

FRANCISCO MARCONDES- Depto. Eng. Mecânica-UFPB, Campina Grande-PB  
 MARIO C. ZAMBALDI- Depto. Matemática -UFSC, Florianópolis-SC  
 CLOVIS R. MALISKA- Depto. Eng. Mecânica -UFSC, Florianópolis-SC

### RESUMO

No presente trabalho é aplicada a metodologia MDF (Minimum Fill Discarded) ao método iterativo GMRES. São apresentados resultados para uma série de problemas empregando malhas estruturadas e não estruturadas. É investigado o efeito de diversas ordenações geométricas na ordenação MDF. Verifica-se também, o efeito de diversos níveis de fatoração nas ordenações empregadas. Os resultados são apresentados em termos de tempo de CPU normalizado e número de iterações no solver.

### INTRODUÇÃO

Na resolução de problemas da engenharia utilizando métodos numéricos (diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, etc), as equações diferenciais descrevendo um determinado problema físico são discretizadas e linearizadas, por algum esquema, de tal forma a se obter um sistema linear de equações. Para a resolução dos sistemas lineares pode-se utilizar métodos diretos ou métodos iterativos. Métodos iterativos são mais utilizados principalmente por dois motivos. Primeiro, requerem pouca memória e tem baixo custo por iteração. Além disso, como a maioria dos problemas existentes são não lineares, a solução do sistema linear representa uma solução intermediária cujo custo em obtê-la não deve ser excessivo.

Dentre os métodos iterativos mais comumente utilizados estão os métodos não estacionários (ORTHOMIN, CGS, Bi-CGSTAB, GMRES, etc). A taxa de convergência destes métodos depende basicamente de dois fatores: tipo de preconditionador utilizado e ordenação das incógnitas. É bem conhecido que preconditionadores baseados em uma fatoração incompleta (ILU - *incomplete LU factorization*) melhoram sensivelmente a taxa de convergência destes métodos. No que concerne a ordenação das incógnitas, existem uma série de métodos baseados na estrutura da matriz como mínimo grau, mínima deficiência, *red-black*, etc. Entretanto, conforme descrito em D'Azevedo et al. (1992a), estes métodos são baseados somente no grafo da matriz e não podem detectar anisotropias nos seus elementos. Anisotropia pode ser originada pelo emprego de malhas não estruturadas com regiões de refino localizado, através de materiais ou meios heterogêneos ou através de ambos. No trabalho de D'Azevedo et al. (1992a) é mostrado que a solução de um problema de condução de calor com ordenação natural  $y-x$ , é grandemente afetado pelos valores das condutividades térmicas nessas direções. Baseado neste fato, os mesmos autores, propuseram um método de ordenação das incógnitas baseado não só na estrutura da matriz, mas também nos seus valores numéricos. Este esquema, denominado MDF (*Minimum Discarded Fill*), também está associado a uma fatoração incompleta. A idéia do método é ordenar as incógnitas que minimizem localmente o enchimento a ser descartado durante a fatoração incompleta. Este método tem sido utilizado nos trabalhos de D'Azevedo et al. (1991, 1992a) para problemas não simétricos e simétricos, respectivamente, utilizando malhas estruturadas e não-estruturadas.

Neste trabalho é verificado a potencialidade da metodologia MDF, aplicando a mesma a problemas de condução de calor e aqueles inerentes à solução de problemas de petróleo utilizando malhas não estruturadas de Voronoi, empregando como acelerador de convergência o método GMRES. Pretende-se utilizar diversas grades de Voronoi, grades híbridas (malhas cilíndricas em voltas dos poços e hexagonal no restante do domínio. Palagi (1993), Marcondes et al. (1994)), e malhas hexagonais distorcidas. O modelo físico empregado é o black-oil bifásico (óleo-água) e será estudado apenas geometrias 2D. O esquema de integração temporal é totalmente implícito. O esquema de armazenamento das variáveis é blocado e o sistema de equações lineares é preconditionado à direita.

### ORDENAÇÃO MDF

A ordenação das incógnitas através do MDF é realizada durante a fatoração incompleta da matriz jacobiana, ordenando os nós que tiverem menores *discard* (D'Azevedo et al., 1991). Para um dado nível da fatoração incompleta, o *discard* para o nó  $i$  é calculado com os elementos que não fazem parte dos fatores  $L$  e  $U$ . A Fig. 1 apresenta os elementos que participarão do cálculo do *discard* para o nó  $i$  (pivô) quando uma fatoração incompleta de nível (0) for realizada. Para cada posição  $(a_{ij})$  na matriz é associado um nível  $l(a_{ij})$ . Inicialmente,

$$l(a_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{se } a_{ij} \neq 0 \\ \infty & \text{se } a_{ij} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

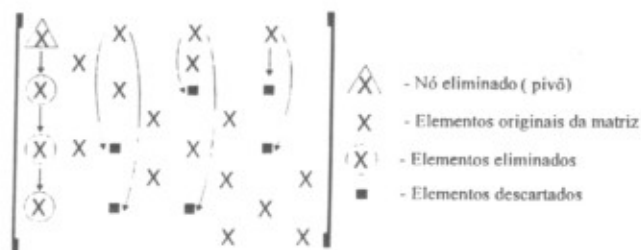


Fig. 1 - Representação da eliminação do nó 1 para uma ILU(0)

No passo  $m$  da eliminação, define-se

$$l(a_{ij}) = \min[l(a_{ij}), (l(a_{im}) + l(a_{mj}) + 1)] \quad (2)$$

Todos os elementos nos fatores  $LU$  de  $A$  tem nível zero. Se uma fatoração incompleta de nível 1 é realizada, somente os elementos com ordem menor ou igual a um são aceitos, e os elementos de maior ordem rejeitados. Observe que são estes elementos que entram no cálculo do *discard*.

O valor do *discard* para o nó  $i$  é dado por,

$$\text{discard}(i) = \sum (\text{elementos descartados})^2 \quad (3)$$

O algoritmo MDF para uma IIU(1) é denotado por MDF(1).

#### Algoritmo MDF.

Inicialização:

$$A = A_n$$

para cada  $a_{ij} \neq 0$

$$l(a_{ij}) = 0$$

para cada nó  $i$

calcule  $\text{discard}(i)$

para  $k=1, \dots, n$

. escolha o nó com o mínimo  $\text{discard}$

. elimine o nó  $j$

. para todos os nós  $k$  vizinhos de  $j$

atualize o  $\text{discard}(k)$

No processo de eliminação e cálculo do *discard*, é possível obter vários nós com o mesmo *discard*, principalmente nos estágios iniciais da ordenação. Nesses casos, são necessários estratégias de desempate (*tie-breaking*). Utilizar-se-á neste trabalho, como primeiro critério o nó com mínima deficiência (menor enchimento, caso este nó seja eliminado) e se mesmo assim ainda existam nós empatados é procurado o nó com o menor valor na ordenação original.

#### MÉTODO DE RESOLUÇÃO

No método GMRES (*Generalized Minimal Residual*) de Saad e Schultz (1986), a cada passo minimiza-se a norma do vetor  $r_n = b - Ax_n$  no subespaço de Krylov  $K_k = \text{span} \{r_n, Ar_n, \dots, A^{k-1}r_n\}$ . Na prática a dimensão  $k$  do subespaço de Krylov é determinada no sentido de reduzir o custo do algoritmo e restrição de memória. No processo de minimização, busca-se uma base ortonormal de  $K_k$  e posteriormente resolve-se um problema de quadrados mínimos. Os resultados deste trabalho correspondem a utilização do método de Gram-Schmidt modificado sucedido por rotações no plano.

**Algoritmo GMRES.** Dado o vetor aproximação inicial  $x_n$  e a matriz de preconditionamento  $M$ , faça

passo 1 - inicialização

$$r_n = b - Ax_n \text{ e } v_1 = r_n / \|r_n\|$$

passo 2 - ortogonalização

para  $j=1, \dots, m$

$$z_j = M^T v_j$$

$$w = Az_j$$

$$u_{ij} = (w, v_i), i=1, \dots, j$$

$$w = w - \sum_{i=1}^j u_{ij} v_i$$

$$u_{j+1,j} = \|w\|$$

$$v_{j+1} = w / u_{j+1,j}$$

passo 3 - solução corrente

$$x_m = x_n + V_m y_m \text{ onde } y_m = \min \| \|e_1 - U_m y\| \| e \beta = \|r_n\|$$

passo 4 - recomeço

$$r_m = b - Ax_m$$

se  $\|r_m\| / \|r_n\| < \text{TOL}$  pare

senão

$$x_n = x_m \text{ e } v_1 = r_m / \|r_m\| \text{ vá para o passo 2}$$

No algoritmo apresentado  $e_1$  é o vetor canônico de  $n+1$  componentes.  $\text{TOL}$  é a tolerância,  $V_m = [z_1, \dots, z_m]$  e  $U_m$  é uma matriz de ordem  $(m+1) \times m$  do tipo Hessenberg, obtida dos

elementos  $u_{ij}$  gerados no algoritmo.

#### PROBLEMA ANALISADO

Um dos problemas utilizado para verificar a eficiência do MDF é modelo black-oil, bifásico (óleo-água) em meios porosos (Palagi, 1992, Marcondes, 1993). As equações são discretizadas utilizando um esquema totalmente implícito no tempo, e para discretização espacial são utilizadas malhas não estruturadas de Voronoi. Para geração das malhas foi utilizado o gerador desenvolvido por Maliska Jr. (1993). Uma vez que, um esquema totalmente implícito é empregado, existem duas incógnitas por nó ( $P, S_n$ ), originando uma matriz jacobiana blocada, com cada bloco sendo  $2 \times 2$ . D'Azevedo et al. (1991) não aplicam o MDF para a matriz jacobiana completa, e sim, para uma matriz reduzida com forte influência da pressão, considerando que a pressão domina a convergência do *solver*. Uma típica linha da matriz jacobiana é apresentada na Fig. 2a. A matriz reduzida é originada multiplicando cada linha de blocos da matriz jacobiana (Fig. 2a) pela inversa do bloco diagonal, originando a linha blocada apresentada na Fig. 2b. Considerando as entradas  $\epsilon$  pequenas, do ponto de vista de ordenação, resulta que a pressão independe da saturação. Este processo é repetido para todas as linhas de blocos e o MDF é aplicado para a matriz reduzida de pressão, obtida no final deste processo.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \begin{bmatrix} P & S_n \\ X & X \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_n \\ X & X \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_n \\ X & X \end{bmatrix} \\ \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} P & S_n \\ X & \epsilon \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_n \\ X & X \end{bmatrix} \\ \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} P & S_n \\ X & \epsilon \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_n \\ X & X \end{bmatrix} \end{array}$$

□ - Equação da pressão

Fig. 2 - Sequência necessária para originar a equação reduzida de pressão

#### RESULTADOS

Para avaliar o desempenho do GMRES com a ordenação MDF sob o efeito de diferentes ordenações geométricas, consider-se-á, primeiramente, dois dos problemas abordados por D'Azevedo et al. (1992a). Considere o problema,

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial P}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial P}{\partial y}) = -q \quad (4)$$

na região  $x \in [0,1]$  e  $y \in [0,2]$ , usando um esquema de diferenças finitas com células centradas e fluxo nulo nas fronteiras. A malha é uniformemente espaçada, com espaçamento  $h=1/30$  (30 células na direção  $x$  e 60 na direção  $y$ ). O termo fonte é dado por

$$q(x,y) = \begin{cases} -1/h^2 & \text{em } (x,y) = (h/2, h/2) \\ 1/h^2 & \text{em } (x,y) = (1-h/2, 2-h/2) \\ 0 & \text{em } (x,y) = (1-h/2, 2-h/2) \end{cases} \quad (5)$$

No trabalho de D'Azevedo et al. (1992a) STRONGY corresponde a ( $K_x = 1, K_y = 1000$ ) e STRONGX a ( $K_x = 1000, K_y = 1$ ). Em todas as tabelas apresentadas TS corresponde ao tempo no *solver* e NIS o número de iterações no *solver*. A ordenação MDF é recomendada para problemas transientes, pois desta forma o custo da ordenação pode ser amortecido pela redução no custo da obtenção de cada sistema linear. Desta forma, nos tempos das tabelas 1 e 2, não está embutido

o tempo de ordenação. Nas demais tabelas o custo da ordenação está incluído no valor de IS. Todos os tempos apresentados foram normalizados dividindo o menor tempo da tabela pelo seu respectivo valor.

A Tab. 1 apresenta os resultados obtidos para o problema STRONGY. Observa-se que a ordenação original tem efeito significativo no MDF, que apresenta uma melhora somente no caso da ordenação vertical. O melhor caso ocorreu com ordenação horizontal e a aplicação do MDF a esta ordenação não apresentou efeito positivo. Por outro lado, na Tab. 2 acontece uma acentuada melhoria no desempenho do GMRES com MDF em ambas as ordenações, com mais efeito na horizontal. Conforme comentado em Behie e Forsyth (1984), se  $K_v \gg K_h$ , um método baseado em ILU (para qualquer nível  $> 0$ ) converge mais rápido se uma ordenação vertical for utilizado. Note-se que isto ocorre na Tab. 1, para a ordenação horizontal e Tab. 2 para a ordenação vertical. D'Azevedo et al. (1992a) apresentou resultados para estes dois casos, utilizando o gradiente conjugado (GC) somente com ordenação vertical, o que não permite avaliar adequadamente as observações feitas. Apesar de não reportado neste trabalho, utilizando o GC foram obtidos os mesmos resultados obtidos por D'Azevedo et al. (1992a). A diferença é que o GMRES é mais sensível a ordenação porque o custo do mesmo aumenta com o número de iterações.

Tab. 1 - Resultados para o problema STRONGY utilizando GMRES

Ordenação	ILU							
	0		1		2		3	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Vertical	14.55	59	2.51	19	2.68	19	1.34	10
MDF-vertical	14.53	59	1.80	14	1.62	13	1.16	9
Horizontal	5.21	32	1.47	13	1.60	13	1.01	8
MDF-Horizontal	5.25	32	1.43	12	1.31	11	1.00	8

Tab. 2 - Resultados para o problema STRONGX utilizando GMRES

Ordenação	ILU							
	0		1		2		3	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Vertical	4.46	32	4.68	32	4.67	31	4.81	30
MDF-vertical	4.46	32	1.26	12	1.13	11	1.00	9
Horizontal	12.36	59	12.06	57	11.62	55	11.62	53
MDF-Horizontal	12.48	59	1.53	14	1.55	14	1.00	9

Os casos analisados a seguir referem-se ao escoamento bifásico água-óleo em meios porosos. O primeira geometria testada é um quarto da configuração de cinco poços. Os dados físicos e geométricos deste caso estão listados na Tab. 3 e a malha utilizada é apresentada na Fig. 3. As curvas de permeabilidades relativa e razão de viscosidades são dados pela Eq. 6. Os resultados correspondentes a este caso estão listados na Tab. 4. O tamanho máximo da base foi 10.

Tab. 3 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 1

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$K=12,5 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ $h=6,09 \text{ m}$ $A=1,6 \times 10^5 \text{ m}^2$ $\phi=0,08$	$S_i=0$ $P_i=6,893 \times 10^5 \text{ Pa}$	$\mu_o=10^{-3} \text{ Pa.s}$ $\mu_w=1/M \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ $ \bar{q}_p = \bar{q}_i =1,110^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $c_o=c_w=1,45 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$

$$K_{rw} = S_w^2$$

$$K_{ro} = (1 - S_w)^2$$

$$M = \mu_o / \mu_w \quad (6)$$

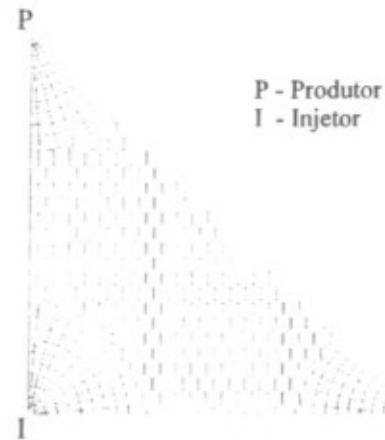


Fig. 3 - Malha hexagonal híbrida com 445 volumes

Tab. 4 - Resultados para a conf. de cinco poços

Ordenação	ILU					
	0		1		2	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Natural	2,77	135.223	1,12	40.581	1,30	36.050
Vertical	2,67	131.445	1,63	67.275	1,19	34.625
Horizontal	2,95	132.695	1,91	69.221	1,17	34.671
MDF-Natural	2,75	119.681	1,08	34.940	1,05	24.014
MDF-Vertical	2,52	120.770	1,17	37.649	1,02	23.271
MDF-Horizontal	2,41	119.482	1,21	40.392	1,00	22.570

Na Tab. 4 observa-se que o MDF apresentou sensibilidade a todas as ordenações utilizadas, sendo o MDF-Horizontal com ILU(2) a ordenação mais robusta. Observe que para ILU(1) a ordenação natural foi a ordenação mais eficiente. Para os diversos níveis de ILU e ordenações empregadas, a aplicação da ordenação MDF sempre resultou num menor número de iterações no solver. Entretanto, isto não garante sempre menor tempo de CPU uma vez que o MDF, da forma como proposto inicialmente por D'Azevedo et al. (1992a), não verifica a importância dos elementos criados na fatoração incompleta.

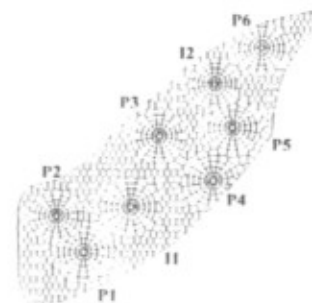


Fig. 4 - Malha hexagonal híbrida com 1026 volumes

A Fig. 4 apresenta uma configuração mais próxima daquelas encontradas em recuperação de petróleo. A configuração é composta de 8 (oito) poços, sendo 6 (seis) produtores e 2 (dois) injetores. Os resultados que serão apresentados a seguir foram reproduzidos com uma malha hexagonal híbrida, com 1024 volumes. A malha tem 16 volumes ao longo do ângulo de abertura de cada poço. Os

dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 5 e as curvas de permeabilidade relativa e viscosidades são dados na Eq. (7), todos no SI. Neste caso, não foi obtida convergência do GMRES, com base 10, mesmo permitindo-se vários recomenços. O tamanho máximo da base foi 50.

$$K_{rw} = (S - 0.2)(-250S^2 + 32S - 55)$$

$$K_{ko} = 1 - k_{rw} \quad (7)$$

$$\mu_w = 10^{-3}(1 + 1.45^{-12}(P - 1.37 \cdot 10^7))$$

$$\mu_o = 1.1163 \cdot 10^{-2}(1 + 1.45^{-12}(P - 1.37 \cdot 10^7))$$

Tab. 5 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 2

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$K=3 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ $h = 15 \text{ m}$ $A = 1,82 \times 10^6 \text{ m}^2$ $\phi = 0,30$	$S_i = 0,3$ $P_i = 2,413 \times 10^7 \text{ Pa}$	$\bar{q}_{p1} = \bar{q}_{p3} = -9,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p2} = -1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p4} = -5,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p5} = \bar{q}_{p6} = -7,36 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i1} = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i2} = 2,024 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $c_o = c_w = 7,25 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$

Tab. 6 - Resultados para a conf. de oito poços

Ordenação	ILU					
	0		1		2	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Natural	2,03	70.299	1,43	46.978	1,33	33.831
Vertical	1,76	64.124	1,14	42.325	1,00	31.044
Horizontal	1,80	64.785	1,16	42.554	1,10	31.520
MDF-Natural	1,77	64.169	1,18	37.843	1,12	30.633
MDF-Vertical	1,76	64.169	1,23	38.189	1,18	30.609

Observa-se na Tab. 6 que o MDF foi a ordenação mais robusta em termos do número de iterações no solver para níveis de ILU 1 e 2. Entretanto, menores tempos de CPU foram obtidos com as ordenações vertical e horizontal. Observe-se que estas ordenações tentam minimizar a largura de banda do Jacobiano. Apesar da malha empregada ser bastante não estruturada e possuir uma heterogeneidade acentuada, o MDF não foi capaz de fornecer a melhor ordenação.

A Fig. 5 apresenta uma malha quase estruturada para o mesmo reservatório do caso 2. A diferença é que esta malha tem conectividade aproximadamente constante e o Jacobiano resultante é bastante homogêneo. A única diferença com relação aos dados do caso anterior é que esta configuração é composta de dois poços produtores e um injetor. A vazão de cada produtor foi  $1.84 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  e a do injetor  $3.68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ .

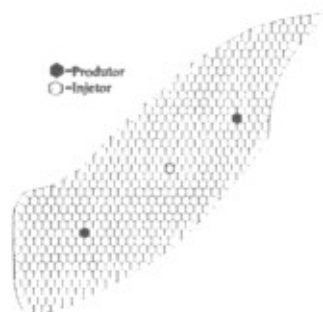


Fig. 5 - Malha hexagonal com 559 volumes

A Tab. 7 apresenta os resultados obtidos. Novamente, observa-se que a ordenação MDF foi a mais robusta em termos de iterações para níveis de ILU 1 e 2. Novamente, a ordenação

vertical foi mais robusta, em termos de tempo de CPU.

Tab. 7 - Resultados para a malha hexagonal

Ordenação	ILU					
	0		1		2	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Natural	1,68	61.401	1,55	44.879	1,63	34.147
Vertical	1,31	48.218	1,06	36.348	1,00	25.449
Horizontal	1,30	50.749	1,21	39.743	1,09	28.365
MDF-Natural	1,40	49.602	1,23	34.101	1,19	23.551
MDF-Vertical	1,30	49.428	1,18	33.095	1,14	23.451
MDF-Horizontal	1,45	49.519	1,32	33.053	1,18	23.538

## CONCLUSÕES

Os resultados apresentados mostram que a ordenação MDF é robusta para níveis de ILU igual ou superior a 1, reduzindo o número de iterações no solver. Entretanto, a mesma é grandemente afetada pela ordenação original. Em alguns casos esta dependência foi diminuída com o aumento do nível da fatoração incompleta. Talvez, uma maior robustez do método seja obtida aliando-se ao MDF uma estratégia de análise do elementos criados nos fatores LU como foi realizado por D'Azevedo et al. (1992b).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- # D'Azevedo, E. F., Forsyth, P. A e Tang, W. -P.: "An Automatic Ordering Method for Incomplete Factorization Iterative Solvers", apresentado no *11th Symposium on Reservoir Simulation*, Anaheim, 1991. Paper SPE 2126.
- # D'Azevedo, E. F., Forsyth, P. A e Tang, W. -P.: "Ordering Methods for Preconditioned Conjugate Gradient Methods Applied to Unstructured Grid Problems", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13, pp. 944-961, 1992.
- # D'Azevedo, E. F., Forsyth, P. A e Tang, W. -P.: "Towards a Cost-Effective ILU Preconditioner With High Level Fill", *BIT*, 32, pp. 442-463, 1992.
- # Behie, A. e Forsyth, P. A.: "Incomplete Factorization Methods for Fully Implicit Simulation of Enhanced Oil Recovery", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 5, pp. 543-561, 1984.
- # Maliska Jr., C. R.: "Um Robusto Gerador de Diagramas de Voronoi para Discretização de Domínios Irregulares", XIV CILAMCE - São Paulo, SP, Dezembro, 1993.
- # Marcondes, "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas Não-Estruturadas de Voronoi", *Proposta de Tese*, Dep. Eng. Mecânica, UFSC, 1993.
- # Marcondes, F., Zambaldi, M. C e Maliska, C. R.: "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas de Voronoi", *V Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 335-338, São Paulo, SP, Dezembro, 1994.
- # Palagi, C.: "Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs", PhD dissertation, Stanford University, Stanford (May, 1992).
- # Saad, Y e Schultz, M. H.: "GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7, pp.857-869, 1986.

## ABSTRACT

The MDF (Minimum Fill Discarded) method is applied to GMRES for the solution of several problems using structured and non-structured grids. The effects of the geometrical ordering and the level of the ILU employed are investigated. The CPU time and the number of iteration required are reported.

## APLICAÇÃO DA ORDENAÇÃO MDF AO MÉTODO GMRES

*Francisco Marcondes*  
CLOVIS R. MALISKA

FRANCISCO MARCONDES- Depto. Eng. Mecânica -UFPB, Campina Grande-PB  
MARIO C. ZAMBALDI- Depto. Matemática -UFSC, Florianópolis-SC  
CLOVIS R. MALISKA- Depto. Eng. Mecânica -UFSC, Florianópolis-SC

### RESUMO

*No presente trabalho é aplicado a metodologia MDF (Minimal Fill Discarded) ao método iterativo GMRES. São apresentados resultados para uma série de problemas empregando malhas estruturadas e não estruturadas. É investigado o efeito de diversas ordenações geométricas na ordenação MDF. Verifica-se também, o efeito de diversos níveis de fatoração nas ordenações empregadas. Os resultados são apresentados em termos de tempo de CPU normalizado e número de iterações no solver.*

### INTRODUÇÃO

Na resolução de problemas da engenharia utilizando métodos numéricos (diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, etc), as equações diferenciais descrevendo um determinado problema físico são discretizadas e linearizadas, por algum esquema, de tal forma a se obter um sistema linear de equações. Para a resolução dos sistemas lineares pode-se utilizar métodos diretos ou métodos iterativos. Métodos iterativos são mais utilizados principalmente por dois motivos. Primeiro, requerem pouca memória e tem baixo custo por iteração. Além disso, como a maioria dos problemas existentes são não lineares, a solução do sistema linear representa uma solução intermediária cujo custo em obtê-la não deve ser excessivo.

Dentre os métodos iterativos mais comumente utilizados estão os métodos não estacionários (ORTHOMIN, CGS, Bi-CGSTAB, GMRES, etc). A taxa de convergência destes métodos depende basicamente de dois fatores: tipo de preconditionador utilizado e ordenação das incógnitas. É bem conhecido que preconditionadores baseados em uma fatoração incompleta (ILU - *incomplete LU factorization*) melhoram sensivelmente a taxa de convergência destes métodos. No que concerne a ordenação das incógnitas, existem uma série de métodos baseados na estrutura da matriz como mínimo grau, mínima deficiência, *red-black*, etc. Entretanto, conforme descrito em D'Azevedo et al (1992a), estes métodos são baseados somente no grafo da matriz e não podem detectar anisotropias nos seus elementos. Anisotropia pode ser originada pelo emprego de malhas não estruturadas com regiões de refino localizado, através de materiais ou meios heterogeneos ou através de ambos. No trabalho de D'Azevedo et al (1992a) é mostrado que a solução de um problema de condução de calor com ordenação natural y-x, é grandemente afetado pelos valores das condutividades térmicas nessas direções. Baseado neste fato, os mesmos autores, propuseram um método de ordenação das incógnitas baseado não só na estrutura da matriz, mas também nos seus valores numéricos. Este esquema, denominado MDF (*Minimum Discarded Fill*), também está associado a uma fatoração incompleta. A idéia do método é ordenar as incógnitas que minimizem localmente o enchimento a ser descartado durante a fatoração incompleta. Este método tem sido utilizado nos trabalhos de D'Azevedo et al (1991, 1992a) para problemas não simétricos e simétricos, respectivamente, utilizando malhas estruturadas e não-estruturadas.

Neste trabalho é verificado a potencialidade da metodologia MDF, aplicando a mesma a problemas de condução de calor e aqueles inerentes à solução de problemas de petróleo utilizando malhas não estruturadas de Voronoi, empregando como acelerador de convergência o método GMRES. Pretende-se utilizar diversas grades de Voronoi, grades híbridas (malhas cilíndricas em voltas dos poços e hexagonal no restante do domínio, Palagi (1993), Marcondes et al (1994)), e malhas hexagonais distorcidas. O modelo físico empregado é o black-oil bifásico (óleo-água) e será estudado apenas geometrias 2D. O esquema de integração temporal é totalmente implícito. O esquema de armazenamento das variáveis é blocado e o sistema de equações lineares é preconditionado a direita.

### ORDENAÇÃO MDF

A ordenação das incógnitas através do MDF é realizada durante a fatoração incompleta da matriz jacobiana ordenando os nós que tiverem menores *discard* (D'Azevedo et al, 1991). Para um dado nível da fatoração incompleta, o *discard* para o nó *i* é calculado com os elementos que não fazem parte dos fatores *L* e *U*. A Fig. 1 apresenta os elementos que participarão do cálculo do *discard* para o nó *I* (pivô) quando uma fatoração incompleta de nível (0) for realizada. Para cada posição ( $a_{ij}$ ) na matriz é associado um nível  $k(a_{ij})$ . Inicialmente,

$$k(a_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{se } a_{ij} \neq 0 \\ \infty & \text{se } a_{ij} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

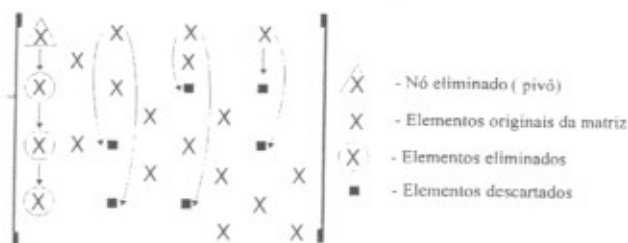


Fig. 1 - Representação da eliminação do nó I para uma ILU(0)

No passo *m* da eliminação, define-se

$$k(a_{ij}) = \min[k(a_{ij}), (k(a_{im}) + k(a_{mj}) + 1)] \quad (2)$$

Todos os elementos nos fatores  $LU$  de  $A$  tem nível zero. Se uma fatoração incompleta de nível 1 é realizada, somente os elementos com ordem menor ou igual a um são aceitos, e os elementos de maior ordem rejeitados. Observe que são estes elementos que entram no cálculo do  $discard$ .

O valor do  $discard$  para o nó  $i$  é dado por.

$$discard(i) = \sum (\text{elementos descartados})^2 \quad (3)$$

O algoritmo MDF para uma H.U(1) é denotado por MDF(1).

#### Algoritmo MDF:

Inicialização:

$$A = A_n$$

para cada  $a_{ij} \neq 0$

$$l(a_{ij}) = 0$$

para cada nó  $i$

calcule  $discard(i)$

para  $k=1, \dots, n$

. escolha o nó com o mínimo  $discard$

. elimine o nó  $j$

. para todos os nós  $k$  vizinhos de  $j$

atualize o  $discard(k)$

No processo de eliminação e cálculo do  $discard$ , é possível obter vários nós com o mesmo  $discard$ , principalmente nos estágios iniciais da ordenação. Nesses casos, são necessários estratégias de desempate (*tie-breaking*). Utilizar-se-á neste trabalho, como primeiro critério o nó com mínima deficiência (menor enchimento, caso este nó seja eliminado) e se mesmo assim ainda existam nós empatados é procurado o nó com o menor valor na ordenação original.

#### MÉTODO DE RESOLUÇÃO

No método GMRES (*Generalized Minimal Residual*) de Saad e Schultz (1986), a cada passo minimiza-se a norma do vetor  $r_n = b - Ax_n$  no subespaço de Krylov  $K_k = \text{span} \{r_n, Ar_n, \dots, A^{(k-1)}r_n\}$ . Na prática a dimensão  $k$  do subespaço de Krylov é determinada no sentido de reduzir o custo do algoritmo e restrição de memória. No processo de minimização, busca-se uma base ortonormal de  $K_k$  e posteriormente resolve-se um problema de quadrados mínimos. Nos resultados deste trabalho corresponde a utilização do método de Gram-Schmidt modificado sucedido por rotações no plano.

**Algoritmo GMRES.** Dado o vetor aproximação inicial  $x_n$  e a matriz de preconditionamento  $M$ , faça

passo 1 - inicialização

$$r_n = b - Ax_n \text{ e } v_1 = r_n / \|r_n\|$$

passo 2 - ortogonalização

para  $j=1, \dots, m$

$$z_j = M^T v_j$$

$$w = Az_j$$

$$u_{ij} = (w, v_j), i=1, \dots, j$$

$$w = w - \sum_{i=1}^j u_{ij} v_i$$

$$u_{j+1,j} = \|w\|$$

$$v_{j+1} = w / u_{j+1,j}$$

passo 3 - solução corrente

$$x_m = x_n + V_m z_m \text{ onde } z_m = \min \| \beta e_1 - U_m z \| \text{ e } \beta = \| r_n \|$$

passo 4 - recomeço

$$r_m = b - Ax_m$$

se  $\|r_m\| / \|r_n\| < \text{TOL}$  pare

senão

$$x_n = x_m \text{ e } v_1 = r_m / \|r_m\| \text{ vá para o passo 2}$$

No algoritmo apresentado  $e_1$  é o vetor canônico de  $n+1$  componentes.  $\text{TOL}$  é a tolerância,  $V_m = [v_1, \dots, v_m]$  e  $U_m$  é uma matriz de ordem  $(m+1) \times m$  do tipo Hessenberg, obtida dos

elementos  $u_{ij}$  gerados no algoritmo.

#### PROBLEMA ANALISADO

Um dos problemas utilizado para verificar a eficiência do MDF é modelo black-oil, bifásico (óleo-água) em meios porosos (Palagi, 1992, Marcondes, 1993). As equações são discretizadas utilizando um esquema totalmente implícito no tempo, e para discretização espacial é utilizado malhas não estruturadas de Voronoi. Para geração das malhas foi utilizado o gerador desenvolvido por Maliska, Jr. (1993). Uma vez que, um esquema totalmente implícito é empregado, existem duas incógnitas por nó ( $P, S_w$ ), originando uma matriz jacobiana blocada, com cada bloco sendo  $2 \times 2$ . D'Azevedo et all (1991) não aplicam o MDF para a matriz jacobiana completa, e sim, para uma matriz reduzida com forte influência da pressão, considerando que a pressão domina a convergência do solver. Uma típica linha da matriz jacobiana é apresentada na Fig. 2a. A matriz reduzida é originada multiplicando cada linha de blocos da matriz jacobiana (Fig. 2a) pela inversa do bloco diagonal, originando a linha blocada apresentada na Fig. 2b. Considerando as entradas  $\epsilon$  pequenas, do ponto de vista de ordenação, resulta a pressão independente da saturação. Este processo é repetido para todas as linhas de blocos e o MDF é aplicado para a matriz reduzida de pressão, obtida no final deste processo.

$$\begin{array}{l} \text{(a)} \quad \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & X \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & X \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & X \end{bmatrix} \\ \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & \epsilon \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ X & \epsilon \end{bmatrix} \\ \text{(c)} \quad \begin{bmatrix} P & S_w \\ \epsilon & X \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} P & S_w \\ \epsilon & X \end{bmatrix} \end{array}$$

[ ] - Equação da pressão

Fig. 2 - Sequência necessária para originar a equação reduzida de pressão

#### RESULTADOS

Para avaliar o desempenho do GMRES com a ordenação MDF sob o efeito de diferentes ordenações geométricas, consider-se-á, primeiramente, dois dos problemas abordados por D'Azevedo et all (1992a). Considere o problema,

$$\frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial P}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial P}{\partial y}) = -q \quad (4)$$

na região  $x \in [0,1]$  e  $y \in [0,2]$ , usando um esquema de diferenças finitas com células centradas e fluxo nulo nas fronteiras. A malha é uniformemente espaçada, com espaçamento  $h=1/30$  (30 células na direção  $x$  e 60 na direção  $y$ ). O termo fonte é dado por

$$q(x,y) = \begin{cases} -1/h^2 & \text{em } (x,y) = (h/2, h/2) \\ 1/h^2 & \text{em } (x,y) = (1-h/2, 2-h/2) \\ 0 & \text{em } (x,y) = (1-h/2, 2-h/2) \end{cases} \quad (5)$$

No trabalho de D'Azevedo et all (1992a) STRONGY corresponde a ( $K_x=1, K_y=1000$ ) e STRONGX a ( $K_x=1000, K_y=1$ ). Em todas as tabelas apresentadas TS corresponde ao tempo no *solver* e NIS o número de iterações no *solver*. A ordenação MDF é recomendada para problemas transientes, pois desta forma o custo da ordenação pode ser amortecido pela redução no custo da obtenção de cada sistema linear. Desta forma, nos tempos das tabelas 1 e 2, não está embutido

o tempo de ordenação. Nas demais tabelas o custo da ordenação está incluído no valor de TS. Todos os tempos apresentados foram normalizados, dividindo o menor tempo da tabela pelo seu respectivo valor.

A Tab. 1 apresenta os resultados obtidos para o problema STRONGY. Observa-se que a ordenação original tem efeito significativo no MDF, que apresenta uma melhora somente no caso da ordenação vertical. O melhor caso ocorreu com ordenação horizontal e a aplicação do MDF a esta ordenação não apresentou efeito positivo. Por outro lado, na Tab. 2 acontece uma acentuada melhoria no desempenho do GMRES com MDF em ambas as ordenações, com mais efeito na horizontal. Conforme comentado em Behie e Forsyth (1984), se  $K_r \gg K_v$ , um método baseado em ILU (para qualquer nível  $> 0$ ) converge mais rápido se uma ordenação vertical for utilizado. Note-se que isto ocorre na Tab. 1, para a ordenação horizontal e Tab. 2 para a ordenação vertical. D'Azevedo et al (1992a) apresentou resultados para estes dois casos, utilizando o gradiente conjugado (GC) somente com ordenação vertical, o que não permite avaliar adequadamente as observações feitas. Apesar de não reportado neste trabalho, utilizando o GC foram obtidos os mesmos resultados obtidos por D'Azevedo et al (1992a). A diferença é que o GMRES é mais sensível a ordenação porque o custo do mesmo aumenta com o número de iterações.

Tab. 1 - Resultados para o problema STRONGY utilizando GMRES

Ordenação	ILU							
	0		1		2		3	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Vertical	14,55	59	2,51	19	2,68	19	1,34	10
MDF-vertical	14,53	59	1,80	14	1,62	13	1,16	9
Horizontal	5,21	32	1,47	13	1,60	13	1,01	8
MDF-Horizontal	5,25	32	1,43	12	1,31	11	1,00	8

Tab. 2 - Resultados para o problema STRONGX utilizando GMRES

Ordenação	ILU							
	0		1		2		3	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Vertical	4,46	32	4,68	32	4,67	31	4,81	30
MDF-vertical	4,46	32	1,26	12	1,13	11	1,00	9
Horizontal	12,36	59	12,06	57	11,62	55	11,62	53
MDF-Horizontal	12,48	59	1,53	14	1,55	14	1,00	9

Os casos analisados a seguir referem-se ao escoamento bifásico água-óleo em meios porosos. O primeira geometria testada é um quarto da configuração de cinco poços. Os dados físicos e geométricos deste caso estão listados na Tab. 3 e a malha utilizada é apresentada na Fig. 3. As curvas de permeabilidades relativa e razão de viscosidades são dados pela Eq. 6. Os resultados correspondentes a este caso estão listados na Tab. 4. O tamanho máximo da base foi 10.

Tab. 3 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 1

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$K=12,5 \times 10^{15} \text{ m}^2$ $h=6,09 \text{ m}$ $A=1,6 \times 10^5 \text{ m}^2$ $\phi=0,08$	$S_i=0$ $P_i=6,893 \times 10^5 \text{ Pa}$	$\mu_o=10^{-3} \text{ Pa.s}$ $\mu_w=1/M \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ $ \bar{q}_p = \bar{q}_i =1,110^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $c_o=c_w=1,45 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$

$$K_{rw} = S_w^2$$

$$K_{ro} = (1 - S_w)^2$$

$$M = \mu_o/\mu_w \quad (6)$$

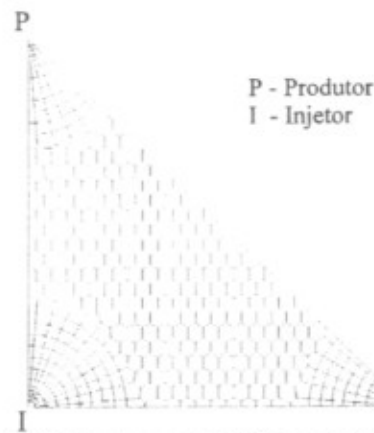


Fig. 3 - Malha hexagonal híbrida com 445 volumes

Tab. 4 - Resultados para a conf. de cinco poços

Ordenação	ILU					
	0		1		2	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Natural	2,77	135.223	1,12	40.581	1,30	36.050
Vertical	2,67	131.445	1,63	67.275	1,19	34.625
Horizontal	2,95	132.695	1,91	69.221	1,17	34.671
MDF-Natural	2,75	119.681	1,08	34.940	1,05	24.014
MDF-Vertical	2,52	120.770	1,17	37.649	1,02	23.271
MDF-Horizontal	2,41	119.482	1,21	40.392	1,00	22.570

Na Tab. 4 observa-se que o MDF apresentou sensibilidade a todas as ordenações utilizadas, sendo o MDF-Horizontal com ILU(2) a ordenação mais robusta. Observe que para ILU(1) a ordenação natural foi a ordenação mais eficiente. Para os diversos níveis de ILU e ordenações empregadas, a aplicação da ordenação MDF sempre resultou num menor número de iterações no *solver*. Entretanto, isto não garante sempre menor tempo de CPU uma vez que o MDF, da forma como proposto inicialmente por D'Azevedo et al (1992a), não verifica a importância dos elementos criados na fatoração incompleta.

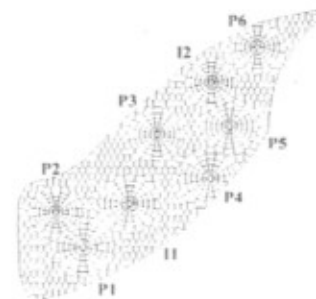


Fig. 4 - Malha hexagonal híbrida com 1026 volumes

A Fig. 4 apresenta uma configuração mais próxima daquelas encontradas em recuperação de petróleo. A configuração é composta de 8 (oito) poços, sendo 6 (seis) produtores e 2 (dois) injetores. Os resultados que serão apresentados a seguir foram reproduzidos com uma malha hexagonal híbrida, com 1024 volumes. A malha tem 16 volumes ao longo do ângulo de abertura de cada poço. Os

dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 5 e as curvas de permeabilidade relativa e viscosidades são dados na Eq. (7), todos no SI. Neste caso, não foi obtida convergência do GMRES, com base 10, mesmo permitindo-se vários recomeços. O tamanho máximo da base foi 50.

$$K_{rw} = (S - 0.2)(-250S^2 + 32S - 55)$$

$$K_{lo} = 1 - k_{rw} \quad (7)$$

$$\mu_w = 10^{-3}(1 + 1.45 \cdot 10^{-12}(P - 1.37 \cdot 10^7))$$

$$\mu_o = 1.1163 \cdot 10^{-2}(1 + 1.45 \cdot 10^{-12}(P - 1.37 \cdot 10^7))$$

Tab. 5 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 2

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$K=3 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ $h = 15 \text{ m}$ $A = 1,82 \times 10^6 \text{ m}^2$ $\phi = 0,30$	$S_i = 0,3$ $P_i = 2,413 \times 10^7 \text{ Pa}$	$\bar{q}_{p1} = \bar{q}_{p3} = -9,2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p2} = -1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p4} = -5,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p5} = \bar{q}_{p6} = -7,36 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i1} = 2,94 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i2} = 2,024 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $c_w = c_o = 7,25 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$

Tab. 6 - Resultados para a conf. de oito poços

Ordenação	ILU					
	0		1		2	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Natural	2,03	70.299	1,43	46.978	1,33	33.831
Vertical	1,76	64.124	1,14	42.325	1,00	31.044
Horizontal	1,80	64.785	1,16	42.554	1,10	31.520
MDF-Natural	1,77	64.169	1,18	37.843	1,12	30.633
MDF-Vertical	1,76	64.169	1,23	38.189	1,18	30.609

Observa-se na Tab. 6 que o MDF foi a ordenação mais robusta em termos de número e iterações no solver para níveis de ILU 1 e 2. Entretanto, menores tempos de CPU foram obtidos com as ordenações vertical e horizontal. Observe-se que estas ordenações tentam minimizar a largura de banda do Jacobiano. Apesar da malha empregada ser bastante não estruturada e possuir uma heterogeneidade acentuada, o MDF não foi capaz de fornecer a melhor ordenação.

A Fig. 5 apresenta uma malha quase estruturada para o mesmo reservatório do caso 2. A diferença é que esta malha tem conectividade aproximadamente constante e o Jacobiano resultante é bastante homogêneo. A única diferença com relação aos dados do caso anterior é que esta configuração é composta de dois poços produtores e um injetor. A vazão de cada produtor foi  $1.84 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  e a do injetor  $3.68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ .

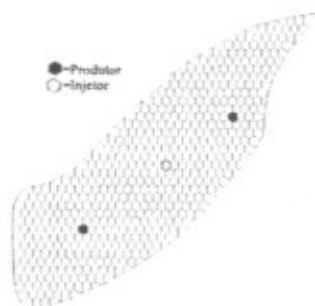


Fig. 5 - Malha hexagonal com 559 volumes

A Tab. 7 apresenta os resultados obtidos. Novamente, observa-se que a ordenação MDF foi a mais robusta em termos de iterações para níveis de ILU 1 e 2. Novamente, a ordenação

vertical foi mais robusta, em termos de tempo de CPU.

Tab. 7 - Resultados para a malha hexagonal

Ordenação	ILU					
	0		1		2	
	TS	NIS	TS	NIS	TS	NIS
Natural	1,68	61.401	1,55	44.879	1,63	34.147
Vertical	1,31	48.218	1,06	36.348	1,00	25.449
Horizontal	1,30	50.749	1,21	39.743	1,09	28.365
MDF-Natural	1,40	49.602	1,23	34.101	1,19	23.551
MDF-Vertical	1,30	49.428	1,18	33.095	1,14	23.451
MDF-Horizontal	1,45	49.519	1,32	33.053	1,18	23.538

## CONCLUSÕES

Os resultados apresentados mostram que a ordenação MDF é robusta para níveis de ILU igual ou superior a 1, a mesma reduzindo o número de iterações no solver. Entretanto, a mesma é grandemente afetada pela ordenação original. Em alguns casos esta dependência foi diminuída com o aumento do nível da fatoração incompleta. Talvez, uma maior robustez do método seja obtida aliando-se ao MDF uma estratégia de análise de elementos criados nos fatores LU como foi realizado por D'Azevedo et al (1992b).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- # D'Azevedo, E. F., Forsyth, P. A e Tang, W. -P.: "An Automatic Ordering Method for Incomplete Factorization Iterative Solvers", apresentado no *11th Symposium on Reservoir Simulation*, Anaheim, 1991. Paper SPE 2126.
- # D'Azevedo, E. F., Forsyth, P. A e Tang, W. -P.: "Ordering Methods for Preconditioned Conjugate Gradient Methods Applied to Unstructured Grid Problems", *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13, pp. 944-961, 1992.
- # D'Azevedo, E. F., Forsyth, P. A e Tang, W. -P.: "Towards a Cost-Effective ILU Preconditioner With High Level Fill", *BIT*, 32, pp. 442-463, 1992.
- # Behie, A. e Forsyth, P. A.: "Incomplete Factorization Methods for Fully Implicit Simulation of Enhanced Oil Recovery", *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, 5, pp. 543-561, 1984.
- # Maliska, Jr., C. R.: "Um Robusto Gerador de Diagramas de Voronoi para Discretização de Domínios Irregulares", XIV CILAMCE - São Paulo, SP, Dezembro, 1993.
- # Marcondes, "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas Não-Estruturadas de Voronoi", *Proposta de Tese*, Dep. Eng. Mecânica, UFSC, 1993.
- # Marcondes, F., Zambaldi, M. C e Maliska, C. R.: "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas de Voronoi", *V Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 335-338, São Paulo, SP, Dezembro, 1994.
- # Palagi, C.: "Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs", PhD dissertation, Stanford University, Stanford (May, 1992).
- # Saad, Y e Schultz, M. H.: "GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, 7, pp.857-869, 1986.

## ABSTRACT

The MDF (Minimum Fill Discarded) method is applied to GMRES for the solution of several problems using structured and non-structured grids. The effects of the geometrical ordering and the level of the ILU employed are investigated. The CPU time and the number of iteration required are reported.