \nabla \mathbf{V}_\psi}_4 - \underbrace{P_\psi (\nabla \cdot \mathbf{V}_\psi)}_5. \quad (3.36)$$

Os significados físicos de cada um dos termos da Equação 3.36 são dados respectivamente por:

1. Taxa de acumulação de energia interna no volume de controle;
2. fluxo advectivo de energia interna através da superfície de controle;
3. fluxo difusivo de calor através da superfície de controle;
4. potência mecânica transformada em energia térmica (dissipada) através das forças viscosas;
5. potência mecânica associada à expansão do volume material pela ação do campo de pressão.

É importante notar que a Equação 3.36 está acoplada com a conservação da energia mecânica através dos termos 4 e 5. Além disso, o primeiro deles representa um trabalho irreversível, que gera entropia no sistema, enquanto o segundo está associado a um trabalho reversível.

A variável primária da equação da conservação da energia conforme 3.36 é a energia interna, empregando-se a propriedade termodinâmica entalpia,  $h_\psi = i_\psi + P_\psi / \rho_\psi$ , como variável primária, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_\psi h_\psi) + \nabla \cdot (\rho_\psi \mathbf{V}_\psi h_\psi) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\psi'' + \tau_\psi : \nabla \mathbf{V}_\psi + \left( \frac{\partial P_\psi}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla P_\psi \right). \quad (3.37)$$

Expandindo-se as derivadas do lado esquerdo de 3.37, obtém-se:

$$\begin{aligned} \rho_\psi \left( \frac{\partial h_\psi}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla h_\psi \right) + h_\psi \left( \frac{\partial \rho_\psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\psi \mathbf{V}_\psi) \right) = \\ -\nabla \cdot \mathbf{q}_\psi'' + \tau_\psi : \nabla \mathbf{V}_\psi + \left( \frac{\partial P_\psi}{\partial t} + \mathbf{V}_\psi \cdot \nabla P_\psi \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

O segundo termo ao lado esquerdo da equação anterior é nulo devido à Equação 3.5. Expressando-se a entalpia da fase  $h_\psi$  em função da pressão e temperatura termodinâmicas, obtém-se:

$$\nabla h_\psi = \frac{\partial h_\psi}{\partial P} \cdot \nabla P_\psi + \frac{\partial h_\psi}{\partial T} \cdot \nabla T_\psi. \quad (3.39)$$

Tomando-se o produto interno do vetor velocidade  $\mathbf{V}$  com a Equação 3.39 e somando-se a derivada da entalpia em relação ao tempo, obtém-se a derivada material<sup>2</sup> da entalpia:

$$\frac{Dh_\psi}{Dt} = \frac{\partial h_\psi}{\partial P} \frac{DP_\psi}{Dt} + \frac{\partial h_\psi}{\partial T} \frac{DT_\psi}{Dt}. \quad (3.40)$$

Logo, a equação 3.38 torna-se:

$$\rho_\psi \left( \frac{\partial h_\psi}{\partial P} \frac{DP_\psi}{Dt} + \frac{\partial h_\psi}{\partial T} \frac{DT_\psi}{Dt} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\psi'' + \tau_\psi : \nabla \mathbf{V}_\psi + \frac{DP_\psi}{Dt}. \quad (3.41)$$

Escrevendo-se as derivadas parciais da entalpia com relação à temperatura e à pressão conforme as relações B.14 e B.15 do apêndice B, a Equação 3.41 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\rho_\psi (c_P)_\psi \frac{DT_\psi}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\psi'' + \tau_\psi : \nabla \mathbf{V}_\psi + (\beta T)_\psi \frac{DP_\psi}{Dt}. \quad (3.42)$$

O fluxo de calor por condução  $\mathbf{q}_\psi''$  é dado pela lei de Fourier conforme a Equação 3.43:

$$\mathbf{q}_\psi'' = -(\mathbf{K}_T)_\psi \cdot \nabla T_\psi, \quad (3.43)$$

em que  $(\mathbf{K}_T)_\psi$  é o tensor condutividade térmica e  $\nabla T_\psi$  é o gradiente do campo de temperatura, ambos relativos à fase  $\psi$ . Considerando-se que o escoamento no reservatório ocorre em regime permanente, a expressão final para a conservação da energia térmica escrita em função da temperatura e referente à uma fase arbitrária  $\psi$  é dada por:

$$\rho_\psi (c_P)_\psi (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla T_\psi) = \nabla \cdot ((\mathbf{K}_T)_\psi \cdot \nabla T_\psi) + \tau_\psi : \nabla \mathbf{V}_\psi + (\beta T)_\psi (\mathbf{V}_\psi \cdot \nabla P_\psi). \quad (3.44)$$

<sup>2</sup> O conceito de derivada material é definido pela Equação A.8 do Apêndice A.

### 3.4.2 Escoamento multifásico

Considere um volume de controle multifásico abrangendo duas fases:  $\alpha$ , representando o fluido que escoar no reservatório e  $\kappa$ , representando a rocha-reservatório, que é imóvel. Escrevendo-se a equação da conservação da energia para ambas as fases e tomando sua média extrínseca sobre o volume de controle multifásico, tem-se:

$$\langle \rho_\alpha (c_p)_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla T_\alpha) \rangle = \langle \nabla \cdot ((\mathbf{K}_T)_\alpha \cdot \nabla T_\alpha) \rangle + \langle \tau_\alpha : \nabla \mathbf{V}_\alpha \rangle + \quad (3.45)$$

$$\langle (\beta T)_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla P_\alpha) \rangle;$$

$$\langle \nabla \cdot ((\mathbf{K}_T)_\kappa \cdot \nabla T_\kappa) \rangle = 0. \quad (3.46)$$

As condições de contorno na(s) interface(s) existente(s) entre  $\alpha$  e  $\kappa$  são de continuidade na temperatura e no fluxo de calor. Denotando-se por  $\phi$  a fração volumétrica da fase  $\alpha$  sobre a mistura, também conhecida como porosidade da rocha, e recorrendo-se às relações definidas em 2.8, 2.10 e 2.11, os termos da Equação 3.45 podem ser expandidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \langle \rho_\alpha (c_p)_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla T_\alpha) \rangle &= \phi \langle \rho_\alpha (c_p)_\alpha \rangle^\alpha \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha \cdot \nabla \langle T_\alpha \rangle^\alpha + \\ &\quad \frac{1}{V_\alpha} \int_{A_\alpha} \phi \langle \rho_\alpha (c_p)_\alpha \rangle^\alpha T_\alpha \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha dA + \\ &\quad \langle (\rho_\alpha \tilde{c}_p)_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \cdot \tilde{\nabla} T_\alpha) \rangle, \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que, o primeiro termo refere-se à energia média transportada por advecção no volume de controle multifásico, o segundo refere-se à energia transportada por advecção entre as fases  $\alpha$  e  $\kappa$ , como não há mudança de fase entre a rocha e o fluido, este termo é nulo. O terceiro e último termo, também desprezível, é de caráter dispersivo e representa a flutuação da energia média transportada por advecção.

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot ((\mathbf{K}_T)_\alpha \cdot \nabla T_\alpha) \rangle &= \nabla \cdot \left( \phi \langle (\mathbf{K}_T)_\alpha \rangle^\alpha \cdot \langle \nabla T_\alpha \rangle^\alpha \right) + \\ &\quad \nabla \cdot \langle (\mathbf{K}_T)_\alpha \cdot \nabla T_\alpha \rangle + \\ &\quad \frac{1}{V} \int_{A_\alpha} ((\mathbf{K}_T)_\alpha \cdot \nabla T_\alpha) \mathbf{n}_\alpha dA, \end{aligned} \quad (3.48)$$

em que o primeiro termo da Equação 3.48 representa a transferência de calor média por condução, o segundo mede a dispersão associada à transferência de calor por condução

e o último representa a transferência de calor entre as fases  $\alpha$  e  $\kappa$  através das interfaces observadas entre tais fases. Admite-se que os dois últimos termos são desprezíveis.

$$\begin{aligned} \langle \tau_\alpha : \nabla \mathbf{V}_\alpha \rangle &= \phi \langle \tau_\alpha \rangle^\alpha : \langle \nabla \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha + \\ &\langle \tilde{\tau}_\alpha : \nabla \tilde{\mathbf{V}}_\alpha \rangle, \end{aligned} \quad (3.49)$$

em que o primeiro termo representa a dissipação viscosa média no volume de controle multifásico e o segundo representa a dispersão referente à dissipação viscosa.

$$\begin{aligned} \langle (\beta T)_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla P_\alpha) \rangle &= \phi \langle (\beta T)_\alpha \rangle^\alpha \langle (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla P_\alpha) \rangle^\alpha + \\ &\langle (\beta \tilde{T})_\alpha (\mathbf{V}_\alpha \cdot \nabla P_\alpha) \rangle, \end{aligned} \quad (3.50)$$

em que o primeiro termo representa uma parcela da energia térmica média transportada por advecção e o segundo refere-se aos efeitos dispersivos desse transporte.

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot ((\mathbf{K}_T)_\kappa \cdot \nabla T_\kappa) \rangle &= \nabla \cdot \left( (1 - \phi) \langle (\mathbf{K}_T)_\kappa \rangle^\kappa \cdot \langle \nabla T_\kappa \rangle^\kappa \right) + \\ &\nabla \cdot \langle (\tilde{\mathbf{K}}_T)_\kappa \cdot \nabla \tilde{T}_\kappa \rangle + \\ &\frac{1}{\Delta V} \int_{A_\kappa} ((\mathbf{K}_T)_\kappa \cdot \nabla T_\kappa) \mathbf{n}_\kappa dA. \end{aligned} \quad (3.51)$$

O significado dos termos da Equação 3.51 são idênticos àqueles da Equação 3.48, porém estes referem-se à fase  $\kappa$ , que representa a rocha-reservatório.

Considerando-se que os termos dispersivos são de baixa ordem; escrevendo-se a relação existente entre as médias intrínseca, extrínseca e euleriana para o vetor velocidade,  $\phi \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha = \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle = \langle \mathbf{V} \rangle$  e admitindo-se equilíbrio local térmico entre as fases rocha e fluido (KAVIANY, 1995, p. 120), ou seja,  $\langle T_\alpha \rangle^\alpha = \langle T_\kappa \rangle^\kappa = \langle T \rangle$ , as Equações 3.45 e 3.46

podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \phi \langle \rho_\alpha \rangle^\alpha \langle (c_p)_\alpha \rangle^\alpha \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha \cdot \nabla \langle T \rangle &= \nabla \left( \phi \langle (K_T)_\alpha \rangle^\alpha \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + \\ &\phi \langle \tau_\alpha \rangle^\alpha : \nabla \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha + \\ &\phi \langle \beta_\alpha \rangle^\alpha \langle T \rangle \left( \langle \mathbf{V}_\alpha \rangle^\alpha \cdot \nabla \langle P_\alpha \rangle^\alpha \right) + \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{V} \int_{A_\alpha} \left( (K_T)_\alpha \cdot \nabla T \right) \mathbf{n}_\alpha dA; \\ 0 &= \nabla \left( (1 - \phi) \langle (K_T)_\kappa \rangle^\kappa \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + \\ &\frac{1}{V} \int_{A_\kappa} \left( (K_T)_\kappa \cdot \nabla T \right) \mathbf{n}_\kappa dA. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Os vetores normais às interfaces das fases  $\alpha$  e  $\kappa$  possuem sentido oposto, logo  $\mathbf{n}_\alpha = -\mathbf{n}_\kappa$ . Somando-se as Equações 3.52 e 3.53, o calor trocado entre as fases  $\alpha$  e  $\kappa$  é anulado pela continuidade do fluxo de calor nas interfaces entre tais fases, logo:

$$\rho c_p \langle \mathbf{V} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle = \nabla \left( (K_T)_{eq} \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + \phi \tau : \nabla \mathbf{V} + \beta \langle T \rangle (\langle \mathbf{V} \rangle \cdot \nabla P), \quad (3.54)$$

onde,  $(K_T)_{eq}$  é a condutividade térmica equivalente entre a rocha e o fluido, modelada por:

$$(K_T)_{eq} = \phi (K_T)_\alpha + (1 - \phi) (K_T)_\kappa. \quad (3.55)$$

Segundo Nield e Bejan (2006) e Nield (2007), para escoamento através de meios porosos, o termo relativo à dissipação viscosa na Equação 3.54 é modelado como  $-\langle \mathbf{V} \rangle \cdot \nabla P$ , em que  $P$  refere-se à pressão termodinâmica do fluido.

Por conveniência, escrevem-se as propriedades  $\langle (c_p)_\alpha \rangle^\alpha$ ,  $\langle \rho_\alpha \rangle^\alpha$  e  $\langle \beta_\alpha \rangle^\alpha$  como  $c_p$ ,  $\rho$  e  $\beta$ , respectivamente, uma vez que há somente uma fase escoando através do meio poroso. Assim, a expressão final para a equação da conservação da energia no sistema rocha/fluido é dada por:

$$\rho c_p \langle \mathbf{V} \rangle \cdot \nabla \langle T \rangle = \nabla \left( (K_T)_{eq} \cdot \nabla \langle T \rangle \right) + (\beta \langle T \rangle - 1) (\langle \mathbf{V} \rangle \cdot \nabla P). \quad (3.56)$$

### 3.4.3 Solução da equação

Assume-se que as propriedades termofísicas do fluido que escoam no reservatório como  $\mu$ ;  $\rho$ ;  $c_p$ ;  $K$  e  $\beta$  não são funções da pressão e temperatura, pelo contrário, são constantes ao longo de todo o reservatório. Devido ao fato de a geometria do domínio de solução dessa equação ser simples, é possível obter uma solução analítica para tal.

Conforme descrito anteriormente, o reservatório padrão empregado para a confecção dos resultados desse trabalho pode ser dividido em duas regiões de escoamento: radial e linear. Equações para o perfil de temperatura em ambas regiões são determinadas a seguir, por fim, as condições de contorno do problema de transferência de calor são descritas e a solução final para o perfil de temperatura no reservatório é determinada.

### 3.4.3.1 Região de escoamento radial

Considere a região de escoamento radial em torno do poço, assume-se que não há transferência de calor nas direções  $\theta$  e  $z$ . Escrevendo-se a equação de conservação da energia 3.56 em coordenadas cilíndricas, tem-se:

$$\rho c_p u_r \frac{dT}{dr} + (1 - \beta T) u_r \frac{dP}{dr} - (K_T)_{eq} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad (3.57)$$

em que se considera que a componente  $K_{rr}$  do tensor condutividade térmica equivalente é igual a  $(K_T)_{eq}$ , enquanto  $K_{r\theta}$  e  $K_{rz}$  são nulas. Substituindo a relação 3.12 em 3.57, obtém-se:

$$r^2 \frac{d^2 T}{dr^2} + \left( 1 - \frac{q \rho c_p}{2\pi L (K_T)_{eq}} \right) r \frac{dT}{dr} + \left( \frac{\mu q_r^2 \beta}{(2\pi L)^2 k (K_T)_{eq}} \right) T = - \left( \frac{q}{2\pi L} \right)^2 \frac{\mu}{k (K_T)_{eq}}. \quad (3.58)$$

Definindo-se  $\theta(r) = T(r) - 1/\beta$ , a Equação 3.58 se torna:

$$r^2 \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \left( 1 - \frac{q_r \rho c_p}{2\pi L (K_T)_{eq}} \right) r \frac{d\theta}{dr} + \left( \frac{q_r}{2\pi L} \right)^2 \frac{\mu \beta}{k (K_T)_{eq}} \theta = 0. \quad (3.59)$$

Dado que as propriedades termofísicas do fluido e térmicas da rocha são constantes, a Equação 3.58 pode ser vista como diferencial ordinária não-homogênea do tipo *Euler-Cauchy*. De acordo com Kreyszig (2010), fazendo-se  $\theta(r) = ar^m$ , tem-se:

$$\left[ m(m-1) + \left( 1 - \frac{q_r \rho c_p}{2\pi L (K_T)_{eq}} \right) m + \left( \frac{q_r}{2\pi L} \right)^2 \frac{\mu \beta}{k (K_T)_{eq}} \right] ar^m = 0, \quad (3.60)$$

a qual, para ser válida ao longo do domínio de escoamento radial  $[0; h/2]$ , deve satisfazer:

$$m^2 - \left( \frac{q_r}{2\pi L} \right) \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} m + \left( \frac{q_r}{2\pi L} \right)^2 \frac{\mu \beta}{k (K_T)_{eq}} = 0, \quad (3.61)$$

cujas soluções são encontradas através da fórmula de Bhaskara:

$$m_1 = \frac{q_r}{4\pi L} \left[ \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} + \sqrt{\left( \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} \right)^2 + \frac{4\mu\beta}{k (K_T)_{eq}}} \right]; \quad (3.62)$$

$$m_2 = \frac{q_r}{4\pi L} \left[ \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} - \sqrt{\left( \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} \right)^2 + \frac{4\mu\beta}{k (K_T)_{eq}}} \right]. \quad (3.63)$$

Portanto,  $T(r)$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$T(r) = \frac{1}{\beta} + a_1 r^{m_1} + a_2 r^{m_2}, \quad (3.64)$$

sendo que as constantes  $a_1$  e  $a_2$  serão encontradas através da aplicação das condições de contorno do problema.

### 3.4.3.2 Região de escoamento linear

Considere agora a região de escoamento linear na direção “y”, reescrevendo a equação da conservação da energia no sistema de coordenadas cartesianas, tem-se:

$$\rho c_p u_y \frac{dT}{dy} + (1 - \beta T) u_y \frac{dP}{dy} - (K_T)_{eq} \frac{d^2 T}{dy^2} = 0. \quad (3.65)$$

Substituindo a Equação 3.13 em 3.65:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} - \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} \left( \frac{q_y}{2hL} \right) \frac{dT}{dy} - \frac{\beta \mu}{k(K_T)_{eq}} \left( \frac{q_y}{2hL} \right)^2 T = -\frac{\mu}{k(K_T)_{eq}} \left( \frac{q_y}{2hL} \right)^2. \quad (3.66)$$

Fazendo-se  $\theta(y) = T(y) - 1/\beta$ :

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} - \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} \left( \frac{q_y}{2hL} \right) \frac{d\theta}{dy} - \frac{\beta \mu}{k(K_T)_{eq}} \left( \frac{q_y}{2hL} \right)^2 \theta = 0. \quad (3.67)$$

A Equação 3.67 é diferencial ordinária linear de segunda ordem. De acordo com Kreyszig (2010), a solução para essa classe de equações é dada pela combinação linear de funções exponenciais, logo, fazendo-se  $\theta(y) = be^{ny}$ :

$$\left[ n^2 - \left( \frac{q_y}{2hL} \right) \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} n + \left( \frac{q_y}{2hL} \right)^2 \frac{\mu \beta}{k(K_T)_{eq}} \right] be^{ny} = 0, \quad (3.68)$$

a qual, para ser válida em todo o domínio  $(h/2; y^*/2]$ , deve satisfazer:

$$n^2 - \left( \frac{q_y}{2hL} \right) \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} n + \left( \frac{q_y}{2hL} \right)^2 \frac{\mu \beta}{k(K_T)_{eq}} = 0. \quad (3.69)$$

De modo semelhante à seção 3.4.3.1, a equação pode ser resolvida através da fórmula de Bhaskara, conduzindo a

$$n_1 = \frac{q_y}{4hL} \left[ \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} + \sqrt{\left( \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} \right)^2 + \frac{4\mu\beta}{k(K_T)_{eq}}} \right]; \quad (3.70)$$

$$n_2 = \frac{q_y}{4hL} \left[ \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} - \sqrt{\left( \frac{\rho c_p}{(K_T)_{eq}} \right)^2 + \frac{4\mu\beta}{k(K_T)_{eq}}} \right]. \quad (3.71)$$

Por fim, a solução da Equação 3.65 é dada por:

$$T(y) = \frac{1}{\beta} + b_1 e^{n_1 y} + b_2 e^{n_2 y}. \quad (3.72)$$

Do mesmo modo como anteriormente, as constantes  $b_1$  e  $b_2$  serão encontradas mediante aplicação das condições de contorno.

### 3.4.3.3 Fechamento do problema

Sintetizando-se os resultados das seções 3.4.3.2 e 3.4.3.1, o perfil de temperatura no reservatório pode ser escrito da seguinte maneira:

$$T(y, z) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} + a_1 (\sqrt{y^2 + z^2})^{m_1} + a_2 (\sqrt{y^2 + z^2})^{m_2} & \sqrt{y^2 + z^2} \in [0; h^*/2] \\ \frac{1}{\beta} + b_1 e^{n_1 y} + b_2 e^{n_2 y} & y \in (h^*/2; Y^*/2]; \\ \forall z \in [-h^*/2; h^*/2] \end{cases}$$

As constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são encontradas a partir da aplicação das condições de contorno do problema. Segundo Dawkrajai (2006), estas são dadas por:

1. Temperatura prescrita na fronteira externa do reservatório.

$$b_1 e^{n_1 y^*/2} + b_2 e^{n_2 y^*/2} = T_{ext}. \quad (3.73)$$

2. Função temperatura é contínua no ponto  $\sqrt{y^2 + z^2} = h^*/2$ :

$$a_1 (h/2)^{m_1} + a_2 (h/2)^{m_2} = b_1 e^{n_1 h/2} + b_2 e^{n_2 h/2}. \quad (3.74)$$

3. Derivada da função temperatura é contínua no ponto  $\sqrt{y^2 + z^2} = h^*/2$ :

$$a_1 m_1 (h/2)^{m_1-1} + a_2 m_2 (h/2)^{m_2-1} = b_1 n_1 e^{n_1 h/2} + b_2 n_2 e^{n_2 h/2}. \quad (3.75)$$

4. Fluxo de calor prescrito na interface poço/reservatório, isto é, no ponto  $\sqrt{y^2 + z^2} = r_{poço}$ . Considerando  $z = 0$ :

$$-(K_T)_{eq} \left[ a_1 m_1 r_{poço}^{m_1-1} + a_2 m_2 r_{poço}^{m_2-1} \right] = U_{total} \left( \frac{1}{\beta} + a_1 r_{poço}^{m_1} + a_2 r_{poço}^{m_2} - T_{poço} \right). \quad (3.76)$$

A solução do sistema linear composto pelas Equações 3.73 a 3.76 é dada por Dawkrajai (2006) e reproduzida no anexo A.

O parâmetro  $U_{total}$ , contido na condição de contorno 4, é chamado de coeficiente global de transferência de calor. Ele relaciona a transferência de calor por condução na

direção radial que ocorre na interface poço/reservatório com a diferença entre as temperaturas média do escoamento no poço e nessa interface. Em poços totalmente abertos, considera-se que tal coeficiente é nulo devido ao fato de haver entrada de massa lateral ao redor de todo o perímetro do poço. Em poços parcialmente abertos ou em regiões do poço fechadas ao influxo de massa proveniente do reservatório, o coeficiente global de transferência de calor é não nulo podendo ser calculado a partir da associação em série das resistências térmicas referentes a cada uma das camadas do poço ou então avaliado experimentalmente. Considera-se nesse trabalho que esse parâmetro é conhecido previamente à realização da simulação e portanto é tomado como um parâmetro de entrada

A título de ilustração do conceito e cálculo do coeficiente global de transferência de calor considera-se um poço que contém quatro camadas distintas, as quais são compostas pela parede do *tubing*; pela camada isolante do *tubing*; pelo espaço anular entre *tubing* e *casing*<sup>3</sup> e pela parede do *casing*. A Figura 9 ilustra tal exemplo, é importante observar que a configuração do poço considerada é genérica podendo variar conforme o tipo de completação empregada no poço.

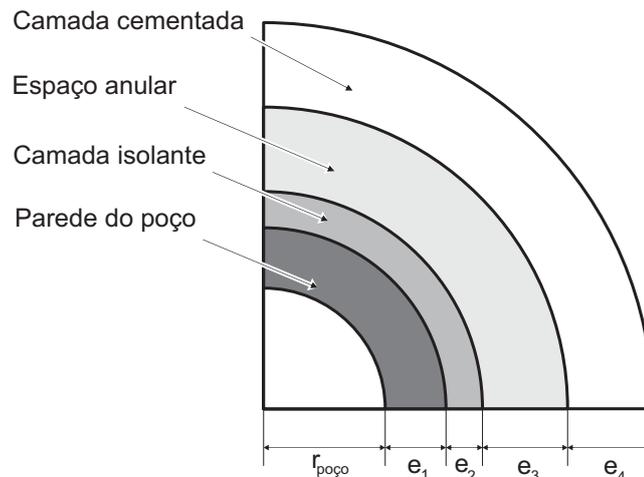


Figura 9 – Camadas radiais de um poço.

Em regime permanente, a taxa de transferência de energia térmica na direção radial é constante ao longo de cada uma das camadas do poço. Seja  $A$  a área superficial da última camada do poço,  $R_j$  a resistência à transferência de calor imposta pela camada  $j$ ,  $T_j$  a temperatura externa dessa camada e  $T_0$  a temperatura interna da primeira camada, a taxa de transferência de calor na direção radial  $q_r$  pode ser escrita conforme a Equação 3.77.

$$q_r = \frac{A(T_j - T_{j-1})}{R_j}. \quad (3.77)$$

<sup>3</sup> seção longa de dutos interconectados que realizam o isolamento entre poço e formação

Isolando-se a diferença entre as temperaturas nas camadas  $j$  e  $j-1$ , escrevendo-se a Equação 3.77 para cada uma das camadas e somando-se as equações obtidas, tem-se:

$$q_r = \frac{A(T_4 - T_0)}{\sum_{j=1}^4 R_j}. \quad (3.78)$$

O somatório de resistências térmicas em 3.78 pode ser visto como uma resistência térmica equivalente à transferência de calor entre as camadas 1 a 4. Assim, o coeficiente global de transferência de calor pode ser escrito conforme a Equação 3.79.

$$U_{total} = \frac{1}{\sum_{j=1}^4 R_j}; \quad (3.79)$$

esta última, por sua vez, pode ser reescrita como:

$$q_r = U_{total}A(T_4 - T_0). \quad (3.80)$$

## 4 Modelo de Escoamento no Poço

Tomando o escoamento que ocorre no poço, tem-se interesse em obter os perfis de pressão, temperatura e velocidade para o escoamento ao longo desse domínio. A obtenção de cada uma dessas variáveis se dará através da solução de um modelo matemático para o escoamento no poço. Nesse capítulo, tal modelo será deduzido de forma detalhada, evidenciando-se as hipóteses simplificativas empregadas ao longo do seu desenvolvimento.

Como realizado no capítulo 3, as equações para o caso de escoamento monofásico serão deduzidas inicialmente, logo após, as equações para o caso multifásico serão apresentadas fazendo-se uso das técnicas de média volumétrica apresentadas na seção 2.1. Considera-se que o escoamento ocorre em regime permanente no poço.

Assume-se que o poço considerado é horizontal e totalmente penetrante no reservatório. Como descrito no capítulo anterior, ele pode estar em contato com diferentes regiões de produção do reservatório e portanto apresentar escoamento multifásico.

O poço pode ser dividido em regiões as quais podem estar fechadas ao escoamento proveniente do reservatório ou então podem ser parcialmente ou totalmente abertas a tal escoamento de acordo com o tipo de completação, fator que influencia, essencialmente, na velocidade de entrada do fluido no poço. A variável  $\gamma$  mede a porcentagem de área aberta do poço através da relação entre as áreas superficial aberta e total do poço. A Figura 10 mostra uma representação simplificada do poço.

### 4.1 Conservação da Massa

Nessa seção será apresentada a dedução da equação da conservação da massa no poço para os casos de escoamento monofásico e multifásico.

#### 4.1.1 Escoamento monofásico

Na seção 3.1, deduziu-se a equação da conservação da massa para uma fase genérica  $\psi$  considerando-se escoamento em regime permanente. Escrevendo-se a Equação 3.6 em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_{\psi} V_{\psi_r} r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho_{\psi} V_{\psi_{\theta}}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{\psi} V_{\psi_x}) = 0. \quad (4.1)$$

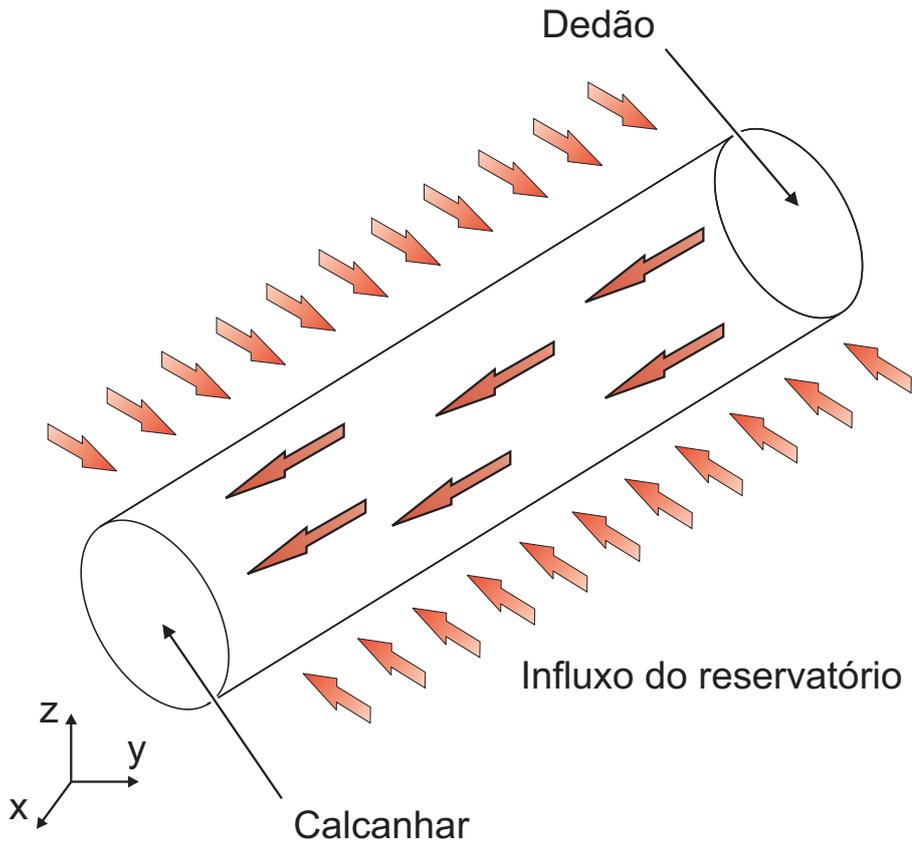


Figura 10 – Representação do poço.

Integrando-se a equação 4.1 ao longo da seção transversal do poço:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_{\psi} V_{\psi_r} r) r dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho_{\psi} V_{\psi_{\theta}}) r dr d\theta +$$
(4.2)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_{\psi} V_{\psi_x}) r dr d\theta = 0.$$

Resolvendo-se a primeira integral ao lado esquerdo da Equação 4.2, tem-se:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho_{\psi} V_{\psi_r} r) r dr d\theta = \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \rho_I V_I,$$
(4.3)

onde o subscrito  $I$  refere-se à condição na interface poço/reservatório. A integral ao longo da direção  $\theta$  é nula uma vez que os limites de integração nessa direção são 0 e  $2\pi$ . Considerando-se que a seção transversal do poço é constante ao longo da direção  $x$ ,

a Equação 4.2 pode ser reescrita como:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_\psi V_{\psi_x}) r dr d\theta = -\frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \rho_I V_I. \quad (4.4)$$

Aplicando-se o conceito da média extrínseca de superfície e considerando-se que a seção transversal do poço é constante ao longo de todo o seu comprimento, a equação 4.2 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \langle \rho_\psi V_{\psi_x} \rangle}{\partial x} = -\frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \rho_I V_I. \quad (4.5)$$

Como o escoamento é monofásico, a média extrínseca de superfície  $\langle \rho_\psi V_{\psi_x} \rangle$  pode ser reescrita, por conveniência, como  $\rho V_x$ , logo:

$$\frac{\partial (\rho V_x)}{\partial x} = -\frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \rho_I V_I. \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Escoamento multifásico

Pelo fato de apresentarem grandes extensões, os poços horizontais podem interceptar diversas zonas de produção dentro de um reservatório de petróleo, podendo haver recuperação mista de água, óleo ou gás, portanto é comum tais poços apresentarem escoamento multifásico. Nessa seção, a modelagem dessa condição de operação é discutida.

Seja  $V$ , o volume de controle multifásico que engloba as fases  $a$ ,  $o$  e  $g$ , representando respectivamente água, óleo e gás;  $A$  a superfície desse volume de controle;  $\psi$  fase arbitrária. Conforme deduzido na seção 3.1, a equação da continuidade em regime permanente para a fase  $\psi$  é dada por 3.6. Tomando-se a média volumétrica extrínseca dessa equação:

$$\langle \nabla \cdot \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \rangle = 0 \quad (4.7)$$

Por meio de 2.11, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\nabla \cdot \langle \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \rangle = -\frac{1}{V} \int_A \rho_\psi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (4.8)$$

em que o termo ao lado direito representa a transferência de massa entre a fase  $\psi$  e as demais fases do escoamento. Admitindo-se que esse termo é nulo e usando-se a Equação 2.6, obtém-se:

$$\nabla \cdot (\lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle \mathbf{V}_\psi \rangle^\psi + \langle \tilde{\rho}_\psi \tilde{\mathbf{V}}_\psi \rangle) = 0. \quad (4.9)$$

Desprezando-se o termo dispersivo:

$$\nabla \cdot (\lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle \mathbf{v}_\psi \rangle^\psi) = 0. \quad (4.10)$$

Conforme procedimento realizado na seção anterior, integrando-se a Equação 4.10 ao longo da seção transversal do poço e considerando-se que esta é constante ao longo da direção axial, a conservação da massa para a fase  $\psi$  pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_{x\psi} \rangle^\psi) = -\frac{2\gamma\delta_\psi}{r_{\text{poço}}} \rho_I V_I. \quad (4.11)$$

em que  $\delta_\psi$  é igual à unidade se a fase de influxo do reservatório para o poço for  $\psi$ . A Equação 4.11 é resolvida para cada uma das fases  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  com o intuito de se obter a velocidade média extrínseca, ou superficial, de cada uma delas.

Realizando-se o somatório da Equação 4.11 ao longo das diferentes fases do escoamento:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{\psi=1}^3 \lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_{x\psi} \rangle^\psi \right) = \sum_{\psi=1}^3 \frac{2\gamma\delta_\psi}{r_{\text{poço}}} \rho_I V_I. \quad (4.12)$$

O termo à esquerda da equação motiva a definição de uma fase hipotética chamada mistura, a qual engloba, possivelmente, as fases água, óleo e gás. A velocidade média da mistura,  $V_{mix}$ , e a densidade média da mistura,  $\rho_{mix}$ , podem ser escritas como:

$$\rho_{mix} = \sum_{\psi=1}^3 \lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi, \quad (4.13)$$

$$V_{mix} = \frac{1}{\rho_{mix}} \sum_{\psi=1}^3 \lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_{x\psi} \rangle^\psi. \quad (4.14)$$

Além disso, define-se a fase hipotética “líquido” responsável por englobar as fases  $\alpha$  e  $\beta$ . A velocidade e a densidade média da fase líquida são dadas da mesma maneira que 4.13 e 4.14, porém o limite superior do somatório, nesse caso, vale 2.

## 4.2 Cálculo do *Holdup*

O *holdup* ou fração volumétrica é um conceito que se aplica a escoamentos multifásicos. Conforme definido na equação 2.1, ele mede a relação entre o volume ocupado por uma fase sobre o volume total de uma porção elementar representativa do escoamento multifásico. O presente trabalho segue a metodologia proposta por Yoshioka (2007) e Dawkrajai (2006), a qual é descrita detalhadamente por Ouyang e Aziz (1996) para o cálculo dessa quantidade.

Devido à diferença entre as viscosidades e densidades das fases água e óleo em relação à fase gás, espera-se que esta última escoe no poço com maiores velocidades. Assim, um modelo simples do tipo *drift-flux* é empregado para considerar o escorregamento entre essas fases.

Seja liq, índice referente à fase líquida dada pela mistura entre as fases água e óleo. Segundo o modelo *drift-flux*, a velocidade intrínseca, também chamada de velocidade real, da fase gás  $\langle V_g \rangle^g$  é dada por<sup>1</sup>:

$$\langle V_g \rangle^g = C_0 (\langle V_a \rangle + \langle V_o \rangle + \langle V_g \rangle) + U_0, \quad (4.15)$$

em que  $C_0$  é uma constante de distribuição relacionada ao perfil de velocidade. A medida que a velocidade cresce, seu perfil se torna mais uniforme e  $C_0$  se aproxima da unidade.  $U_0$  é a velocidade das bolhas de gás em relação à velocidade média do líquido. Ambos parâmetros são funções das propriedades dos fluidos presentes no escoamento e também do padrão do escoamento multifásico no poço, no entanto, segundo [Ouyang e Aziz \(1996\)](#), considera-se que para todo padrão de escoamento, tais parâmetros são dados por:

$$C_0 = 1.2 - 0.2 \left( \frac{\rho_g}{\rho_{liq}} \right)^{0.5}; \quad (4.16)$$

$$U_0 = 1.53 \left[ \frac{g (\rho_{liq} - \rho_g) \sigma}{\rho_{liq}^2} \right]^{0.25}. \quad (4.17)$$

Assim, a fração volumétrica das fases gás e líquida são calculadas por:

$$\lambda_g = \frac{\langle V_g \rangle}{\langle V_g \rangle^g}; \quad (4.18)$$

$$\lambda_{liq} = 1 - \lambda_g. \quad (4.19)$$

Por sua vez, as frações volumétricas referentes às fases *a* e *o* são calculadas admitindo que não há escorregamento entre tais fases. Desse modo, o *holdup* pode ser calculado facilmente a partir das velocidades superficiais de cada uma das fases conforme definido a seguir:

$$\lambda_a = \left( \frac{\langle V_a \rangle}{\langle V_a \rangle + \langle V_o \rangle} \right) \lambda_{liq}; \quad (4.20)$$

$$\lambda_o = \left( \frac{\langle V_o \rangle}{\langle V_a \rangle + \langle V_o \rangle} \right) \lambda_{liq}. \quad (4.21)$$

<sup>1</sup> Note que ao lado direito da equação 4.15 tem-se as velocidades extrínsecas ou superficiais das fases  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$

### 4.3 Conservação da Quantidade de Movimento

Usualmente, a queda de pressão ao longo de poços horizontais é desprezada em simuladores de reservatórios comerciais. No entanto, a grande extensão desses poços pode fazer com que a perda de carga devido ao atrito do fluido com a parede do poço seja significativa. Além disso, o fluido que entra lateralmente no poço apresenta velocidade praticamente nula na direção do poço, devendo portanto ser acelerado para que possa escoar, esse fato contribui para a diminuição da pressão ao longo do escoamento. Assim, faz-se necessário um modelo de queda de pressão que considere tais efeitos, isto é discutido nessa seção.

A equação da conservação da quantidade de movimento é empregada no cálculo da queda de pressão no poço. Em síntese, a variação de pressão no poço é promovida por três tipos de forças:

1. Força de atrito entre o fluido e a parede do poço;
2. Força gravitacional;
3. Força de aceleração do fluido.

O cálculo de cada uma dessas componentes é realizado de acordo com o número de fases e o tipo de fluido presentes no escoamento. É importante lembrar que se considera que o poço é dividido em diferentes regiões de entrada de massa, sendo que cada uma delas recebe um único tipo de fluido do reservatório. A seguir, serão apresentados os modelos para a queda de pressão no poço de acordo com cada um dos casos possíveis de escoamento.

#### 4.3.1 Escoamento monofásico de água ou óleo

A segunda lei de *Newton* estabelece que, dado um referencial inercial, a taxa de variação da quantidade de movimento para um sistema fechado é igual ao somatório de todas as forças externas que atuam nesse sistema (FAGHRI, 2006). Seja  $V$  a velocidade com que o sistema se movimenta, esta lei pode ser expressa por:

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \left[ \frac{d(\rho V)}{dt} \right]_{sistema} . \quad (4.22)$$

Considera-se um volume de controle estacionário no espaço e tempo através do qual há um escoamento de uma só fase líquida  $\psi$ , podendo ser esta uma fase aquosa ou oleica. Como este é um sistema aberto, a segunda lei de *Newton* pode ser reescrita para

tal região conforme o teorema do transporte de Reynolds (BEJAN, 2013):

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_\psi \mathbf{V}_\psi dV + \int_S \rho_\psi \mathbf{V}_\psi (\mathbf{V}_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi) dV. \quad (4.23)$$

Admitindo-se regime permanente e tomando-se a componente  $x$  da equação vetorial 4.23, é possível escrever:

$$F_x = \int_S \rho_\psi V_{x\psi} (\mathbf{V}_\psi \cdot \mathbf{n}_\psi) dA. \quad (4.24)$$

$F_x$  é a força resultante que age no volume de controle na direção axial e  $V_{x\psi}$ , a velocidade média do fluido nessa mesma direção, a Figura 11 ilustra as forças externas que agem em um volume de controle no poço.

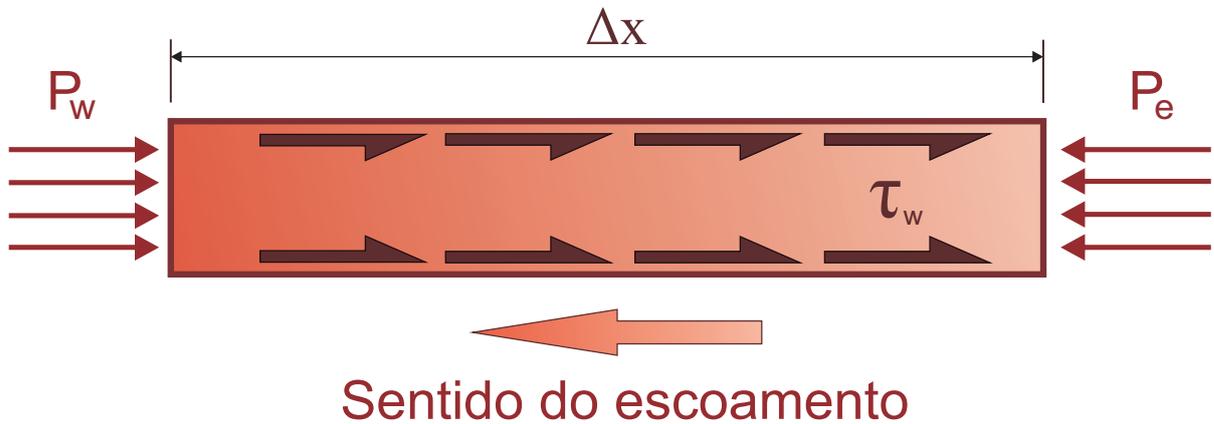


Figura 11 – Balanço de força para um volume de controle no poço.

Suprimindo-se, por conveniência, o subscrito referente à fase do escoamento  $\psi$  e admitindo-se que  $F_x$  é composta pelas forças de atrito, gravidade e pressão do fluido, a Equação 4.24 se resume a:

$$P_w A - P_e A - \tau_w P \Delta x - \rho g \sin \theta = -V_w \dot{m}_w + V_e \dot{m}_e, \quad (4.25)$$

a qual pode ser reescrita como:

$$\frac{P_e - P_w}{\Delta l} = \left( \frac{\Delta P}{\Delta l} \right)_f + \left( \frac{\Delta P}{\Delta l} \right)_{grav} + \left( \frac{\Delta P}{\Delta l} \right)_{acc}, \quad (4.26)$$

onde:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_f = -\frac{2\tau_w}{r_w}; \quad (4.27)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{grav} = -\rho g \sin \theta; \quad (4.28)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{acc} = -u_w \dot{m}_w + u_e \dot{m}_e. \quad (4.29)$$

A tensão na parede, presente no cálculo da queda de pressão por atrito 4.27, é dada por:

$$\tau_w = \frac{f_w \rho V^2}{2}, \quad (4.30)$$

onde  $f_w$  é o fator de atrito de *fanning* corrigido para escoamento em poços. Este parâmetro adimensional é função do regime de escoamento no poço e da rugosidade relativa de sua parede. É denominado corrigido pelo fato de considerar a influência da entrada de massa lateral no poço sobre o fator de atrito de *fanning* convencional,  $f_0$ . O parâmetro em questão é determinado a partir das correlações propostas por [Ouyang e Aziz \(1996\)](#) expostas a seguir:

$$f_w = \begin{cases} f_0 (1.0 + 0.04304 Re_I^{0.6142}). & \text{Regime laminar.} \\ f_0 (1.0 - 0.0153 Re_I^{0.3978}). & \text{Regime turbulento, poço cementado.} \\ f_0 \left(1.0 - 29.03 \left(\frac{Re_I}{Re}\right)^{0.8003}\right). & \text{Regime turbulento, poço aberto.} \end{cases}$$

Em que  $Re$  é o número de Reynolds relativo ao escoamento no poço, enquanto  $Re_I$  é relativo ao fluido que entra lateralmente no poço. Estes são calculados por:

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}; \quad (4.31)$$

$$Re_I = \frac{\rho_I V_I D}{\mu_I}, \quad (4.32)$$

onde 'I' refere-se à condição na interface poço/reservatório. O fator de atrito de *fanning* convencional é calculado conforme recomendado em [Hasan e Kabir \(2002\)](#), através das seguintes equações:

- Escoamento laminar,  $Re \leq 2300$ :

$$f_0 = 16/Re. \quad (4.33)$$

- Escoamento de transição,  $2300 < Re \leq 4000$ :

$$f_0 = f_{lam} + \frac{Re - 2300}{4000 - 2300} (f_{turb} - f_{lam}). \quad (4.34)$$

- Escoamento turbulento,  $Re > 4000$ :

$$\Lambda = \frac{(\epsilon/d)^{1.1098}}{2.8257} + \left(\frac{7.149}{Re}\right)^{0.8981}; \quad (4.35)$$

$$f_0 = \frac{1.0}{\left[4.0 \log \left( \frac{\epsilon/d}{3.7065} - \frac{5.0452}{Re} \log \Lambda \right)\right]^{2.0}}. \quad (4.36)$$

De acordo com [Hasan e Kabir \(2002\)](#), valores típicos para a rugosidade relativa da parede do poço giram em torno de  $6 \times 10^{-4}$ . De acordo com o diagrama de *Moody*, se o regime de escoamento no poço for turbulento, o coeficiente de atrito de *fanning* convencional depende fundamentalmente da rugosidade relativa, assumindo valor da ordem de  $5 \times 10^{-3}$ . Caso o escoamento seja a baixas velocidades, ou seja, laminar, o fator de atrito é maior que o caso anterior sendo da ordem de  $1 \times 10^{-2}$ .

### 4.3.2 Escoamento monofásico de gás

Para o caso de escoamento monofásico de gás, o termo de queda de pressão referente a efeitos de aceleração é calculado de forma distinta de [4.29](#). De acordo com [Ouyang e Aziz \(1996\)](#), tem-se:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{acc} = \left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aW} + \left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aE}, \quad (4.37)$$

em que, o primeiro termo refere-se à queda de pressão imposta pelo fluido que entra lateralmente no poço, enquanto, o segundo termo refere-se à queda de pressão causada pela expansão do fluido. Estes termos podem ser escritos como:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aW} = -\frac{2\rho V}{\pi r_w^2}; \quad (4.38)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aE} = \frac{\beta_{aE}}{1 - \beta_{aE}} \left[ -\frac{2\tau_w}{r_w} - \rho g \sin \theta + \left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aW} \right], \quad (4.39)$$

$\beta_{aE}$  é o coeficiente de expansão, o qual é calculado através da Equação [4.40](#):

$$\beta_{aE} = \frac{\rho V^2}{P}, \quad (4.40)$$

em que  $P$  é a pressão do fluido.

### 4.3.3 Escoamento bifásico água-óleo

Para o caso de escoamento bifásico no poço, a queda de pressão é calculada da mesma maneira como apresentado na Equação 4.26. No entanto, cada uma das propriedades dos fluidos empregadas nas Equações 4.27 a 4.29 referem-se à fase líquida, composta pela mistura entre as fases água e óleo. Assim, tais equações são reescritas da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_f = -\frac{f_{liq}\rho_{liq}V_{liq}^2}{r_w}; \quad (4.41)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{grav} = -\rho_{liq}g \sin \theta; \quad (4.42)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{acc} = -(V_w\dot{m}_w)_{liq} + (V_e\dot{m}_e)_{liq}, \quad (4.43)$$

onde as propriedades da fase líquida e as demais variáveis empregadas nessas equações são dadas por:

$$\rho_{liq} = \lambda_w\rho_w + \lambda_o\rho_o; \quad (4.44)$$

$$\mu_{liq} = \lambda_w\mu_w + \lambda_o\mu_o; \quad (4.45)$$

$$V_{liq} = (\rho_w V_w + \rho_o V_o) / \rho_{liq}; \quad (4.46)$$

$$\dot{m}_{liq} = \dot{m}_w + \dot{m}_o; \quad (4.47)$$

$$f_{liq} = f(Re_{liq}, Re_f). \quad (4.48)$$

### 4.3.4 Escoamento multifásico

Por último, aborda-se o caso de escoamento multifásico com presença de gás. De modo semelhante ao caso anterior, define-se uma fase hipotética denominada mistura cujas propriedades serão utilizadas no cálculo da queda de pressão através da Equação 4.26. Reescrevendo-se as Equações 4.27 a 4.29:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_f = -\frac{f_{mix}\rho_{mix}V_{mix}^2}{r_w}; \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{grav} = -\rho_{mix}g \sin \theta; \quad (4.50)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{acc} = \left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aW} + \left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aE}, \quad (4.51)$$

onde as propriedades da fase mistura e as demais variáveis empregadas nessas equações são dadas por:

$$\rho_{mix} = \lambda_{liq}\rho_{liq} + \lambda_g\rho_g; \quad (4.52)$$

$$\mu_{mix} = \lambda_{liq}\mu_{liq} + \lambda_g\mu_g; \quad (4.53)$$

$$V_{mix} = (\rho_{liq}V_{liq} + \rho_gV_g) / \rho_{mix}; \quad (4.54)$$

$$\dot{m}_{mix} = \dot{m}_{liq} + \dot{m}_g; \quad (4.55)$$

$$f_{mix} = f(Re_{mix}). \quad (4.56)$$

Os termos que compõem a queda de pressão por efeitos de aceleração são ligeiramente diferentes em relação ao caso de escoamento monofásico de gás conforme especificados a seguir:

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aW} = -\frac{\rho q_I}{\pi r_w^2 \Delta l} [\omega (V_{liq}\lambda_{liq} + V_g\lambda_g) + (2 - \omega)V_{mix}]; \quad (4.57)$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aE} = \frac{\beta_{aE}}{1 - \beta_{aE}} \left[ -\frac{2\tau_w}{r_w} - \rho g \sin \theta + \left(\frac{\Delta P}{\Delta l}\right)_{aW} \right], \quad (4.58)$$

em que  $\omega$  é um fator de correção determinado através de dados experimentais, segundo [Ouyang e Aziz \(1996\)](#), seu valor ótimo é 0.8, enquanto  $q_I$  é a vazão volumétrica do fluido que entra no poço por unidade de comprimento.

## 4.4 Conservação da Energia total

Apresenta-se aqui a dedução da equação de conservação da energia total para o escoamento no poço. Primeiramente, a expressão para o caso de escoamento monofásico no poço é obtida e, logo após, apresenta-se a expressão para o caso de escoamento multifásico. Ambas deduções iniciam-se retomando a Equação 3.31 que representa a conservação da energia total em um volume de controle arbitrário para um fase genérica  $\psi$  e se procedem com a aplicação de procedimentos de média sobre as propriedades do escoamento ao longo da seção transversal do poço.

### 4.4.1 Escoamento monofásico

Na seção 3.4, deduziu-se, entre outros resultados, a equação da conservação da energia total no formato diferencial referente a uma fase arbitrária  $\psi$ . Esta foi enunciada na Equação 3.31 sem o emprego de nenhuma hipótese a respeito do seu domínio de validade, portanto, é possível aplicá-la para o escoamento livre que ocorre no poço.

Considerando-se que os termos referentes à potência mecânica dissipada através das forças viscosas e a potência referente ao trabalho das forças de corpo são nulos, a

Equação 3.31 pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\psi'' + q''' - \nabla \cdot (P_\psi \mathbf{V}_\psi). \quad (4.59)$$

Multiplicando-se e dividindo-se o termo  $(P_\psi \mathbf{V}_\psi)$  por  $\rho_\psi$  e empregando-se a definição da propriedade termodinâmica entalpia,  $h_\psi = i_\psi + P_\psi / \rho_\psi$ , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho_\psi \left( i_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \left( h_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\psi'' + q'''. \quad (4.60)$$

Admite-se que o escoamento no poço se dá em regime permanente, o termo de acumulação de energia é anulado. Além disso, admite-se que não há reações químicas ou qualquer outra fonte ou sumidouro de calor para o escoamento, logo:

$$\nabla \cdot \left[ \rho_\psi \mathbf{V}_\psi \left( h_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q}_\psi''. \quad (4.61)$$

Escrevendo-se a Equação 4.61 em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \rho_\psi V_{\psi r} r \left( h_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \rho_\psi V_{\psi \theta} \left( h_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_\psi V_{\psi x} \left( h_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (q_r'' r) + \frac{1}{r} \frac{\partial q_\theta''}{\partial \theta} + \frac{\partial q_x''}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Integrando-se a equação diferencial 4.62 ao longo da seção transversal do poço, obtém-se:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_\psi V_{\psi x} \left( h_\psi + \frac{|\mathbf{V}_\psi|^2}{2} \right) \right] r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} \left( \frac{\partial q_x''}{\partial x} \right) r dr d\theta + \quad (4.63)$$

$$2\pi \gamma r_{\text{poço}} \left[ \rho_\psi V_{\psi I} \left( h_{\psi I} + \frac{V_{\psi I}^2}{2} \right) \right] + 2\pi (1 - \gamma) r_{\text{poço}} q_I'',$$

em que o subscrito “I” refere-se à condição de entrada no poço,  $r = r_{\text{poço}}$ . Considera-se aqui que a transferência de calor por condução é desprezível na superfície do poço aberta ao escoamento proveniente do reservatório, por isso verifica-se o termo  $(1 - \gamma)$

multiplicando o fluxo de calor por condução na direção radial avaliado na interface poço/reservatório.

O segundo termo ao lado direito da Equação 4.63 representa a energia carregada pelo fluxo de massa que entra no poço por unidade de comprimento do poço. Como a área superficial do poço aberta ao escoamento é dada pela sua área superficial total multiplicada pelo fator  $\gamma$ , essa quantia deve aparecer multiplicando o perímetro do poço  $2\pi r_{\text{poço}}$  em tal termo.

Admitindo-se que a seção transversal do poço é constante ao longo da direção axial, a Equação 4.63 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} \rho_{\psi} V_{\psi x} \left( h_{\psi} + \frac{|V_{\psi}|^2}{2} \right) r dr d\theta \right] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{r_{\text{poço}}} q''_x r dr d\theta \right] + \\ &2\pi\gamma r_{\text{poço}} \left[ \rho_{\psi} V_{\psi I} \left( h_{\psi I} + \frac{V_{\psi I}^2}{2} \right) \right] + 2\pi(1-\gamma) r_{\text{poço}} q''_I. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Dividindo-se a expressão 4.64 por  $\pi r_{\text{poço}}^2$ , obtém-se a equação da conservação da energia total média ao longo da seção transversal do poço, em que se desconsidera a distribuição das variáveis do escoamento ao longo das direções radial e angular:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left\langle \rho_{\psi} V_{\psi x} \left( h_{\psi} + \frac{V_{\psi}^2}{2} \right) \right\rangle \right] = \frac{\partial \langle q''_x \rangle}{\partial x} + \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left[ \rho_{\psi I} V_{\psi I} \left( h_{\psi I} + \frac{V_{\psi I}^2}{2} \right) \right] + \frac{2(1-\gamma) q''_I}{r_{\text{poço}}}. \quad (4.65)$$

Admitindo-se que o número de *Peclét* referente à transferência de calor axial é elevado a ponto de ser desprezível a condução de calor nessa direção, obtém-se a Equação 4.66:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left\langle \rho_{\psi} V_{\psi x} \left( h_{\psi} + \frac{V_{\psi}^2}{2} \right) \right\rangle \right] = \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left[ \rho_{\psi I} V_{\psi I} \left( h_{\psi I} + \frac{V_{\psi I}^2}{2} \right) \right] + \frac{2(1-\gamma) q''_I}{r_{\text{poço}}}, \quad (4.66)$$

a qual pode ser expandida de acordo com a equação 2.8. Desconsiderando-se os termos dispersivos e admitindo-se que a ordem de grandeza da velocidade axial é suficientemente superior àquelas das velocidades angular e radial, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_{\psi} \langle \rho_{\psi} \rangle^{\psi} \langle V_{\psi x} \rangle^{\psi} \left( \langle h_{\psi} \rangle^{\psi} + \frac{\langle V_{\psi x}^2 \rangle^{\psi}}{2} \right) \right] = \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left[ \rho_{\psi I} V_{\psi I} \left( h_{\psi I} + \frac{V_{\psi I}^2}{2} \right) \right] + \frac{2(1-\gamma) q''_I}{r_{\text{poço}}}. \quad (4.67)$$

Como o escoamento é de uma só fase, a fração volumétrica  $\lambda_{\psi}$  é igual à unidade,

o que conduz a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_{\psi x} \rangle^\psi \left( \langle h_\psi \rangle^\psi + \frac{\langle V_{\psi x}^2 \rangle^\psi}{2} \right) \right] = \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left[ \rho_{\psi I} V_{\psi I} \left( h_{\psi I} + \frac{V_{\psi I}^2}{2} \right) \right] + \frac{2(1-\gamma)q_I''}{r_{\text{poço}}}. \quad (4.68)$$

O fluxo de calor por condução através da seção transversal do poço,  $q_I''$ , é modelado da seguinte maneira:

$$q_I'' = U_{\text{total}} (T_I - \langle T_\psi \rangle^\psi), \quad (4.69)$$

onde  $\langle T_\psi \rangle^\psi$  é a temperatura média, referente à fase  $\psi$ , ao longo da seção transversal do poço, enquanto,  $U_{\text{total}}$  é o coeficiente de transferência de calor global discutido na seção 3.4.3. Logo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_{\psi x} \rangle^\psi \left( \langle h_\psi \rangle^\psi + \frac{\langle V_{\psi x}^2 \rangle^\psi}{2} \right) \right] = \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left[ \rho_{\psi I} V_{\psi I} \left( h_{\psi I} + \frac{V_{\psi I}^2}{2} \right) \right] + \quad (4.70)$$

$$\left[ \frac{2(1-\gamma)}{r_{\text{poço}}} \right] U_{\text{total}} (T_I - \langle T_\psi \rangle^\psi).$$

Suprimindo-se, por conveniência, os índices  $\psi$  das variáveis do escoamento, a expressão final para a conservação da energia total no poço admitindo-se escoamento monofásico é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \langle \rho \rangle \langle V_x \rangle \left( \langle h \rangle + \frac{\langle V_x^2 \rangle}{2} \right) \right] = \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left[ \rho_I V_I \left( h_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \right] + \frac{2(1-\gamma)}{r_{\text{poço}}} U_{\text{total}} (T_I - \langle T \rangle). \quad (4.71)$$

É importante notar que a equação para conservação da energia total deduzida no presente trabalho tem como variável primária a entalpia, enquanto a equação utilizada por Dawkrajai (2006) tem como variável primária a temperatura conforme apresentada a seguir:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{(\beta T - 1)}{\rho c_p} \frac{dP}{dx} + \frac{2}{r_{\text{poço}} \rho V_x} \left( \gamma \rho_I V_I + \frac{1-\gamma}{c_p} U_{\text{total}} \right) (T_I - T) + \quad (4.72)$$

$$\frac{1}{\rho V_x c_p} \left\{ \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left( \frac{\rho_I V_I^2}{2} \right) V_I - \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{\rho V_x^2}{2} \right) V_x \right] \right\}.$$

A partir das relações B.15 e B.14, é possível reescrever a formulação em tempe-

ratura da Equação 4.72 conforme:

$$\rho V_x \left( \frac{\partial h}{\partial T} \frac{dT}{dx} + \frac{\partial h}{\partial P} \frac{dP}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{\rho V_x^2}{2} \right) V_x \right] =$$

$$\left( \frac{2\gamma \rho_I V_I}{r_{\text{poço}}} \right) \left[ \frac{\partial h}{\partial T} (T_I - T) + \frac{V_I^2}{2} \right] + \frac{2(1-\gamma)}{r_{\text{poço}}} U_{\text{total}} (T_I - T). \quad (4.73)$$

Considerando-se que a pressão na interface poço/reservatório é idêntica à pressão média ao longo da seção transversal do poço e usando-se a definição da entalpia 3.39, a Equação 4.73 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\rho V_x \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{\rho V_x^2}{2} \right) V_x \right] = \left( \frac{2\gamma \rho_I V_I}{r_{\text{poço}}} \right) \left( \frac{\partial h}{\partial T} (T_I - T) + \frac{V_I^2}{2} \right) + \frac{2(1-\gamma)}{r_{\text{poço}}} U_{\text{total}} (T_I - T). \quad (4.74)$$

Considerando que a derivada da entalpia com relação à temperatura é constante e admitindo-se que a diferença entre a pressão média do escoamento na interface poço/reservatório e a pressão média do escoamento ao longo do poço é desprezível, pode-se escrever que:

$$\rho V_x \frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \left[ \left( \frac{\rho V_x^2}{2} \right) V_x \right] = \left( \frac{2\gamma \rho_I V_I}{r_{\text{poço}}} \right) \left( h_I - h + \frac{V_I^2}{2} \right) + \frac{2(1-\gamma)}{r_{\text{poço}}} U_{\text{total}} (T_I - T). \quad (4.75)$$

Por meio da conservação da massa 4.12 e da regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{d}{dx} \left[ \rho V_x \left( h + \frac{V_x^2}{2} \right) \right] = \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left[ \rho_I V_I \left( h_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \right] + \frac{2(1-\gamma)}{r_{\text{poço}}} U_{\text{total}} (T_I - T). \quad (4.76)$$

Note que a Equação 4.76 é idêntica à desenvolvida no presente trabalho, portanto, os modelos matemáticos para a conservação da energia térmica empregados no presente trabalho e por Dawkrajai (2006) são equivalentes, conduzindo à mesma solução para o problema de transferência de calor ao longo do poço.

#### 4.4.2 Escoamento multifásico

Seja  $\Gamma$  o número de fases que escoam no poço,  $\Gamma$  poderá assumir o valor 2 para os casos de escoamento água/óleo, óleo/gás e água/gás, ou então 3 para o caso de escoamento água/óleo/gás. Assumindo-se que não há transferência de massa e troca de calor entre as fases, é possível empregar a Equação 4.66 para descrever a conservação da energia total de cada uma das fases. Realizando-se o somatório dessas equações sobre o número total de fases, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \left\langle \rho_{\psi} V_{\psi x} \left( h_{\psi} + \frac{V_{\psi}^2}{2} \right) \right\rangle \right] = \frac{2\gamma}{r_{\text{poço}}} \left[ \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \rho_{\psi I} V_{\psi I} \left( h_{\psi I} + \frac{V_{\psi I}^2}{2} \right) \right] + \frac{2(1-\gamma) q_I''}{r_{\text{poço}}}, \quad (4.77)$$

Como o escoamento no reservatório que ocorre em cada uma de suas seções transversais é monofásico, o somatório à direita da Equação 4.77 reduz-se apenas ao termo referente à fase de influxo do reservatório para o poço na posição  $x$ .

Como o modelo homogêneo é empregado, necessita-se definir a energia da fase mistura. Retomando os conceitos de densidade média do escoamento e de velocidade da mistura dadas pelas Equações 4.13 e 4.14, a energia da mistura é definida da seguinte maneira:

$$e_{mix} = h_{mix} + \frac{V_{mix}^2}{2} = \frac{1}{\rho_{mix} V_{mix}} \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \left\langle \rho_{\psi} V_{\psi x} \left( h_{\psi} + \frac{V_{\psi}^2}{2} \right) \right\rangle, \quad (4.78)$$

Chamando de  $\psi$  a fase de influxo, a equação da conservação da energia total para escoamento multifásico no poço é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_{mix} V_{mix} \left( h_{mix} + \frac{V_{mix}^2}{2} \right) \right) = \frac{2\gamma}{r_{poço}} \left[ \rho_{\psi_I} V_{\psi_I} \left( h_{\psi_I} + \frac{V_{\psi_I}^2}{2} \right) \right] + \frac{2(1-\gamma)q_I''}{r_{poço}}, \quad (4.79)$$

em que  $q_I''$  é dado de forma semelhante à Equação 4.69 conforme:

$$q_I'' = U_{total} (T_I - \langle T \rangle), \quad (4.80)$$

## 4.5 Cálculo da temperatura

Conforme descrito na seção 4.4, a variável primária da equação da conservação da energia total é a entalpia, enquanto, de acordo com a seção 4.3, a variável primária da equação da conservação da quantidade de movimento é a pressão. Sabe-se que a temperatura, assim como pressão e entalpia, é uma propriedade termodinâmica. Como duas propriedades termodinâmicas são suficientes para se determinar um estado termodinâmico, é possível expressar a temperatura em função da pressão e entalpia, tal estratégia é empregada para o cálculo da temperatura ao longo do poço. A seguir, apresentam-se as equações utilizadas para o cálculo da temperatura nos casos de escoamento monofásico e multifásico.

### 4.5.1 Escoamento monofásico

Escrevendo-se a Equação 3.39 ao longo da direção axial do poço:

$$\frac{dh_{\psi}}{dx} = \frac{\partial h_{\psi}}{\partial P} \frac{dP_{\psi}}{dx} + \frac{\partial h_{\psi}}{\partial T} \frac{dT_{\psi}}{dx}. \quad (4.81)$$

Através das relações B.15 e B.14 e da definição do coeficiente de *Joule-Thomson*:

$$\frac{dh_{\psi}}{dx} = c_{p\psi} \frac{dT_{\psi}}{dx} - c_{p\psi} C_{J\psi} \frac{dP_{\psi}}{dx}. \quad (4.82)$$

Integrando-se 4.82 ao longo da seção transversal do poço e usando-se o conceito de média superficial:

$$\frac{d\langle h_\psi \rangle}{dx} = \langle c_{p\psi} \rangle \frac{d\langle T_\psi \rangle}{dx} - \langle c_{p\psi} \rangle \langle C_{J\psi} \rangle \frac{d\langle P_\psi \rangle}{dx}. \quad (4.83)$$

Omitindo-se, por conveniência, o índice  $\psi$  das variáveis da Equação 4.83, uma vez que o escoamento é monofásico, a equação empregada para o cálculo da temperatura pode ser escrita por:

$$\frac{d\langle T \rangle}{dx} = \frac{1}{\langle c_p \rangle} \frac{d\langle h \rangle}{dx} + \langle C_J \rangle \frac{d\langle P \rangle}{dx}. \quad (4.84)$$

#### 4.5.2 Escoamento multifásico

Tomando-se o produto da Equação 4.82 por  $\rho_\psi V_\psi$ , em que o subscrito  $x$  da velocidade da fase  $\psi$  na direção axial,  $V_{x\psi}$ , é omitido por conveniência, obtém-se:

$$\rho_\psi V_\psi \frac{dh_\psi}{dx} = \rho_\psi V_\psi c_{p\psi} \frac{dT_\psi}{dx} - \rho_\psi V_\psi c_{p\psi} C_{J\psi} \frac{dP_\psi}{dx}. \quad (4.85)$$

Integrando-se a Equação 4.85 ao longo da seção transversal do poço e considerando-se que os termos dispersivos referentes à media aplicada são desprezíveis, tem-se:

$$\begin{aligned} \lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_\psi \rangle^\psi \frac{d\langle h_\psi \rangle^\psi}{dx} &= \lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_\psi \rangle^\psi \langle c_{p\psi} \rangle^\psi \frac{d\langle T_\psi \rangle^\psi}{dx} - \\ &\lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_\psi \rangle^\psi \langle c_{p\psi} \rangle^\psi \langle C_{J\psi} \rangle^\psi \frac{d\langle P_\psi \rangle^\psi}{dx}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Somando-se as Equações 4.86 para cada uma das  $\Gamma$  fases do escoamento e considerando-se que a pressão e a temperatura são as mesmas para cada uma delas, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_\psi \rangle^\psi \frac{d\langle h_\psi \rangle^\psi}{dx} &= \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \left[ \lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_\psi \rangle^\psi \langle c_{p\psi} \rangle^\psi \right] \frac{d\langle T \rangle}{dx} - \\ &\sum_{\psi=1}^{\Gamma} \left[ \lambda_\psi \langle \rho_\psi \rangle^\psi \langle V_\psi \rangle^\psi \langle c_{p\psi} \rangle^\psi \langle C_{J\psi} \rangle^\psi \right] \frac{d\langle P \rangle}{dx}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Logo, a expressão empregada para o cálculo da temperatura em escoamentos multifásicos no poço pode ser escrita como:

$$\frac{d\langle T \rangle}{dx} = \frac{1}{c_{p\text{mix}}} \frac{dh_{\text{mix}}}{dx} + C_{J\text{mix}} \frac{d\langle P \rangle}{dx}, \quad (4.88)$$

em que:

$$\frac{dh_{mix}}{dx} = \frac{1}{\rho_{mix} V_{mix}} \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \lambda_{\psi} \langle \rho_{\psi} \rangle^{\psi} \langle V_{\psi} \rangle^{\psi} \frac{d \langle h_{\psi} \rangle^{\psi}}{dx}; \quad (4.89)$$

$$c_{p_{mix}} = \frac{1}{\rho_{mix} V_{mix}} \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \lambda_{\psi} \langle \rho_{\psi} \rangle^{\psi} \langle V_{\psi} \rangle^{\psi} \langle c_{p_{\psi}} \rangle^{\psi}; \quad (4.90)$$

$$C_{J_{mix}} = \frac{1}{\rho_{mix} V_{mix} c_{p_{mix}}} \sum_{\psi=1}^{\Gamma} \lambda_{\psi} \langle \rho_{\psi} \rangle^{\psi} \langle V_{\psi} \rangle^{\psi} \langle c_{p_{\psi}} \rangle^{\psi} \langle C_{J_{\psi}} \rangle^{\psi}. \quad (4.91)$$

## 5 Formulação Numérica

Nos capítulos 3 e 4, os modelos matemáticos para o escoamento no reservatório e no poço, respectivamente, foram deduzidos.

No caso do reservatório, as equações da conservação da quantidade de movimento e da continuidade são manipuladas levando à obtenção da equação da difusividade hidráulica, cuja solução é obtida pela técnica de mapeamento conforme e aproximada com precisão suficiente a partir do modelo proposto por [Furui, Zhu e Hill \(2002\)](#). Além disso, a equação da conservação da energia térmica no domínio do reservatório é resolvida, também, analiticamente conforme exposto em 3.4.3.

Com relação ao poço, as equações do transporte são todas resolvidas numericamente pelo método dos volumes finitos ([MALISKA, 2004](#)). Como o problema físico de escoamento no poço é dominado por efeitos advectivos, emprega-se o esquema de interpolação *upwind*. A malha construída é unidimensional e espaçada de acordo com as diferentes regiões de entrada de fluido ao longo do poço.

É importante notar que, devido aos fatos de que as equações que compõem o modelo matemático do escoamento no poço são diferenciais de primeira ordem e o esquema de interpolação empregado para sua resolução é o *upwind*, é possível resolvê-las numericamente através de um procedimento de marcha.

A Figura 12 ilustra o esquema de armazenamento das variáveis do escoamento.

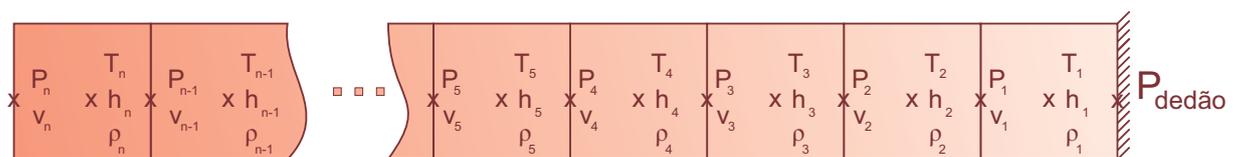


Figura 12 – Esquema de armazenamento das variáveis do escoamento no poço

Considera-se que a extremidade posterior do poço, usualmente chamada de “dedão” é fechada ao escoamento do reservatório e portanto os termos referentes aos fluxos de massa e energia nessa posição são nulos. A pressão, variável primária da equação da conservação da quantidade de movimento, é prescrita nessa mesma posição. A seguir, todas as variáveis do escoamento são calculadas a partir de um procedimento de marcha iniciando-se no dedão do poço e avançando-se até a última porção do poço em contato com o reservatório, ou calcanhar. Note que a pressão é calculada na face do volume de

controle, como necessita-se de seu valor avaliado no centro do volume de controle no cálculo da temperatura, este é calculado como a média aritmética entre a pressão de duas faces adjacentes.

## 5.1 Algoritmo de solução

O algoritmo para a solução do problema geral é dividido em dois sub-algoritmos. O primeiro resolve o escoamento no reservatório sendo descrito na subseção 5.1.1, enquanto o segundo resolve o escoamento no poço conforme descrito na subseção 5.1.2. Devido ao fato dessas soluções dependerem uma da outra, constrói-se um algoritmo que realiza o acoplamento dessas soluções, apresentado na subseção 5.1.3. O código computacional desenvolvido foi implementado computacionalmente em linguagem orientada a objetos.

### 5.1.1 Escoamento no reservatório

O reservatório é inicialmente dividido em seções transversais ao poço de acordo com a malha construída para tal domínio. Conforme discutido no capítulo 3, tais seções apresentam escoamento radial em uma região ao redor do poço e linear em região suficientemente afastada, portanto, a solução para os perfis de escoamento dependerá do valor das coordenadas  $y$  e  $z$  na primeira região e  $y$  na segunda. Com o intuito de analisar tais perfis ao longo de uma linha transversal ao poço, faz-se  $z = 0$  e divide-se tal linha em um número finito de pontos. Realizada a divisão geométrica do reservatório, procede-se ao algoritmo para a solução do escoamento desse domínio, para cada um dos segmentos do reservatório realizam-se os seguintes passos:

1. Calcula-se o campo de pressão através da solução analítica dada pelas Equações 3.22 e 3.23.
2. Calcula-se o campo de temperatura através da solução analítica dada pelas Equações 3.64 e 3.72.
3. Calcula-se a entalpia do fluido na interface poço/reservatório através da Equação 4.84 isolando-se a variável entalpia na equação.

### 5.1.2 Escoamento no poço

Como citado anteriormente, a solução do escoamento no poço se dá numericamente através do método dos volumes finitos e aplicando procedimento de marcha no espaço. Dividindo-se o poço em uma quantidade “ $n$ ” de volumes de controle, o processo

de obtenção da solução do escoamento no poço inicia-se pelo dedão e caminha até o calcanhar do poço. O algoritmo empregado para tanto, admitindo-se que há escoamento multifásico no poço, é apresentado a seguir:

1. Avalia-se o número de fases escoando no poço, caso o escoamento for multifásico, procede-se ao passo 2, caso for monofásico, procede-se ao passo 4.
2. Calcula-se a velocidade superficial de cada uma das fases através da Equação 4.11.
3. Calcula-se a fração volumétrica de cada uma das fases conforme descrito na seção 4.2.
4. Calcula-se a velocidade efetiva de cada fase resolvendo-se a equação da conservação da massa 4.11.
5. Calcula-se a pressão no volume de controle conforme descrito na seção 4.3.
6. Calcula-se a entalpia da mistura através da Equação 4.79, se o escoamento for monofásico, a entalpia da mistura se resume à entalpia da própria fase.
7. Calcula-se a temperatura da mistura através da Equação 4.88, se o escoamento for monofásico, a temperatura da mistura se resume à temperatura da própria fase
8. Dadas a pressão e a temperatura de cada fase, calcula-se a entalpia de cada fase através da Equação 4.88. Este passo é omitido se o escoamento no poço for monofásico.
9. Checa-se a convergência das variáveis primárias do escoamento através da Inequação 5.1. Se o critério não for satisfeito, voltar ao primeiro passo.
10. Checa-se o índice do volume de controle resolvido, caso este não seja o último volume de controle da malha, referente ao “calcanhar” do poço, avança-se no espaço. A estimativa inicial para as variáveis primárias referentes ao próximo volume de controle da malha é configurada com os valores convergidos referentes ao volume de controle anterior.

O critério de convergência para o procedimento iterativo contido na solução das equações do transporte é dado por:

$$\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^o|^2}{|\mathbf{x}^o|^2} \leq \epsilon, \quad (5.1)$$

em que  $\mathbf{x}$  é o vetor dado pelas variáveis primárias, o sobrescrito “o” representa os valores de  $\mathbf{x}$  no nível anterior de iteração e  $\epsilon$  é a tolerância a ser atingida para convergência do procedimento iterativo.

### 5.1.3 Acoplamento poço/reservatório

A quarta condição de contorno referente a equação da conservação da energia térmica no reservatório relaciona a temperatura no poço com a temperatura no reservatório para os casos em que há regiões no poço fechadas à entrada lateral de massa. Portanto, a solução do campo de temperatura no reservatório é dependente do campo de temperatura no poço nessa situação. Isso é evidenciado no apêndice A, onde a solução analítica para tal equação é apresentada.

Outro ponto que causa dependência entre os escoamentos no poço e no reservatório se dá pelo fato de o fluxo de entrada de massa no poço ser dependente da diferença de pressão entre o escoamento no poço e no reservatório, a pressão no poço, por sua vez, é dependente da velocidade do escoamento no poço, que pode variar dependendo da quantidade de massa que entra nesse domínio.

Como os escoamentos no poço e no reservatório são resolvidos separadamente, é necessário haver um procedimento iterativo entre eles, este é especificado pelos seguintes passos:

1. Estima-se, inicialmente, que a queda de pressão no reservatório é nula.
2. Resolve-se o escoamento no reservatório de acordo com o algoritmo descrito em [5.1.1](#)
3. Resolve-se o escoamento no poço de acordo com o algoritmo descrito em [5.1.2](#)
4. Avalia-se um critério para a convergência do perfil de pressão no poço, se este for atendido, a simulação convergiu, caso contrário, retorna-se ao passo 2.

O critério empregado para avaliar a convergência do procedimento iterativo descrito aqui é semelhante à Inequação [5.1](#), sendo que  $x$  é, nesse caso, o vetor pressão ao longo do poço.

## 6 Resultados

Apresenta-se, nesse capítulo, conjunto de resultados calculados pelo simulador desenvolvido no trabalho. Conforme estabelecido em 1.3, os perfis de pressão e temperatura do fluido ou mistura que escoam no poço, bem como o perfil de vazão volumétrica e temperatura na interface poço/reservatório para o fluido que entra lateralmente no poço serão os resultados principais a serem discutidos.

Três problemas base são apresentados. No primeiro deles considera-se escoamento monofásico de gás no reservatório e poço; no segundo tem-se escoamento bifásico de água e óleo ao longo do poço enquanto o reservatório é dividido em três zonas de produção de água, óleo e água, respectivamente; no terceiro caso o reservatório é dividido novamente em três zonas de produção sendo que o fluxo de massa na zona intermediária do reservatório é nulo, enquanto as duas outras zonas apresentam escoamento de gás.

Quando possível, os resultados provenientes dos casos 1 a 3 são comparados com aqueles obtidos por Dawkrajai (2006). É importante salientar que, nesse último trabalho, os valores numéricos configurados para a rugosidade relativa e o coeficiente de transferência de calor global no poço<sup>1</sup> não são especificados claramente. Ao invés disso, existe apenas uma indicação de um possível valor empregado para a rugosidade relativa no poço. Assim, tal valor será utilizado para a confecção dos problemas. Com relação ao coeficiente de transferência de calor, não há ao menos uma indicação do valor empregado para essa variável, portanto, realiza-se uma análise de sensibilidade desse parâmetro em relação aos perfis de temperatura calculados para o escoamento no poço e para a interface poço/reservatório com o intuito de mostrar como o coeficiente de transferência de calor altera tais perfis.

Em cada um dos casos serão realizadas duas simulações, a primeira delas, intitulada de “Simulação A” reproduz dados de entrada provenientes de Dawkrajai (2006), já a segunda, intitulada de “Simulação B” reproduz os mesmos dados da “Simulação A”, exceto pelo diâmetro do poço que passa a ser menor. Escolheu-se por realizar uma segunda simulação pelo fato de a variação de pressão obtida na “Simulação A” em cada um dos três casos ser menor que aquela calculada por Dawkrajai (2006), conforme será observado adiante. Diminuindo-se o diâmetro do poço, a velocidade do escoamento aumenta, para um mesmo valor de vazão volumétrica, fazendo com que a variação de pressão ao

---

<sup>1</sup> Dois parâmetros que afetam principalmente os perfis de pressão e temperatura, respectivamente.

longo do poço aumente, desse modo, os resultados da “Simulação B” aproximam-se mais daqueles provenientes de Dawkrajai (2006) em relação aos da “Simulação A”. Resultado semelhante poderia ser obtido aumentando-se a rugosidade da parede, fazendo com que o fator de atrito de *fanning* fosse maior, porém verificou-se que o valor de rugosidade necessário para que isso fosse possível não apresenta significado físico consistente.

Vários testes sintéticos foram confeccionados a fim de validar o cálculo da variação de pressão causada por efeitos de aceleração e de atrito. Além disso, verificou-se várias vezes o cálculo da velocidade de escoamento no poço, variável que apresenta grande impacto sobre a perda de carga, porém nenhuma inconsistência foi encontrada nos cálculos realizados pelo simulador desenvolvido, o que leva a acreditar que os resultados mostrados por Dawkrajai (2006) estão incorretos ou há algum erro na informação dos parâmetros de entrada empregados por esse autor no momento da confecção dos seus resultados.

Em cada um dos casos apresentados, a tolerância escolhida para a convergência do procedimento iterativo contido na solução do escoamento no poço e também na solução do acoplamento entre os escoamentos no poço e no reservatório é igual a  $1 \times 10^{-10}$ . Além disso, a malha do poço é configurada com  $1 \times 10^2$  volumes de controle.

## 6.1 Caso 1

No primeiro problema teste, o reservatório é dividido em uma única região de produção de gás. Duas simulações são realizadas, a primeira delas, intitulada de “Simulação A” reproduz os dados de entrada utilizados por Dawkrajai (2006) em caso semelhante, enquanto a segunda, intitulada de “Simulação B”, reproduz estes mesmos parâmetros exceto pelo diâmetro do poço que passa a valer  $7,6200 \times 10^{-2}$  m. Um esquema do poço pode ser visto na Figura 13.

Os dados de entrada relativos ao poço, reservatório e fluido empregados pela referência citada são reproduzidos pelas Tabelas 1, 2 e 3, respectivamente.

Os perfis de pressão média ao longo do poço para as simulações “A” e “B” são dados pela Figura 14, enquanto os perfis de variação de pressão por unidade de comprimento do poço devido aos efeitos de aceleração e atrito para ambas simulações são dados pelas figuras 15 e 16.

Das figuras 15 e 16 percebe-se que o fator que apresenta maior influência sobre a queda de pressão no poço é o atrito entre o fluido e as paredes do poço, sendo que a variação de pressão causada pela força que acelera o fluido que entra lateralmente no poço é desprezível.

Conforme a Equação 4.30, a perda de carga é diretamente proporcional ao qua-

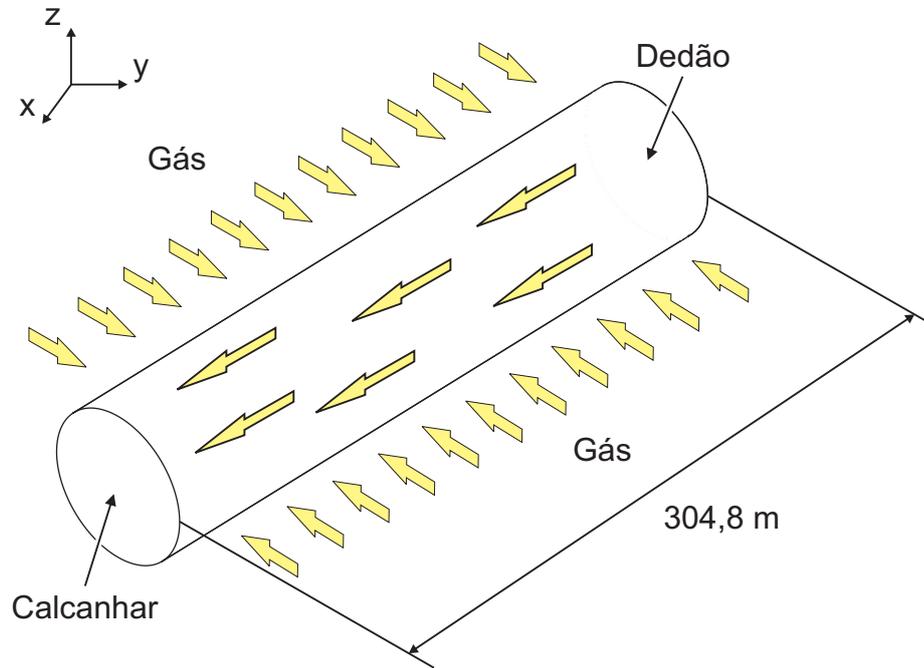


Figura 13 – Esquema do poço, caso 1.

Tabela 1 – Propriedades do poço, caso 1.

Parâmetro	Valor
Comprimento	$3,0480 \times 10^2$ m
Diâmetro	$1,5240 \times 10^{-1}$ m
Rugosidade da parede	$2,4384 \times 10^{-4}$ m
Pressão no “dedão”	$2,5599 \times 10^1$ MPa

Tabela 2 – Propriedades do reservatório, caso 1.

Parâmetro	Valor
Permeabilidade	$4,9346 \times 10^{-14}$ m <sup>2</sup>
Comprimento	$3,0480 \times 10^2$ m
Espessura	$1,5240 \times 10^1$ m
Profundidade	$9,1440 \times 10^2$ m
Temperatura fronteira externa	$3,5537 \times 10^2$ K
Pressão fronteira externa	$2,7579 \times 10^1$ MPa

Tabela 3 – Propriedades do gás, caso 1

Parâmetro	Valor
Viscosidade dinâmica	$2,5700 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Calor específico a pressão constante	$2,4577 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$
Densidade	$2,0824 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de expansão térmica	$4,2480 \times 10^{-3} \text{ 1/K}$
Coefficiente de condutividade térmica equivalente	$2,2500 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

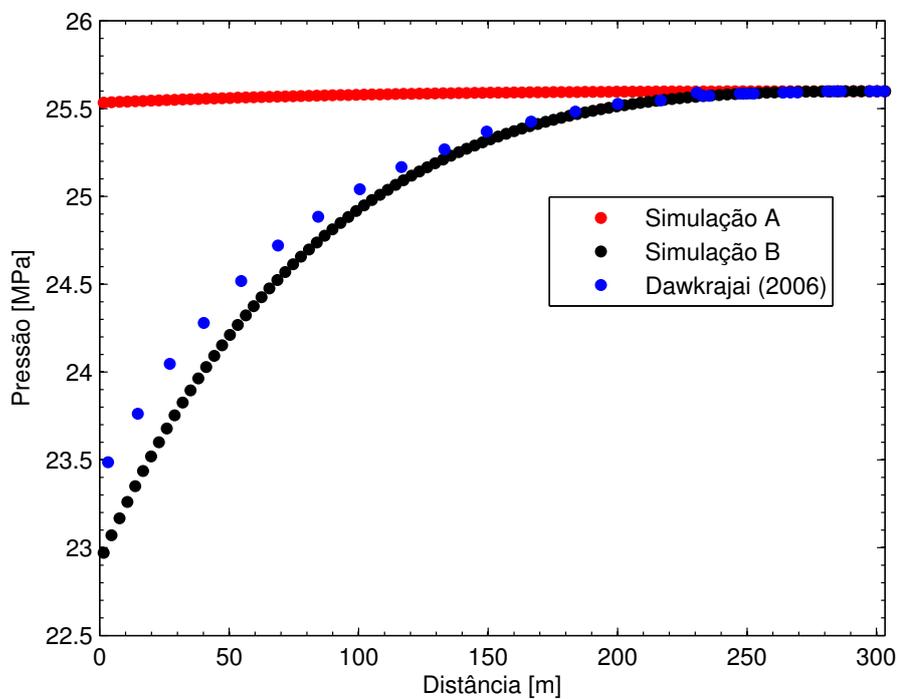


Figura 14 – Pressão média ao longo do poço, caso 1.

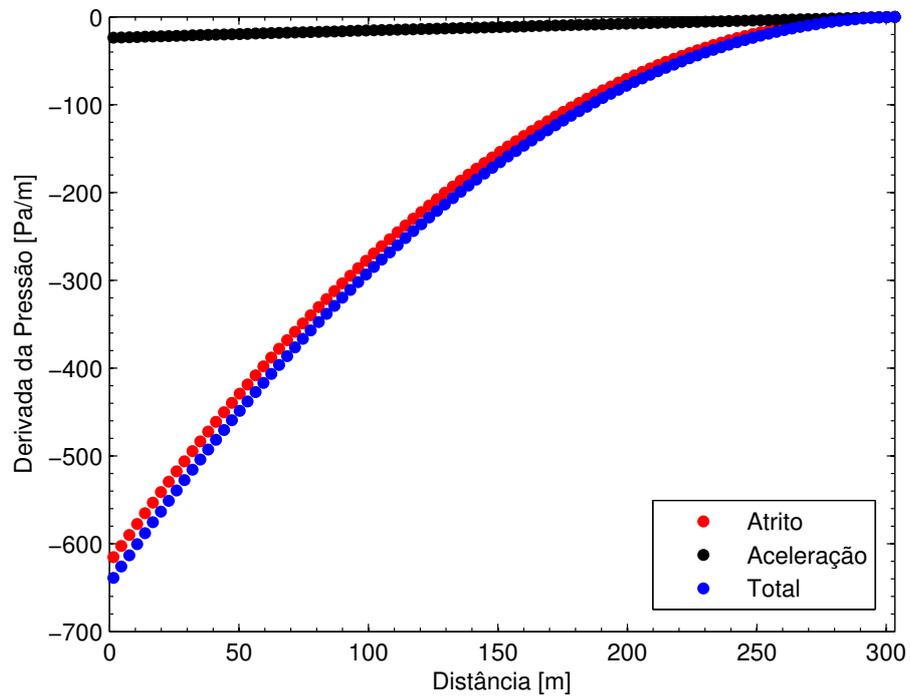


Figura 15 – Queda da pressão média ao longo do poço por unidade de comprimento para a simulação A, caso 1.

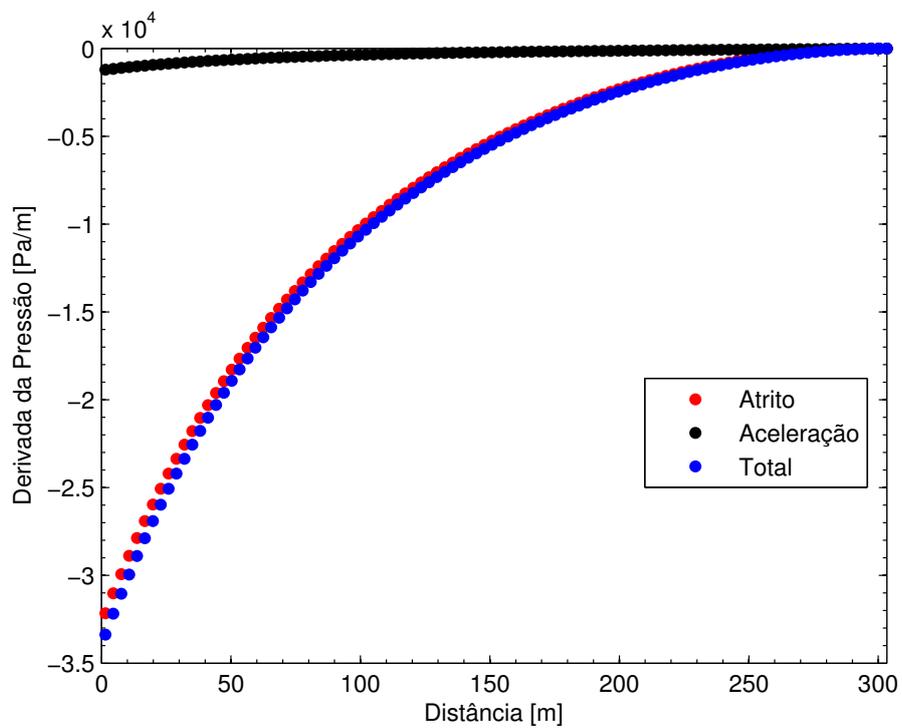


Figura 16 – Queda da pressão média ao longo do poço por unidade de comprimento para a simulação B, caso 1.

drado da velocidade, além disso, sabe-se que a velocidade do escoamento no poço é inversamente proporcional ao quadrado do diâmetro, como o diâmetro empregado na simulação “B” é igual a metade daquele empregado no caso “A” e a vazão volumétrica de entrada no poço é maior na simulação “B” em relação a “A”, conforme visto na Figura 17, tem-se que a perda de carga é mais de 16 vezes maior na simulação “B”.

Da Figura 14, nota-se que o perfil de pressão no poço obtido na simulação “A” é distinto daquele obtido por Dawkrajai (2006), apesar de se esperar que tais resultados fossem semelhantes. Apesar disso, comparando-se o perfil da referência com o proveniente da simulação “B”, nota-se boa concordância. Através da integral da curva representada na Figura 17, notou-se das simulações “A” e “B” que a vazão mássica total produzida no poço é maior para “B”, assim, conclui-se que a velocidade de escoamento no poço obtida nos resultados da referência é maior do que aquela obtida na simulação “A”.

A Figura 17 ilustra o perfil de vazão volumétrica referente ao fluido que entra lateralmente no poço por unidade de comprimento do poço.

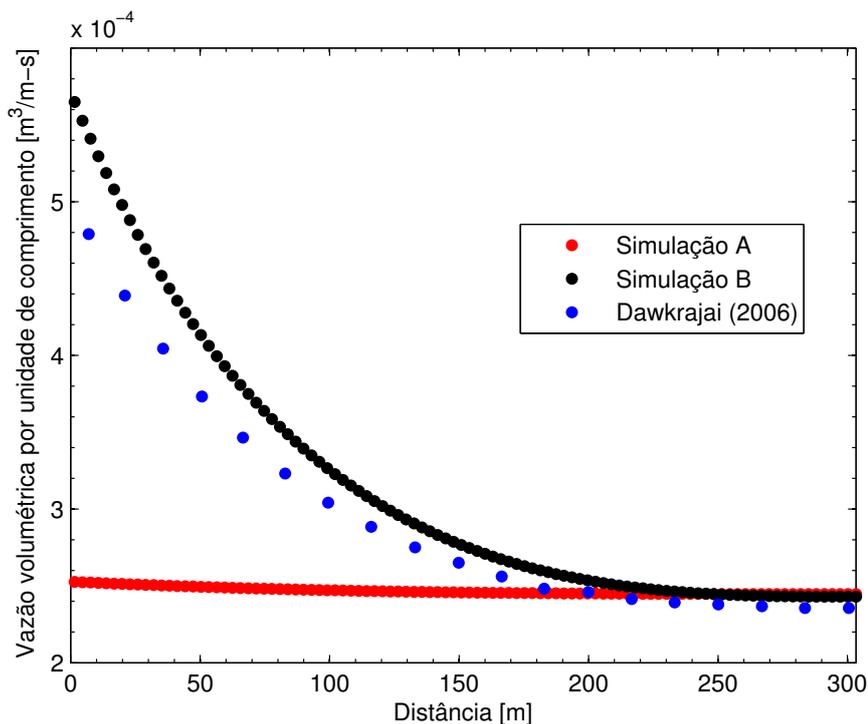


Figura 17 – Vazão de entrada por unidade de comprimento ao longo do poço, caso 1.

Da Equação 3.21 nota-se que a vazão volumétrica de entrada do fluido por unidade de comprimento é função de parâmetros geométricos do reservatório, características físicas da rocha-reservatório e a diferença de pressão entre a fronteira externa do reservatório e o poço. Para as simulações “A” e “B”, todas essas variáveis são idênticas, exceto pela pressão ao longo do poço, que é menor para a simulação “B” conforme a

Figura 14. Isso faz com que a diferença de pressão entre a fronteira externa do reservatório e o poço seja maior para a simulação “B” e, portanto, a vazão volumétrica de entrada no poço por unidade de comprimento também seja maior. O mesmo pode ser dito para os resultados provenientes da simulação “A” e de Dawkrajai (2006).

As figuras 18 e 19 apresentam, respectivamente, os perfis de temperatura média ao longo do poço e de temperatura do fluido que entra lateralmente no poço, i.e. na interface poço/reservatório.

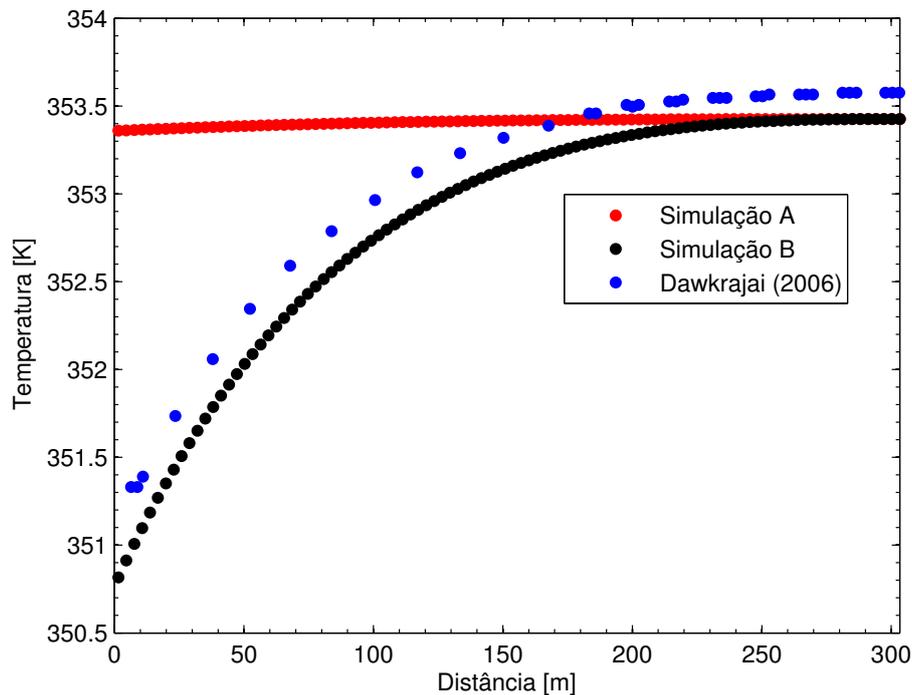


Figura 18 – Temperatura média ao longo do poço, caso 1.

Das simulações “A” e “B” observou-se que a entalpia do fluido na interface poço/reservatório e a entalpia média do fluido escoando no poço são idênticas já que há uma única região de entrada de fluido ao longo do poço, como as pressões para cada uma dessas posições são idênticas, conclui-se que a temperatura também será a mesma conforme observado comparando-se os perfis reproduzidos pelas Figuras 18 e 19.

O escoamento ao longo do poço pode ser visto como isoentálpico uma vez que não há troca de calor por condução entre o escoamento no poço e no reservatório, além do fato de existir uma única zona de produção de fluido no poço e, portanto, haver um perfil de entalpia contínuo na interface poço/reservatório. Por meio da Equação 2.19, encontra-se que o coeficiente *Joule-Thomson* do gás é positivo, como a pressão média do escoamento ao longo do poço cai desde o dedão até o calcanhar, tem-se que o perfil de temperatura também é decrescente.

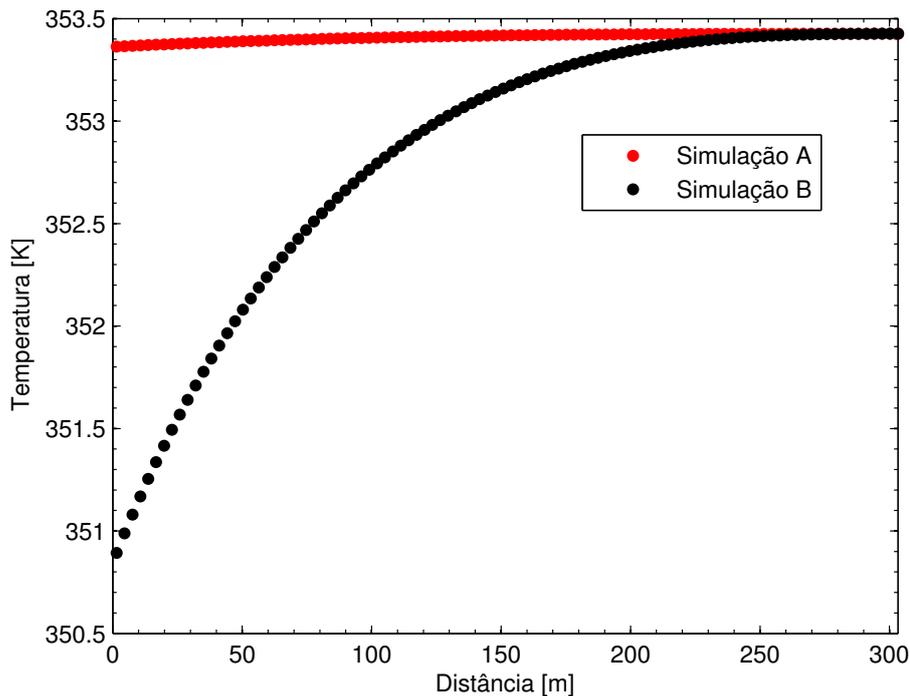


Figura 19 – Temperatura de entrada no poço, caso 1.

Conforme a Figura 18, a temperatura média do escoamento no poço para o caso “B” apresenta boa concordância com o resultado mostrado por Dawkrajai (2006), isso é consequência do fato de os perfis de pressão média do escoamento no poço serem bem próximos para esses dois casos. A mesma explicação é utilizada para justificar a diferença existente entre os perfis de temperatura da simulação “A” e da referência.

É importante notar que há uma dependência linear entre os perfis de pressão e temperatura média do escoamento no poço para o caso de escoamento isoentálpico. Esta dependência é regida pelo valor do coeficiente de *Joule-Thomson*. De acordo com a Equação 2.17, quanto maior for o valor absoluto desse coeficiente, maior será a variação da temperatura. Além disso, o sinal dessa variável controla o comportamento do perfil, caso positivo, a temperatura irá cair a medida que a pressão cai, caso negativo, a temperatura irá aumentar caso a pressão caia.

A variação da temperatura entre o dedão e o calcanhar do poço para a simulação “B” é de aproximadamente 2 K, sendo maior que a resolução usual atingida pelos sistemas DTS. Portanto, estes equipamentos podem ser empregados satisfatoriamente para a medição do perfil de temperatura no poço dadas as condições em questão. Considerando-se a simulação “A”, a ordem de variação do perfil de temperatura é de  $1 \times 10^{-2}$  K. Apesar de bem menor em relação ao caso anterior, tal variação ainda é maior que a resolução atingida pelos sistemas DTS, portanto, estes podem ser empregados para o monitoramento do perfil de temperatura nessas condições.

## 6.2 Caso 2

No segundo caso, o poço é dividido em três regiões distintas de produção. Iniciando-se no “dedão”, a sua primeira região produz óleo possuindo comprimento igual a  $1,0668 \times 10^2$  m; a segunda produz água e tem comprimento de  $9,1440 \times 10^1$  m, enquanto a terceira produz óleo novamente e possui comprimento igual a  $1,0668 \times 10^2$  m. Os dados de entrada para a simulação “A” referentes ao poço e ao reservatório são os mesmos do caso 1, portanto são listados nas Tabelas 1 e 2, respectivamente. Um esquema do poço é mostrado na Figura 20.

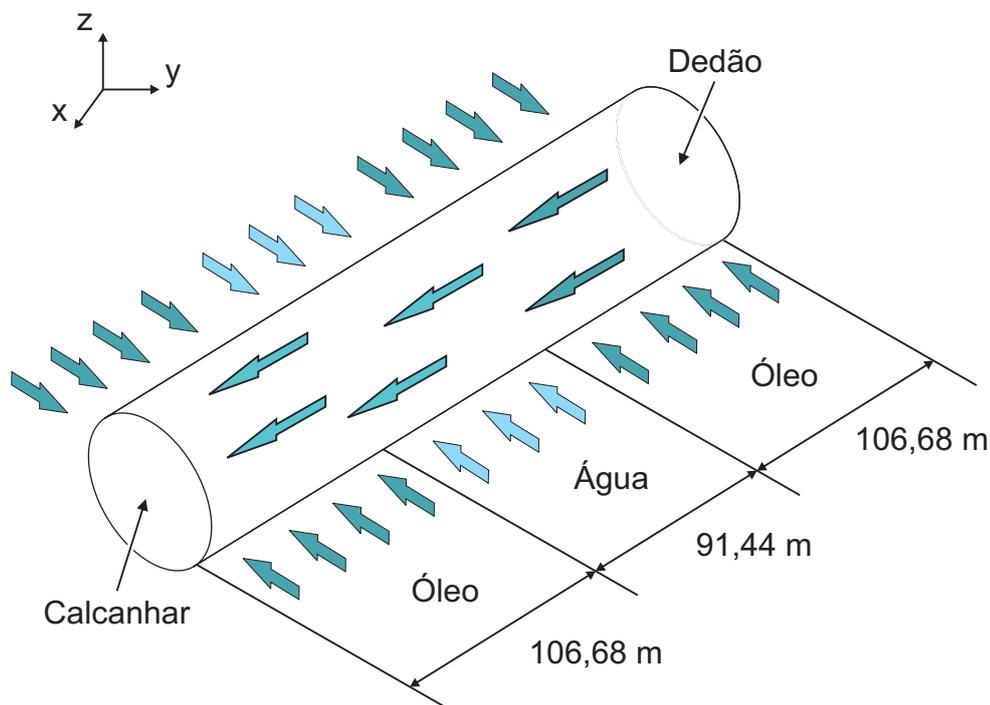


Figura 20 – Esquema do poço, caso 2

As propriedades físicas do óleo e da água são dadas respectivamente pelas Tabelas 4 e 5. A simulação “B” apresenta a mesma configuração de “A”, no entanto, o diâmetro do poço nesse caso é igual a  $7,6200 \times 10^{-2}$  m.

Da Figura 21 observa-se que a diferença entre as pressões no calcanhar e no dedão do poço é menor que aquela observada no caso 1, apresentada na Figura 14, isso ocorre porque, dado um diferencial de pressão entre poço e reservatório, a vazão volumétrica das fases água e óleo ao longo do poço é menor que a vazão volumétrica para a fase gás.

A variação de pressão no poço segundo Dawkrajai (2006) é, novamente, maior que aquela obtida na simulação “A”. Conforme observado no caso 1, sugere-se que tal diferença é proveniente da velocidade calculada para o escoamento no poço em ambos os casos. Por outro lado, a queda de pressão observada na simulação “B” é maior que

Tabela 4 – Propriedades do óleo, caso 2

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
Viscosidade dinâmica	$3,8000 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Calor específico a pressão constante	$2,1939 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$
Densidade	$6,4074 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de expansão térmica	$1,2222 \times 10^{-3} \text{ 1/K}$
Coefficiente de condutividade térmica equivalente	$3,4615 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

Tabela 5 – Propriedades da água, caso 2

<b>Parâmetro</b>	<b>Valor</b>
Viscosidade dinâmica	$4,8000 \times 10^{-4} \text{ Pa} \cdot \text{s}$
Calor específico a pressão constante	$4,1952 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$
Densidade	$1,0099 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Coefficiente de expansão térmica	$5,5980 \times 10^{-4} \text{ 1/K}$
Coefficiente de condutividade térmica equivalente	$4,3268 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

aquela apresentada pela referência base. Em ambas simulações “A” e “B” não se faz aparente mudança da inclinação do perfil de pressão na região de produção de água em relação às regiões de produção de óleo, tal afirmação não é válida para a curva obtida por Dawkrajai (2006).

Da Figura 22, nota-se uma diferença clara entre os valores de vazão volumétrica por unidade de comprimento no poço para cada uma das regiões de produção. Apesar de a diferença de pressão entre poço e reservatório ser praticamente constante ao longo do poço, os índices de produtividade para as regiões de produção de óleo e água são diferentes devido à viscosidade de cada um desses fluidos.

Analisando-se a mesma figura, na região de produção de água, nota-se concordância boa entre os resultados obtidos das simulações “A” e “B” e da referência, no entanto, para as regiões de produção de óleo, nota-se diferença grande entre os resultados obtidos pela referência e pela simulação “A”, bem como diferença ligeiramente maior entre os resultados provenientes da referência e da simulação “B”. Isso se deve ao fato

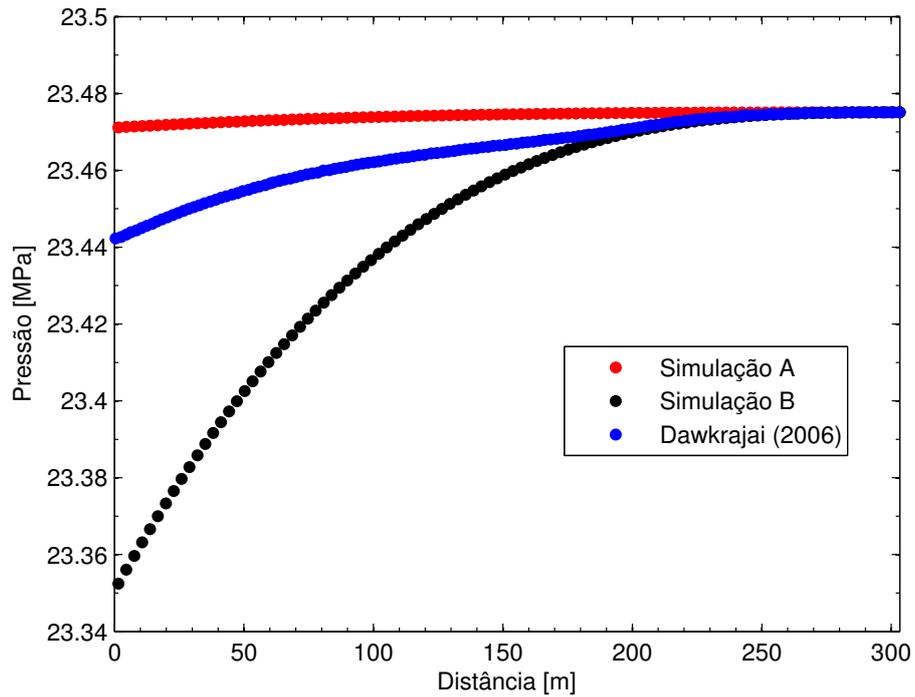


Figura 21 – Pressão média do escoamento ao longo do poço, caso 2.

de os perfis de pressão no poço para tais casos serem distintos.

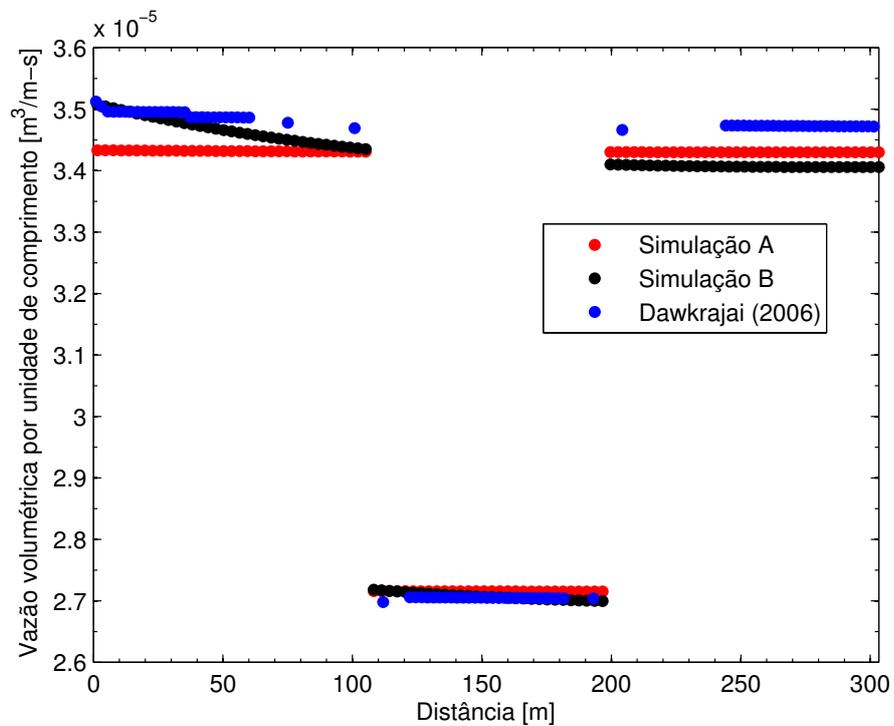


Figura 22 – Vazão de entrada por unidade de comprimento ao longo do poço, caso 2.

As Figuras 23 e 24 ilustram respectivamente as temperaturas média de esco-

mento no poço e de entrada no poço ao longo do seu comprimento.

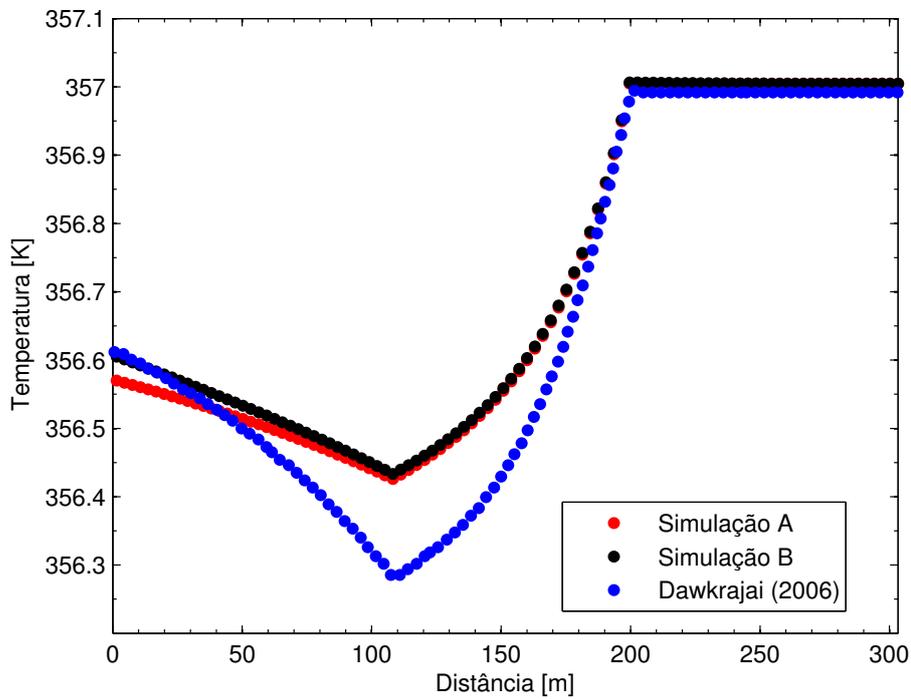


Figura 23 – Temperatura média do escoamento ao longo do poço, caso 2.

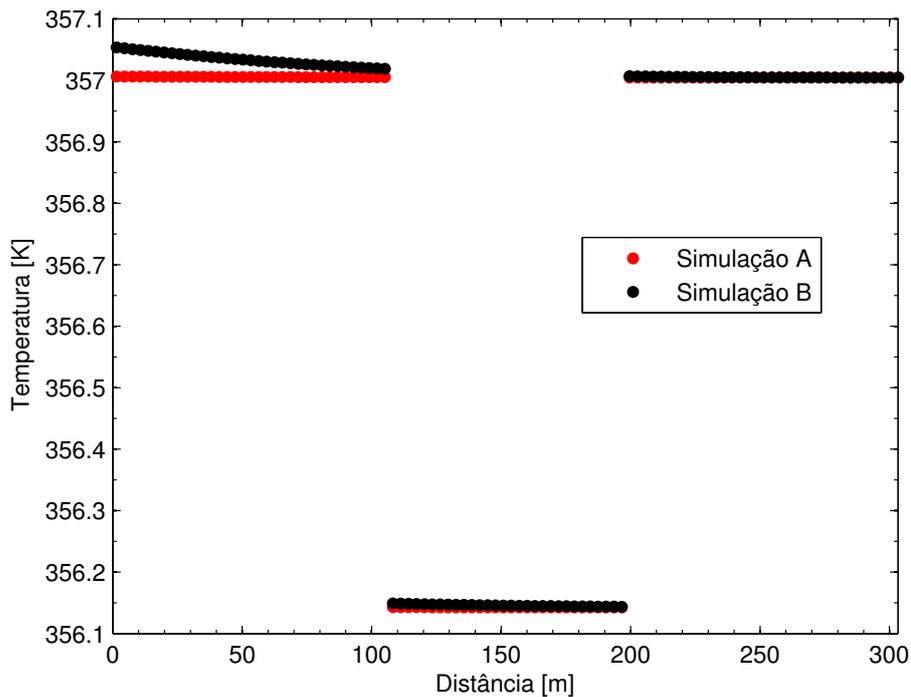


Figura 24 – Temperatura de entrada no poço, caso 2.

Analisando-se o comportamento do perfil de temperatura no sentido do escoamento para cada um dos resultados apresentados, nota-se que este sofre um declínio na região de produção de água, retornando a crescer somente na última região de produção, onde há influxo de óleo. Isso ocorre pelo fato de a temperatura de entrada no poço da fase água ser menor que a referente à fase óleo, conforme apresentado pela Figura 24. Assim, nota-se nesse caso a ação de outro fator (que não a queda de pressão) sobre a variação do perfil de temperatura no poço: a diferença entre as temperaturas dos fluidos provenientes do reservatório observada para diferentes regiões de produção.

É importante observar que o gradiente de temperatura apresenta variação brusca quando o poço atravessa uma nova região de produção e também que logo no início da região de produção de água, a ordem de variação de temperatura verificada está dentro da resolução alcançada pelos sensores de temperatura distribuídos, o que viabiliza o emprego desses sistemas na avaliação das regiões de produção desse poço.

Segundo a Figura 23, o perfil de temperatura média no poço obtido pela simulação “A” apresenta boa concordância com aquele apresentado por Dawkrajai (2006) até o final da primeira região de produção, no entanto, nas outras duas regiões de produção, há uma diferença notável entre esses dois resultados. O mesmo pode ser observado para a simulação “B”, além disso, nota-se que a temperatura média do escoamento calculada para o calcanhar apresenta ótima concordância com aquela prevista pela referência base. A diferença apresentada pelos perfis de temperatura calculados e da referência pode ser proveniente do cálculo das propriedades de mistura, particularmente, o calor específico e o coeficiente de *Joule-Thomson*.

De acordo com a figura 24, a temperatura na interface poço/reservatório é maior nas regiões de produção 1 e 3. Isso se dá pelo fato de o coeficiente *Joule-Thomson* ser maior, em módulo, para o óleo em relação a água. Além disso, nota-se que a temperatura de entrada no poço em ambas as regiões é maior que a temperatura na fronteira externa do reservatório, isso porque tal coeficiente é negativo para tais fluidos. A temperatura de entrada de água relativa à simulação “B” é maior que aquela relativa à simulação “A” pelo fato de a diferença de pressão entre poço e reservatório ser maior no primeiro caso.

Das figuras 19 e 24, nota-se que a variação da temperatura entre estes mesmos locais para a fase gás é maior, fazendo com que o escoamento de gás no poço seja identificado mais facilmente que os escoamentos de água e óleo.

### 6.3 Caso 3

O terceiro problema teste considera escoamento monofásico de gás no poço assim como o caso 1, no entanto, considera também uma região fechada a produção de modo que o poço é dividido em três segmentos. O primeiro, contendo o dedão do poço produz gás

e tem comprimento de  $1,0668 \times 10^2$  m, o segundo é fechado a entrada lateral de massa e tem comprimento  $9,1440 \times 10^1$  m, o último produz gás novamente e tem comprimento igual ao da primeira região. A Figura 25 apresenta um esquema desse poço.

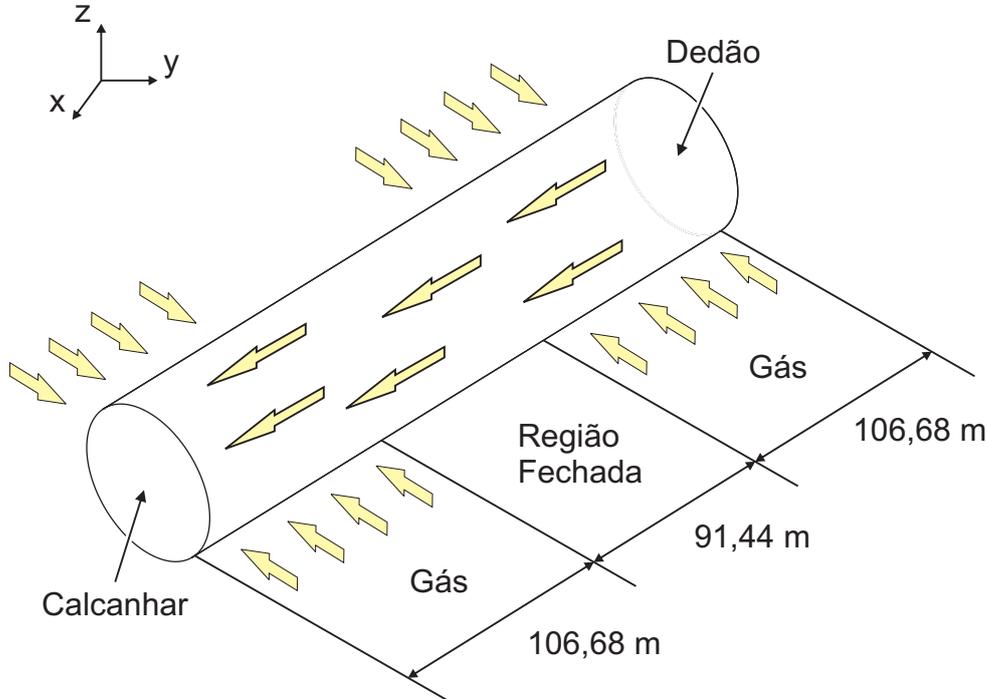


Figura 25 – Esquema do poço, caso 3

Os dados de entrada referentes ao poço, reservatório e ao fluido são dados, respectivamente pelas Tabelas 1, 2 e 3.

Para esse caso é necessário especificar o valor do coeficiente global de transferência de calor uma vez que se considera a troca de calor por condução na direção radial entre o escoamento no poço e reservatório na região do poço fechada à entrada lateral de massa. Primeiramente, apresentam-se resultados para o caso de  $U_{total} = 5,6783 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ , logo após, uma análise de sensibilidade desse parâmetro sobre o perfil de temperatura média no poço é realizada.

Na primeira análise desse caso, duas simulações são realizadas, a primeira delas reproduz os dados especificados pelas tabelas citadas anteriormente, enquanto a segunda simulação reproduz estes mesmos dados de entrada exceto pelo diâmetro do poço que passa a valer  $7,9248 \times 10^{-2}$  m. Os perfis de pressão, vazão de entrada, temperatura média no poço e temperatura de entrada obtidos da simulação são dados nas figuras 26, 27, 28 e 29 respectivamente.

Da Figura 26, os perfis de pressão média no poço obtido por Dawkrajai (2006) e obtido pela simulação “B” são praticamente idênticos, fazendo com que o perfil de vazão de entrada de fluido no poço, ilustrado na Figura 27 também o seja. Os perfis de

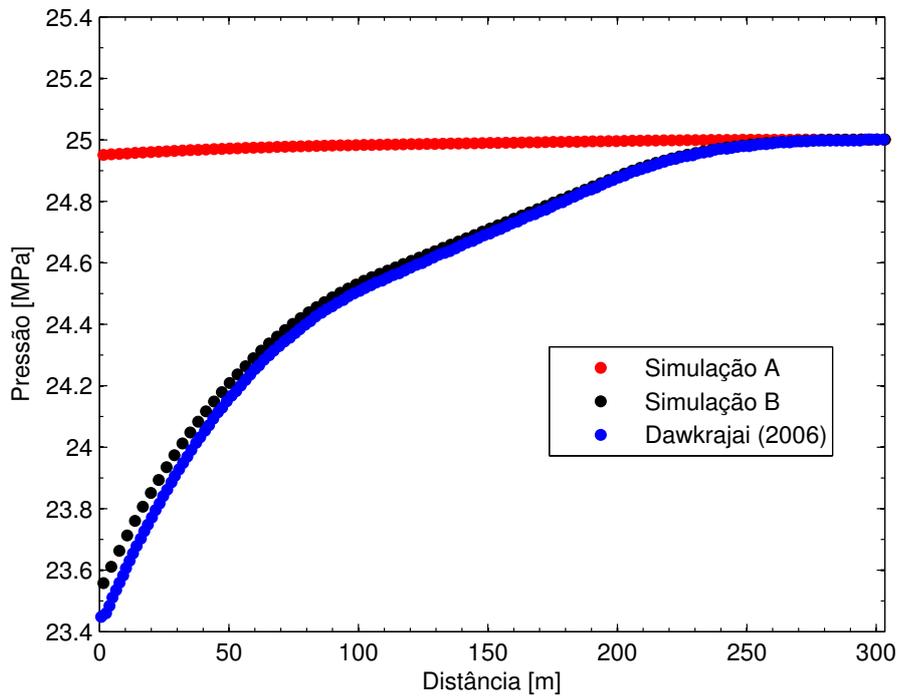


Figura 26 – Pressão média do escoamento ao longo do poço, caso 3.

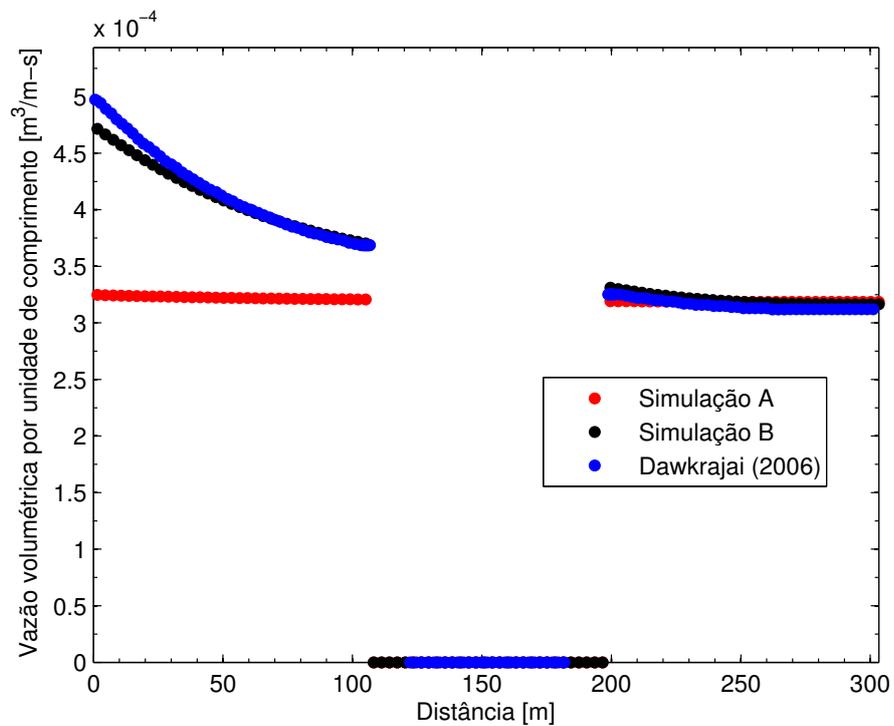


Figura 27 – Vazão de entrada por unidade de comprimento ao longo do poço, caso 3.

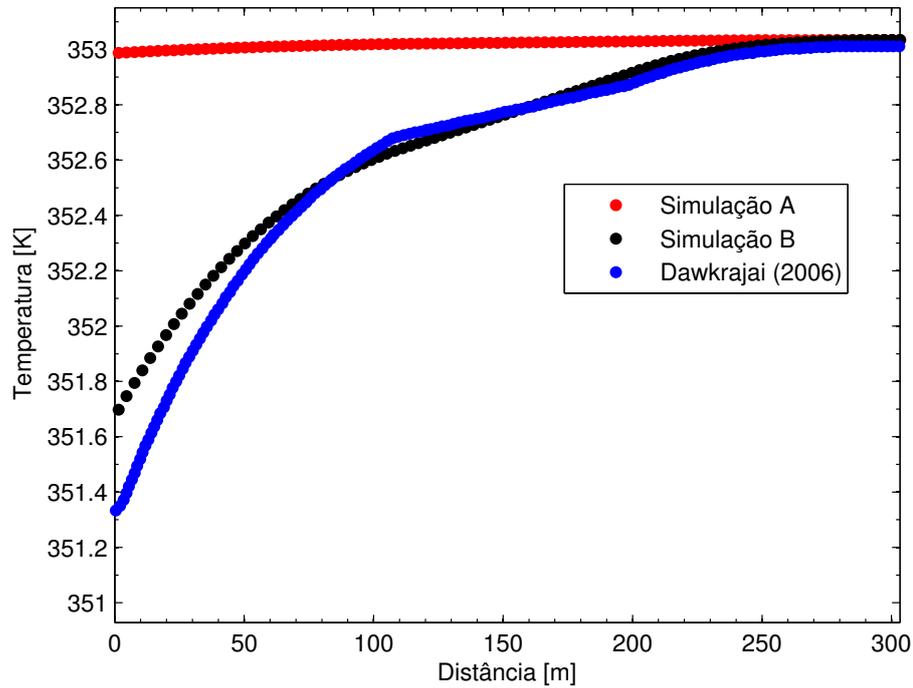


Figura 28 – Temperatura média do escoamento ao longo do poço, caso 3.

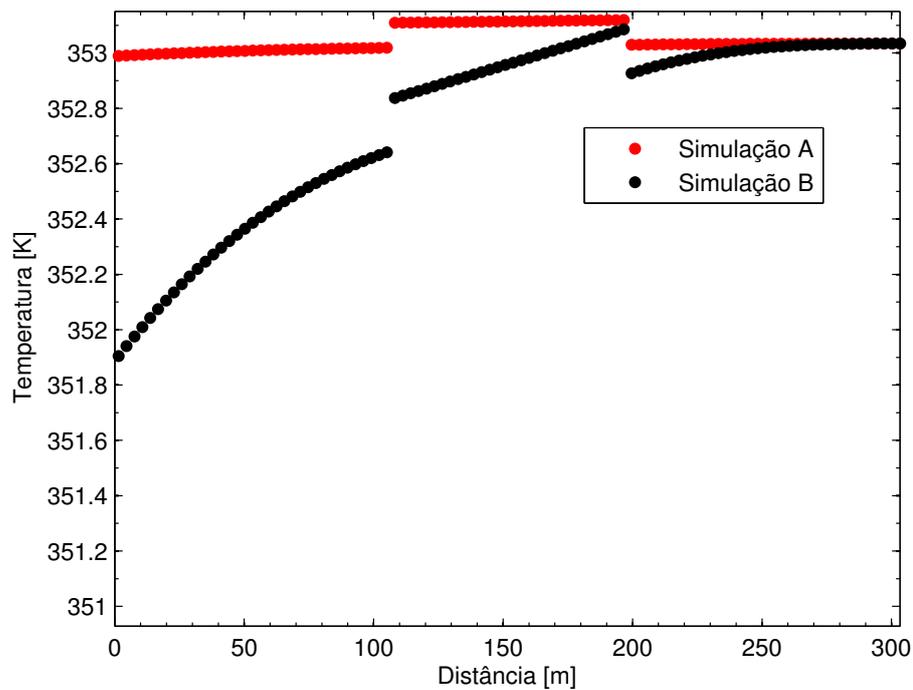


Figura 29 – Temperatura na interface poço/reservatório, caso 3.

temperatura para esses dois casos apresentam boa concordância, conforme mostrado na Figura 28, sendo que a maior diferença entre eles ocorre na última região de produção.

A inclinação do perfil de temperatura ao longo da segunda região de produção é menor que a referente à última região de produção, que contém o calcanhar, uma vez que não há variação da velocidade média do escoamento no poço nessa região e, portanto, o perfil de pressão apresenta inclinação constante. A ordem de variação do perfil de temperatura média do escoamento está acima da resolução dos sistemas DTS, assim a zona fechada do poço pode ser reconhecida e alguma medida de estimulação de produção para esta região pode ser tomada.

Analisando-se o resultado da simulação “B” descrito na Figura 28, um fato notável referente à região fechada do poço é que a variação de temperatura causada pela queda de pressão é superior àquela causada pela transferência de calor na direção radial, uma vez que estes fenômenos agem em sentidos opostos para a mudança do perfil de temperatura e o efeito *Joule-Thomson* faz com que a temperatura média do escoamento diminua com a queda de pressão. De fato, mostra-se posteriormente que a transferência de calor por condução na direção radial entre o fluido escoando no poço e o reservatório é desprezível.

Assumindo que a segunda região do poço seja reconhecida por algum dado de temperatura, das figuras 28 e 29 percebe-se que a temperatura na interface poço/ reservatório reflete tal região de maneira mais clara que o perfil de temperatura média do escoamento no poço. Isso indica que o uso de sistemas DTS para a aferição das diferentes zonas de produção de um poço pode ser mais eficaz caso seja instalado na interface entre poço e reservatório, medindo assim, a temperatura nessa localidade.

Da Figura 29, nota-se que a temperatura na interface poço/reservatório referente à segunda região de entrada do poço é ligeiramente maior que a temperatura observada nas outras regiões. Nota-se também que o perfil de temperatura é descontínuo na transição entre as regiões 1 e 2, além das regiões 2 e 3. Isso se dá pelo fato de a transferência de calor entre o escoamento no poço e a interface poço/reservatório ser regida pelos efeitos combinados de convecção e condução na direção radial para a região em questão fazendo com que seja necessário estabelecer-se um diferencial de temperatura entre esses dois pontos.

Com o intuito de se observar a influência do coeficiente de transferência de calor sobre o perfil de temperatura média do escoamento no poço e também sobre o perfil de temperatura na interface poço/reservatório, diversas simulações são realizadas variando-se somente o valor desse parâmetro. Para tanto, consideram-se aqui os mesmos dados de entrada utilizados na simulação “B”.

A curva relativa à temperatura média do escoamento no poço é dada pela Fi-

gura 30. Nota-se que este perfil é praticamente o mesmo em cada caso apresentado, levando à conclusão de que o coeficiente global de transferência de calor não apresenta impacto significativo sobre o perfil de temperatura média no poço. Outros resultados que comprovam esta hipótese são mostrados nas figuras 31 e 32.

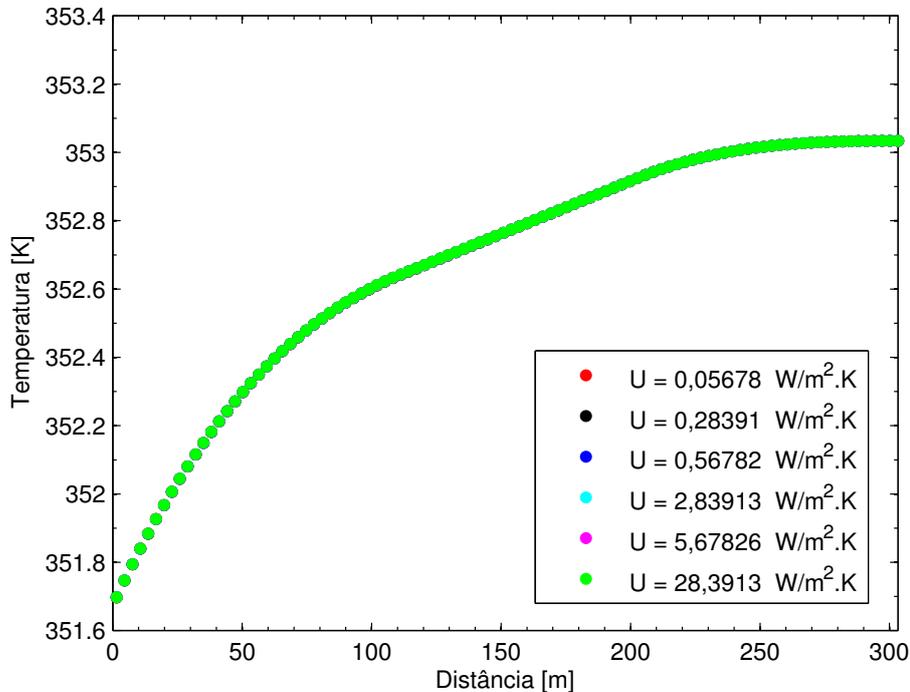


Figura 30 – Temperatura média do escoamento ao longo do poço variando-se  $U_{\text{total}}$ , caso 3.

A partir das figuras 31 e 32, observa-se que a taxa de transferência de calor pelos efeitos combinados de condução e convecção entre o escoamento no poço e a interface poço/reservatório referente à região fechada à entrada lateral de massa no poço é cerca de  $1 \times 10^4$  menor que a taxa de energia carregada pelo fluxo de massa que entra no poço nas regiões abertas ao escoamento, portanto, o primeiro termo não causa variação significativa na energia específica do escoamento no poço, por conseguinte, entalpia específica e, por fim, na temperatura do escoamento.

A Figura 33 ilustra o perfil de temperatura na interface poço/reservatório. Nota-se diferença clara entre o trecho do perfil de temperatura referente à segunda região de produção e as demais regiões em cada uma das simulações. A medida que o coeficiente global de transferência de calor cresce, a temperatura na interface se aproxima da temperatura média do escoamento, por outro lado, a medida que tal parâmetro se aproxima de zero, a temperatura na interface se aproxima da temperatura da fronteira externa do reservatório, i.e.  $3,5537 \times 10^2$  K, uma vez que o fluxo de calor por condução é praticamente o mesmo.

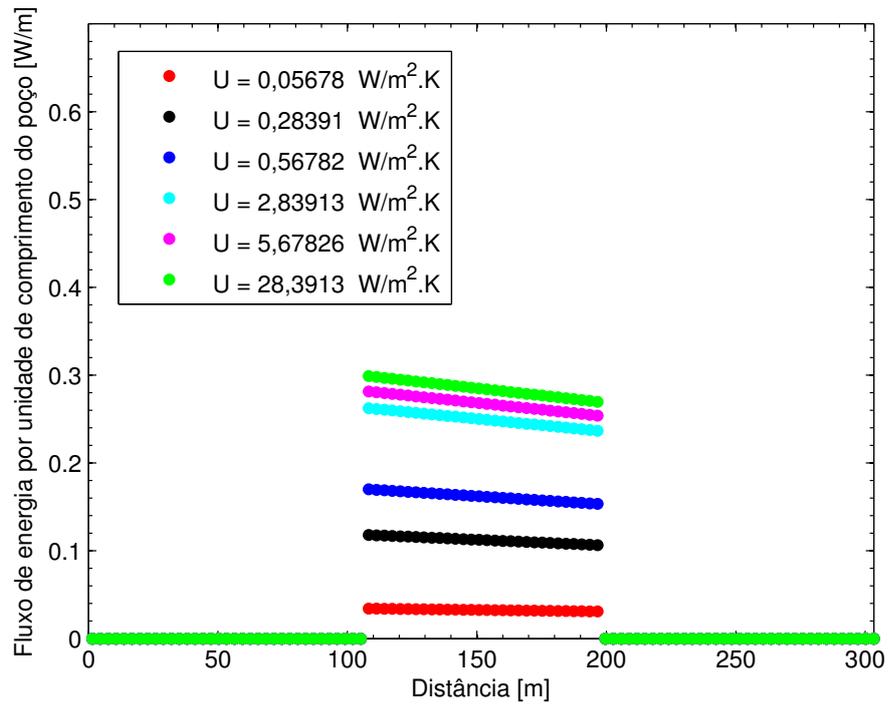


Figura 31 – Fluxo de calor por condução na direção radial entre o escoamento no poço e reservatório, caso 3.

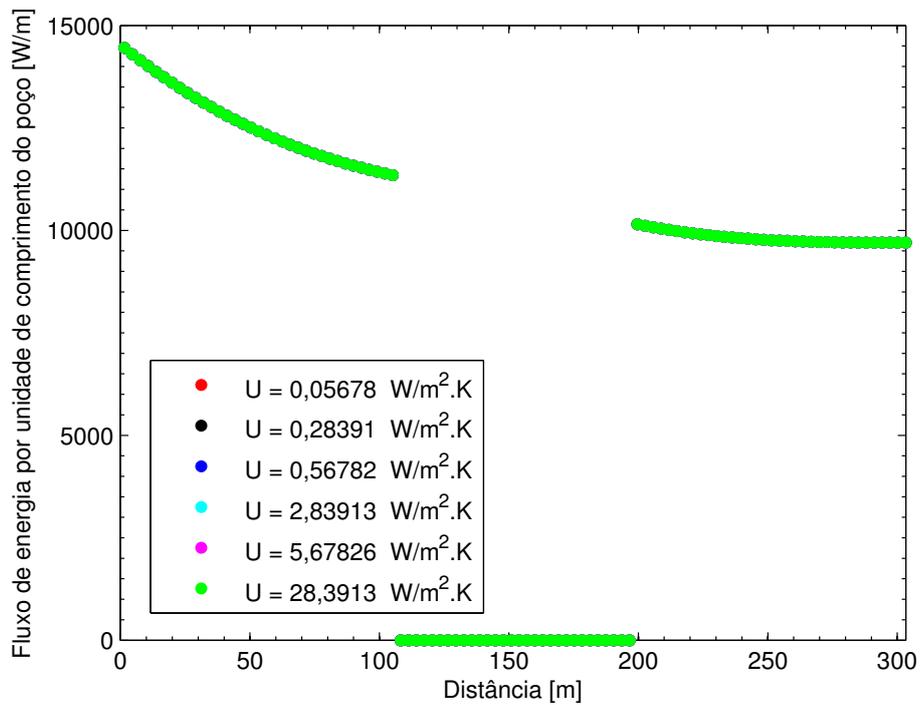


Figura 32 – Transporte advectivo de energia causado pelo fluxo de massa entrando lateralmente no poço, caso 3.

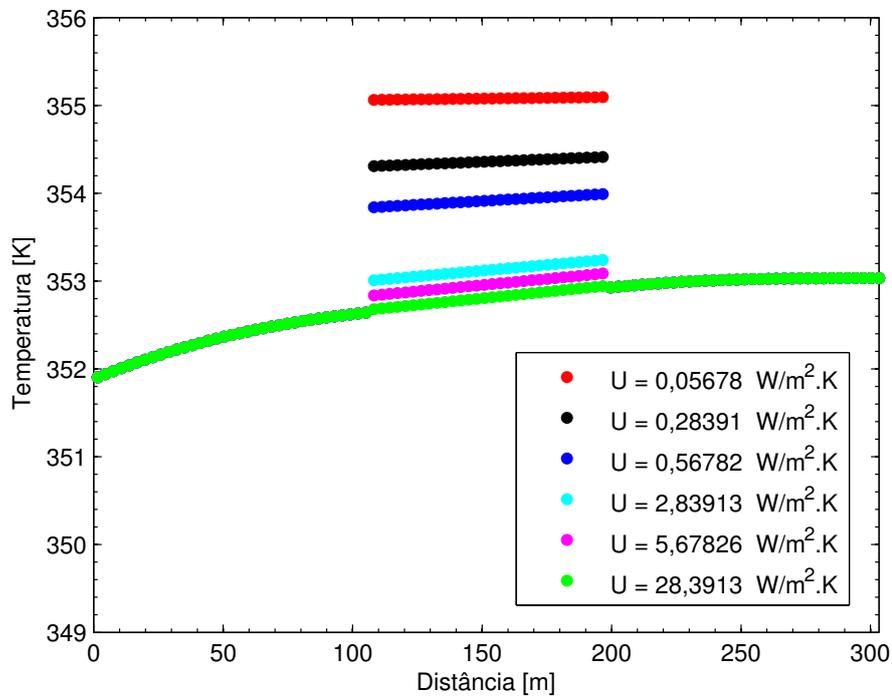


Figura 33 – Temperatura na interface poço/reservatório variando-se  $U_{\text{total}}$ , caso 3.

## 7 Conclusões e contribuições

As seguintes conclusões podem ser derivadas do presente trabalho:

1. Perfis de temperatura médio do escoamento em poços horizontais medidos por sistemas DTS podem ser utilizados de modo eficaz para a localização das regiões de produção de um poço, além disso, podem sugerir o tipo de fluido e sua vazão volumétrica de entrada no poço para cada região. Em regiões do poço fechadas à entrada lateral de massa, a medição do perfil de temperatura na interface poço/reservatório pode ser mais eficaz no reconhecimento dessa região.
2. O efeito *Joule-Thomson* é o fenômeno que apresenta maior influência sobre a variação do perfil de temperatura ao longo do poço em escoamentos monofásicos, uma vez que podem ser considerados praticamente isoentálpicos. A dependência entre os perfis de temperatura e pressão é dada pelo coeficiente de *Joule-Thomson*.
3. Para poços divididos em duas ou mais regiões de produção apresentando escoamento multifásico, a mistura entre diferentes tipos de fluidos altera a derivada do perfil de temperatura ao longo do poço pelo fato de estes apresentarem diferentes entalpias específicas, isso facilita o reconhecimento dessas regiões através dos sistemas DTS.
4. As propriedades do fluido influenciam fortemente o perfil de temperatura do escoamento no poço sendo que o coeficiente de expansão térmica determina o aquecimento ou resfriamento do fluido perante uma queda de pressão.
5. A variação de pressão causada pelo atrito entre o fluido e a interface poço/reservatório é significativamente maior que aquela causada pela força que promove a aceleração do fluido proveniente do reservatório até a velocidade média do escoamento no poço. Isso é mais evidente nos escoamentos de água e óleo em relação ao escoamento de gás, uma vez que os dois primeiros fluidos escoam no poço a velocidades mais baixas.
6. Em regiões do poço horizontal fechadas à entrada lateral de massa, a transferência de calor pelos efeitos combinados de convecção e condução ao longo da direção radial entre o escoamento no poço e a interface poço/reservatório é praticamente desprezível, de modo que o valor do coeficiente de transferência de calor global não apresenta impacto significativo sobre o perfil de temperatura médio relativo

ao escoamento no poço, porém é fator determinante sobre o perfil de temperatura na interface poço/reservatório.

7. Os resultados obtidos por Dawkrajai (2006) não foram reproduzidos com sucesso no presente trabalho. Tal diferença pode ser proveniente de algum erro na implementação do presente simulador ou daquele desenvolvido pelo último autor, além disso, os dados de entrada empregados por Dawkrajai (2006) podem ter sido informados incorretamente em seu trabalho. A perda de carga referente a um problema de escoamento monofásico de gás ao longo do poço foi calculada manualmente e o resultado obtido foi menor que aquele mostrado pela referência, levando a crer que a inconsistência está no trabalho de referência.

Do trabalho apresentado, podem-se citar as seguintes contribuições:

1. Desenvolveu-se um simulador numérico para a resolução do problema acoplado de escoamento no poço e no reservatório. Seu código computacional foi escrito em linguagem orientada a objetos de forma a facilitar a implementação computacional de novos modelos matemáticos. Desse modo, o software desenvolvido, juntamente com seu código fonte passa a fazer parte do banco de dados do laboratório SINMEC, podendo ser empregado em pesquisas futuras.
2. Uma dedução detalhada do modelo matemático que representa os escoamentos no poço e reservatório é realizada buscando-se explicar o significado de cada um dos termos contidos nas equações do modelo, atenção especial é dada para a equação da conservação da energia. Dessa forma, tal conhecimento pode ser consultado posteriormente em futuros trabalhos de pesquisa envolvendo simulação térmica dos escoamentos no poço e no reservatório.

## 8 Recomendações

Como recomendações para trabalhos futuros, é possível citar:

1. Resolver o modelo matemático do reservatório numericamente através de um método conservativo como volumes finitos a fim de que geometrias mais complexas de poço e reservatório possam ser simuladas.
2. Modelar a dependência das propriedades físicas do fluido em relação à pressão e temperatura. Desse modo, os campos de pressão, temperatura e entalpia obtidos para o reservatório e poço serão mais precisos.
3. Desenvolver um simulador numérico que receba como parâmetro de entrada dados experimentais referentes aos campos de pressão, temperatura e vazão de entrada ao longo do poço e tenha como saída estimativas de parâmetros relativos ao reservatório como porosidade e permeabilidade da rocha.
4. Estender os modelos desenvolvidos para o caso transiente com o intuito de avaliar o comportamento dos perfis de escoamento no poço ao longo do tempo.



## Referências

BEJAN, A. *Advanced engineering thermodynamics*. J. Wiley & Sons, 1997. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=D-NSAAAAMAAJ>>. Citado na página 113.

BEJAN, A. *Convection Heat Transfer*. Wiley, 2013. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=D2kPKQEACAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 49, 67 e 113.

DAWKRAJAI, P. *Temperature prediction model for a producing horizontal well*. Tese (Doutorado) — Petroleum and Geosystems Engineering, 2006. Disponível em: <<http://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/2710?show=full>>. Citado 19 vezes nas páginas 27, 29, 46, 47, 58, 64, 74, 75, 83, 84, 88, 89, 90, 91, 92, 95, 96, 104 e 119.

FAGHRI, Y. Z. A. *Transport Phenomena in Multiphase Systems*. <https://www.thermalfluidscentral.org/e-books/book-intro.php?b=42>: Elsevier, 2006. Disponível em: <<https://www.thermalfluidscentral.org/e-books/book-intro.php?b=42>>. Citado 5 vezes nas páginas 31, 32, 34, 44 e 66.

FURUI, K.; ZHU, D.; HILL, A. A rigorous formation damage skin factor and reservoir inflow model for a horizontal well. In: *International Symposium and Exhibition on Formation Damage Control*. Lafayette, Louisiana: Copyright 2002, Society of Petroleum Engineers Inc., 2002. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/mslib/app/Preview.do?paperNumber=00074698societyCode=SPE>>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 47, 48 e 79.

HASAN, A.; KABIR, C. *Fluid Flow and Heat Transfer in Wellbores*. Society of Petroleum Engineers, 2002. ISBN 9781555630942. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=3N7qAAAACAAJ>>. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 69.

JUNIOR, M. F. da S. *Intelligent well transient temperature signal reconstruction*. Tese (Tese de doutorado) — PUC-Rio, 2012. Disponível em: <[http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/0821306\\_2012\\_completo.pdf](http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/0821306_2012_completo.pdf)>. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 40.

KAVIANY, M. *Principles of Heat Transfer in Porous Media*. Springer-Verlag, 1995. (Mechanical Engineering Series). ISBN 9780387945507. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=pX61QAOKKqsC>>. Citado 5 vezes nas páginas 15, 35, 36, 44 e 54.

KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, 2010. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=UnN8DpXI74EC>>. Citado 2 vezes nas páginas 56 e 57.

LLJMBACH, W. M. Sp (1) on the origin of petroleum. In: . World Petroleum Congress, 1975. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/mslib/app/Preview.do?paperNumber=WPC-16134societyCode=WPC>>. Citado na página 34.

- MALISKA, C. *Transferia de calor e mecca dos fluidos computacional*. Livros Tecnicos e Cientificos, 2004. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=8i3qAAAACAAJ>>. Citado na página 79.
- NIELD, D.; BEJAN, A. *Convection in Porous Media*. Springer, 2006. ISBN 9780387290966. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=4qTvIixmtVkC>>. Citado na página 55.
- NIELD, D. A. The modeling of viscous dissipation in a saturated porous medium. *J. Heat Transfer*, 2007. ASME, v. 129, n. 10, p. 1459–1463, out. 2007. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.2755069>>. Citado na página 55.
- OTT, J.; BOERIO-GOATES, J. *Chemical Thermodynamics: Principles and Applications: Principles and Applications*. Elsevier Science, 2000. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=MVj4piUxEH0C>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 35 e 37.
- OUYANG, L.-b.; AZIZ, K. Steady-state gas flow in pipes. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 1996. v. 14, n. 3–4, p. 137–158, maio 1996. ISSN 0920-4105. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0920410595000429>>. Citado 5 vezes nas páginas 64, 65, 68, 69 e 71.
- PALADINO, E. E. *Estudo do Escoamento Multifco em Medidores de Vazo tipo Pressiferencial*. Tese (Tese de Doutorado) — EMC-UFSC, 2005. Disponível em: <[http://www.lepten.ufsc.br/producao/tese\\_paladino.pdf](http://www.lepten.ufsc.br/producao/tese_paladino.pdf)>. Citado na página 31.
- SCHLUMBERGER. *Reservoir definition*. 2013. Disponível em: <<http://www.glossary.oilfield.slb.com/>>. Citado na página 41.
- UKIL, A.; BRAENDLE, H.; KRIPPNER, P. Distributed temperature sensing: Review of technology and applications. *Sensors Journal, IEEE*, 2012. v. 12, n. 5, p. 885–892, 2012. ISSN 1530-437X. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- WANG, Z. *The uses of distributed temperature survey (DTS) data*. [s.n.], 2012. Disponível em: <<http://purl.stanford.edu/ds180yx9388>>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 39 e 40.
- WANG, Z.; HORNE, R. N. Analyzing wellbore temperature distributions using nonisothermal multiphase flow simulation. In: *SPE Western North American Region Meeting*. Anchorage, Alaska, USA: Society of Petroleum Engineers, 2011. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/mslib/app/Preview.do?paperNumber=SPE-144577-MSocietyCode=SPE>>. Citado na página 27.
- WHITAKER, S. Flow in porous media i: A theoretical derivation of darcy's law. 1986. Kluwer Academic Publishers, v. 1, n. 1, p. 3–25–, 1986. ISSN 0169-3913. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01036523>>. Citado na página 45.
- YOSHIOKA, K. *Detection of Water or Gas Entry Into Horizontal Wells by Using Permanent Downhole Monitoring Systems*. Tese (Doutorado) — Texas A&M University, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 64.

# Apêndices



# APÊNDICE A – Resultados de álgebra linear e cálculo tensorial

Apresentam-se aqui os resultados de álgebra linear e cálculo tensorial utilizados ao longo das deduções das equações governantes do escoamento no reservatório e poço.

Seja  $a = a(x, y, z, t)$  um campo escalar função do espaço e tempo.

O gradiente de  $a(x, y, z, t)$  em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x} e_1 + \frac{\partial a}{\partial y} e_2 + \frac{\partial a}{\partial z} e_3, \quad (\text{A.1})$$

Seja  $V$  campo vetorial função do espaço e tempo. Escrevendo-se  $V$  em coordenadas cartesianas:

$$V(x, y, z, t) = v_1(x, y, z, t) e_1 + v_2(x, y, z, t) e_2 + v_3(x, y, z, t) e_3, \quad (\text{A.2})$$

em que  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são os vetores da base canônica e  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  são campos escalares.

O módulo do vetor  $V$  é dado por:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \quad (\text{A.3})$$

O divergente do vetor  $V$  é dado por:

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad (\text{A.4})$$

Em coordenadas cilíndricas  $(x, r, \theta)$ , o divergente do vetor  $V$  é dado por:

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}. \quad (\text{A.5})$$

O gradiente do vetor  $V$  é dado por:

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x} & \frac{\partial v_2}{\partial x} & \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} & \frac{\partial v_2}{\partial y} & \frac{\partial v_3}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} & \frac{\partial v_2}{\partial z} & \frac{\partial v_3}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

O produto diádico entre dois vetores  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{V}^*$  é dado por:

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} v_1 v_1^* & v_1 v_2^* & v_1 v_3^* \\ v_2 v_1^* & v_2 v_2^* & v_2 v_3^* \\ v_3 v_1^* & v_3 v_2^* & v_3 v_3^* \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A derivada material de  $a(x, y, z, t)$  é a derivada em relação ao tempo tomada ao longo de um caminho movendo-se com velocidade  $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ . Ela é definida por:

$$\frac{Da}{Dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla a. \quad (\text{A.8})$$

Seja  $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, y, z, t)$  campo tensorial dado por:

$$\mathbf{T}(x, y, z, t) = \begin{bmatrix} t_{11}(x, y, z, t) & t_{12}(x, y, z, t) & t_{13}(x, y, z, t) \\ t_{21}(x, y, z, t) & t_{22}(x, y, z, t) & t_{23}(x, y, z, t) \\ t_{31}(x, y, z, t) & t_{32}(x, y, z, t) & t_{33}(x, y, z, t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

O divergente do tensor  $\mathbf{T}$  em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{11}}{\partial x} + \frac{\partial t_{12}}{\partial y} + \frac{\partial t_{13}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{21}}{\partial x} + \frac{\partial t_{22}}{\partial y} + \frac{\partial t_{23}}{\partial z} \\ \frac{\partial t_{31}}{\partial x} + \frac{\partial t_{32}}{\partial y} + \frac{\partial t_{33}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

A contração de dois tensores  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^*$  é obtida somando-se o produto dos componentes correspondentes de cada tensor, isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{T}^* &= t_{11}t_{11}^* + t_{12}t_{12}^* + t_{13}t_{13}^* + \\ & t_{21}t_{21}^* + t_{22}t_{22}^* + t_{23}t_{23}^* + \\ & t_{31}t_{31}^* + t_{32}t_{32}^* + t_{33}t_{33}^* \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Do cálculo tensorial, os seguintes resultados são válidos:

- Produto interno entre um vetor e a derivada parcial de um escalar multiplicado por um vetor

$$\left( \frac{\partial a \mathbf{v}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{v} = \left( \left| \frac{\mathbf{v}}{2} \right|^2 \right) \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial t} \left( \left| \frac{\mathbf{v}}{2} \right|^2 \right) \quad (\text{A.12})$$

- Produto interno entre um vetor e o divergente de um escalar multiplicado por um tensor

$$(\nabla \cdot (a \mathbf{v} \mathbf{v}^T)) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \left( a \mathbf{v} \left| \frac{\mathbf{v}}{2} \right|^2 \right) \quad (\text{A.13})$$

- Produto interno entre um vetor e o divergente de um tensor

$$(\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{V} = \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{T}^T : \nabla \mathbf{V} \quad (\text{A.14})$$

## APÊNDICE B – Relações termodinâmicas

Nesse apêndice, as relações termodinâmicas utilizadas ao longo do texto são derivadas

### B.1 Derivada total da entropia em função da pressão e temperatura

Sejam  $s$ ,  $P$  e  $T$  a entropia específica, pressão e temperatura de um fluido em equilíbrio termodinâmico. A derivada total da entropia em relação à pressão e temperatura é dada por:

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P dT. \quad (\text{B.1})$$

Seja  $\rho$  a densidade do fluido. Da última relação de *Maxwell* (BEJAN, 1997 apud BEJAN, 2013, 3,p. 173), a derivada parcial da entropia em relação à pressão é dada por:

$$\left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T = - \left[ \frac{\partial (1/\rho)}{\partial T} \right]_P = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = -\beta/\rho, \quad (\text{B.2})$$

em que  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica a pressão constante:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P. \quad (\text{B.3})$$

Seja  $\partial q$  quantidade infinitesimal de calor adicionada ao fluido de modo quase-estático, logo:

$$\partial q = cdT. \quad (\text{B.4})$$

Da segunda lei da termodinâmica, a relação entre a variação da entropia do fluido com o calor recebido é dada por:

$$ds = \frac{\partial q}{T}. \quad (\text{B.5})$$

Considerando-se que o processo de adição de calor se dá à pressão constante, as

equações B.4 e B.1 se tornam:

$$\partial q = c_p dT; \quad (\text{B.6})$$

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT. \quad (\text{B.7})$$

Das equações B.5, B.6 e B.9, é possível escrever:

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T}. \quad (\text{B.8})$$

Assim, a equação B.1 pode ser escrita como:

$$ds = -\frac{\beta}{\rho} dP + \frac{c_p}{T} dT \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Derivada total da entalpia em função da entropia e pressão

Segundo a primeira lei da termodinâmica, o calor  $\partial q$  adicionado ao fluido relaciona-se com o trabalho,  $\partial w$ , realizado por este e a variação de sua energia interna  $du$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \partial q &= \partial w + du \\ &= P dv + du, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

somando-se a quantia  $v dP$  à equação anterior e utilizando-se a definição de entalpia:

$$dh = \partial q + \frac{1}{\rho} dP, \quad (\text{B.11})$$

por fim, da equação B.5, a derivada total da entalpia, considerando esta como função da entropia e pressão é dada por:

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dP. \quad (\text{B.12})$$

## B.3 Derivada total da entalpia em função da pressão e temperatura

Escrevendo-se a entalpia específica em função da pressão e temperatura:

$$dh = \left( \frac{\partial h}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P dT. \quad (\text{B.13})$$

Segundo a definição do calor específico à pressão constante:

$$\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = c_p. \quad (\text{B.14})$$

Somando-se as equações B.9 e B.12, é possível mostrar que:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial P}\right)_T = \frac{(1 - \beta T)}{\rho}. \quad (\text{B.15})$$

Logo, a derivada total da entalpia, considerando esta como função da pressão e da temperatura:

$$dh = \frac{(1 - \beta T)}{\rho} dP + c_p dT \quad (\text{B.16})$$



# Anexos



## ANEXO A – Solução da equação de conservação da energia no reservatório

Dawkrajai (2006) resolve o sistema linear de equações gerado pelas condições de contorno da equação da conservação da energia no reservatório. A solução desse sistema permite encontrar as expressões para as constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$ . A seguir apresentam-se as relações para essas constantes

$$a_1 = \frac{\theta_3 + \theta_4}{\psi_+ - \psi_-}; \quad (\text{A.1})$$

$$a_2 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{\psi_+ - \psi_-}; \quad (\text{A.2})$$

$$b_1 = \frac{l_3 + l_4}{\psi_+ - \psi_-}; \quad (\text{A.3})$$

$$b_2 = \frac{l_1 + l_2}{\psi_+ - \psi_-}. \quad (\text{A.4})$$

Em que:

$$\theta_1 = \frac{h}{2} \exp\left(\frac{h}{2}(n_1 + n_2)\right) r_{\text{poço}}^{m_1} (n_2 - n_1) \left( (K_T)_{\text{eq}} m_1 - U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \right) (\beta T_{\text{ext}} - 1) \quad (\text{A.5})$$

$$\theta_2 = \left(\frac{h}{2}\right)^{m_1} (\beta T_{\text{poço}} - 1) U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \left[ \exp\left(\frac{h}{2}n_2 + \frac{y^*}{2}n_1\right) \left(\frac{h}{2}n_2 - n_1\right) + \exp\left(\frac{h}{2}n_1 + \frac{y^*}{2}n_2\right) \left(-\frac{h}{2}n_1 + m_1\right) \right] \quad (\text{A.6})$$

$$\theta_3 = \frac{h}{2} \exp\left(\frac{h}{2}(n_1 + n_2)\right) r_{\text{poço}}^{m_2} (n_2 - n_1) \left( -(K_T)_{\text{eq}} m_2 + U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \right) (\beta T_{\text{ext}} - 1) \quad (\text{A.7})$$

$$\theta_4 = \left(\frac{h}{2}\right)^{m_2} (\beta T_{\text{poço}} - 1) U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \left[ \exp\left(\frac{h}{2}n_1 + \frac{y^*}{2}n_2\right) \left(\frac{h}{2}n_1 - m_2\right) + \exp\left(\frac{h}{2}n_2 + \frac{y^*}{2}n_1\right) \left(-\frac{h}{2}n_2 + m_2\right) \right] \quad (\text{A.8})$$

$$\psi_+ = \beta r_{\text{poço}}^{m_2} \left(\frac{h}{2}\right)^{m_1} \left( (K_T)_{\text{eq}} m_2 - U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \right) \left[ \exp\left(\frac{h}{2}n_1 + \frac{y^*}{2}n_2\right) \left(\frac{h}{2}n_1 - m_1\right) + \exp\left(\frac{h}{2}n_2 + \frac{y^*}{2}n_1\right) \left(-\frac{h}{2}n_2 + m_1\right) \right] \quad (\text{A.9})$$

$$\psi_- = \beta r_{\text{poço}}^{m_1} \left(\frac{h}{2}\right)^{m_2} \left( (K_T)_{\text{eq}} m_1 - U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \right) \left[ \exp\left(\frac{h}{2}n_2 + \frac{y^*}{2}n_1\right) \left(\frac{h}{2}n_2 - m_2\right) + \exp\left(\frac{h}{2}n_1 + \frac{y^*}{2}n_2\right) \left(-\frac{h}{2}n_1 + m_2\right) \right] \quad (\text{A.10})$$

$$l_1 = r_{\text{poço}}^{m_1} \exp\left(\frac{h}{2}n_1\right) \left( -(K_T)_{\text{eq}} m_1 + U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \right) (\beta T_{\text{ext}} - 1) \left(\frac{h}{2}\right)^{m_2} \left(\frac{h}{2}n_1 - m_2\right) \quad (\text{A.11})$$

$$l_2 = r_{\text{poço}}^{m_2} \left(\frac{h}{2}\right)^{m_1} \exp\left(\frac{h}{2}n_1\right) \left(-\frac{h}{2}n_1 + m_1\right) \left( -(K_T)_{\text{eq}} m_2 + U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \right) (\beta T_{\text{ext}} - 1) + r_{\text{poço}} U_{\text{total}} \left(\frac{h}{2}\right)^{m_1+m_2} \exp\left(\frac{y^*}{2}n_1\right) (\beta T_{\text{ext}} - 1) (m_2 - m_1) \quad (\text{A.12})$$

$$l_3 = r_{\text{poço}}^{m_2} \exp\left(\frac{h}{2}n_1\right) \left( (K_T)_{\text{eq}} m_1 - U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \right) (\beta T_{\text{ext}} - 1) \left(\frac{h}{2}\right)^{m_2} \left(\frac{h}{2}n_2 + m_2\right) \quad (\text{A.13})$$

$$l_4 = r_{\text{poço}}^{m_2} \left(\frac{h}{2}\right)^{m_1} \exp\left(\frac{h}{2}n_2\right) \left(\frac{h}{2}n_2 - m_1\right) \left( -(K_T)_{\text{eq}} m_2 + U_{\text{total}} r_{\text{poço}} \right) (\beta T_{\text{ext}} - 1) - r_{\text{poço}} U_{\text{total}} \left(\frac{h}{2}\right)^{m_1+m_2} \exp\left(\frac{y^*}{2}n_2\right) (\beta T_{\text{ext}} - 1) (m_2 - m_1) \quad (\text{A.14})$$

Note que as constantes  $\theta_2$ ,  $\theta_4$ ,  $l_2$  e  $l_4$  realizam o acoplamento entre a temperatura no poço e o perfil de temperatura no reservatório.