

# ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE EM ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS INCOMPRESSÍVEIS USANDO MALHAS NÃO- ESTRUTURADAS

**Fábio A. Schneider, Clovis R. Maliska**

SINMEC - Laboratório de Simulação Numérica em  
Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina  
CEP 88040-900 – Florianópolis, SC, Brasil  
e-mail: schneider@sinmec.ufsc.br, maliska@sinmec.ufsc.br  
web page: <http://www.sinmec.ufsc.br>

**Palavras-chave:** Acoplamento pressão-velocidade, Malhas não-estruturadas, escoamentos de fluidos.

**Resumo.** *A solução segregada das equações de conservação da quantidade de movimento e da massa gera o problema do acoplamento pressão-velocidade. Este trabalho apresenta um esquema numérico para o tratamento deste acoplamento em escoamentos bidimensionais incompressíveis utilizando malhas não-estruturadas. A metodologia empregada é semelhante a metodologia CVFEM (Control Volume Based Finite Element) que utiliza malhas não-estruturadas para obtenção dos volumes de controle. É proposta uma equação de correção de pressão similar as usadas nos métodos tipo SIMPLE, que, quando aplicada, envolve um número menor de pontos de pressão do que na formulação tradicional da metodologia CVFEM, simplificando a implementação computacional. É apresentada uma comparação entre o modelo aqui desenvolvido e outras duas formulações: a formulação que emprega Diagramas de Voronoi, que também usa malhas não-estruturadas, e a metodologia tradicional dos volumes finitos para malhas estruturadas.*

## 1 INTRODUÇÃO

O uso de malhas não-estruturadas na solução numérica de problemas de mecânica dos fluidos está se tornando cada vez mais freqüente<sup>1,2,3</sup>. Isto se deve à facilidade com que geometrias bastante irregulares podem ser discretizadas através do uso das malhas não-estruturadas. Tradicionalmente, o método dos elementos finitos sempre se destacou por possuir grande versatilidade geométrica, porém, sem garantir os princípios de conservação nos volumes elementares. Isso motivou a busca de métodos aptos a tratar geometrias bastante irregulares e, ao mesmo tempo, utilizando as técnicas de balanço de conservação das propriedades no volume de controle. Tais métodos foram denominados Control Volume Based Finite Element Method (CVFEM)<sup>4,5</sup>.

Para obter os volumes de controle elementares a partir de uma malha não-estruturada, dispõe-se de algumas técnicas. Uma delas é o método das mediatrizes, onde os volumes são gerados a partir de uma triangulação, normalmente encontrada no método dos elementos finitos. Estes volumes são denominados volumes ou diagramas de Voronoi, e constituem a base da metodologia dos Diagramas de Voronoi<sup>6,7</sup>. Uma outra técnica de obtenção dos volumes é o método das mediatrizes. Esse processo de obtenção dos volumes é empregado no modelo numérico desenvolvido neste trabalho e é comumente encontrado na metodologia CVFEM<sup>4,5</sup>.

O presente trabalho, propõe a solução numérica das equações de Navier-Stokes para escoamento de fluidos através de uma metodologia similar à metodologia CVFEM<sup>8</sup>. A solução segregada das equações de conservação da quantidade de movimento e da equação de conservação da massa gera o problema do acoplamento pressão-velocidade. Para tratar este acoplamento é proposta uma equação de correção de pressão similar às usadas nos métodos tipo SIMPLE<sup>9</sup>, que, quando aplicada, envolve um número menor de pontos de pressão do que na formulação tradicional da metodologia CVFEM<sup>8</sup>, simplificando a implementação computacional.

A metodologia dos Diagramas de Voronoi<sup>6</sup> e a formulação tradicionalmente estruturada<sup>9</sup> do método dos volumes finitos servem como referência para a avaliação do desempenho do método aqui desenvolvido.

Para validação dos esquemas numéricos aplicados e comparações entre as metodologias, o problema teste escolhido foi a convecção forçada em cavidade quadrada, que possui solução de referência<sup>10</sup> obtida com malhas bastante refinadas (129x129).

### 1.1 Revisão Bibliográfica

As primeiras formulações envolvendo volumes poligonais gerados a partir de malhas triangulares surgiram na década de 70. Esta nova metodologia, baseada em volumes de controle poligonais, foi denominada Control Volume Finite Element Method – CVFEM<sup>4</sup>.

Paralelamente, outras metodologias se desenvolveram baseadas em malhas não-estruturadas. Como exemplo podemos citar as metodologias que usam quadriláteros<sup>5</sup> para gerar os volumes de controle, as metodologias que usam a própria triangulação<sup>11</sup> para representar os volumes, e ainda as metodologias que utilizam os volumes de Voronoi<sup>6,7,9</sup>.

O emprego destas metodologias, que usam malhas não-estruturadas, progrediu modestamente dentro do método dos volumes finitos, que sempre foi amplamente aplicado na mecânica dos fluidos computacional, por basear-se na conservação das propriedades em um volume de controle elementar. O grande destaque das últimas duas décadas é o uso de coordenadas generalizadas para discretização do domínio, que se difundiu rapidamente dentro do método devido a facilidade de geração das malhas, que neste caso, são estruturadas.

Com as dificuldades encontradas para discretização de geometrias muito irregulares através de coordenadas generalizadas, a discretização em malhas não-estruturadas tornou-se novamente alvo de estudo. Dentro da mecânica dos fluidos computacional, vários são os trabalhos recentes<sup>2,3,6</sup> que utilizam malhas não-estruturadas.

Atualmente, com emprego cada vez mais freqüente de malhas não-estruturadas, é crescente o interesse pelo desenvolvimento e aprimoramento destes métodos, nos vários temas comumente explorados nos métodos numéricos<sup>6,12,13</sup>.

## 2 FORMULAÇÃO BÁSICA

A formulação proposta neste trabalho, como comentado anteriormente, é similar a proposta na metodologia CVFEM<sup>8</sup> original. A discretização das equações e o emprego da função de interpolação segue a metodologia original. A diferenciação está no tratamento dado ao acoplamento pressão-velocidade que surge da solução segregada das equações de conservação. Os itens a seguir descrevem os aspectos básicos da metodologia CVFEM<sup>8</sup>.

### 2.1 Volume de controle

Uma forma de se obter os volumes de controle não-estruturados é através do método das medianas, onde os volumes são gerados a partir de uma triangulação. Esta triangulação é bastante comum no método dos elementos finitos e é conhecida como triangulação de Delaunay. A Figura 1 representa volumes construídos por este método.

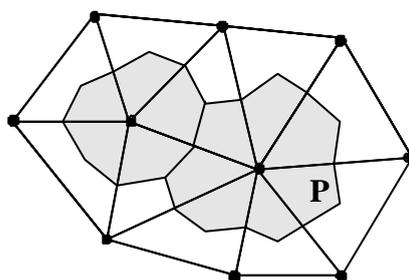


Figura 1 – Volumes finitos originados pelo processo da mediana.

Esse processo de obtenção dos volumes é empregado no modelo numérico desenvolvido neste trabalho e é normalmente encontrado na metodologia CVFEM<sup>8</sup>.

## 2.2 Equações Governantes

Admitindo o fluido como Newtoniano e adotando um sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , temos, para o problema convectivo/difusivo bidimensional transiente, as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + S^u \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + S^v \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u f) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^f \frac{\partial f}{\partial y}\right) + S^f \quad (4)$$

As Equações (1) e (2) são as equações de conservação da quantidade de movimento em  $x$  e  $y$  respectivamente. A Eq. (3) é a equação de conservação da massa e a Eq. (4) é a equação de conservação na forma geral para uma variável genérica  $f$ , onde  $\Gamma^f$  é o coeficiente difusivo,  $S$  representa o termo fonte,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $t$  o tempo.

Condensando os fluxos advectivo e difusivos em um único termo, a Eq. (4) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \nabla \cdot (\vec{J}) = S^f \quad (5)$$

com

$$\vec{J} = \rho \vec{V} f - \Gamma^f \nabla f \quad (6)$$

onde  $\vec{J}$  representa o fluxo total (advectivo e difusivo) e  $\vec{V}$  é o vetor velocidade.

## 2.3 Função de interpolação para $f$

A função de interpolação tem o objetivo de avaliar o valor de uma propriedade genérica  $f$  na interface do volume de controle bem como de suas derivadas. Quando se trata de uma propriedade genérica  $f$ , a idéia básica da metodologia CVFEM<sup>8</sup> é aplicar esta função de interpolação na direção média do escoamento. A Figura 2 ilustra um elemento triangular  $123$  que compõe o volume de controle e seu novo sistema coordenado  $(X, Y)$  alinhado com o escoamento médio  $U_{av}$ . Este escoamento médio representativo do elemento triangular poderá ser uma simples média dos vetores velocidade armazenados nos pontos 1, 2 e 3.

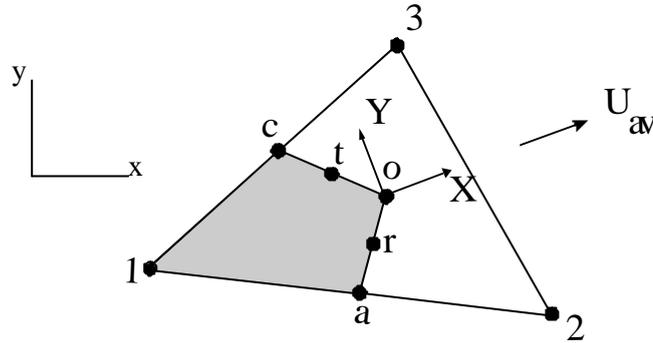


Figura 2 – Elemento triangular e seu novo sistema coordenado (X, Y)

A função de interpolação para  $f$  é obtida resolvendo-se o problema convectivo/difusivo no novo sistema de coordenadas (X, Y), cuja solução fornece

$$f = Ax + BY + C \quad (7)$$

onde a coordenada  $x$  e o número de Peclet são dados por

$$x = \frac{\Gamma^f}{rU_{av}} \left\{ \exp \left[ \frac{P_{e\Delta} (X - X_{m\acute{a}x})}{X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n}} \right] - 1 \right\} \quad (8)$$

$$P_{e\Delta} = rU_{av} \frac{(X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n})}{\Gamma^f} \quad (9)$$

onde  $X_{m\acute{a}x}$  e  $X_{m\acute{i}n}$  são respectivamente os valores máximos e mínimos de  $X$  nos pontos 1, 2 e 3 da Fig. 2.

Portanto, a Eq. (7) é uma função de interpolação que nos permite determinar um valor de  $f$  e de suas derivadas em qualquer ponto interno do elemento triangular 123, em função das coordenadas  $x, Y$  deste ponto.

## 2.4 Função de interpolação para a pressão

Para o caso de  $f$  representar a pressão, uma aproximação linear é satisfatória em função da natureza elíptica da pressão. A função de interpolação para a pressão  $p$ , é obtida construindo-se um plano entre os pontos 1, 2 e 3 da Fig. 2 com os valores de  $p$  armazenados nestes pontos. Desta forma temos

$$p = dx + ey + f \quad (10)$$

Portanto, a Eq. (10) é uma função de interpolação que nos permite determinar o valor da pressão e de suas derivadas em qualquer ponto interno do elemento triangular 123, em função das coordenadas  $x, y$  deste ponto.

## 2.4 Discretização das equações para $f$

A integração das equações de conservação também segue a formulação básica da metodologia CVFEM<sup>8</sup>. Esta integração é realizada sobre o volume de controle  $P$ , representado na Fig. 1. Note que este volume é formado por vários elementos triangulares que contribuirão individualmente para obtenção das equações aproximadas de cada volume. O sub-volume de controle  $Iaoc$ , hachurado na Fig. 2, é parte do volume de controle no qual é realizada a integração. Portanto, o elemento triangular  $I23$  contribuirá no balanço total das propriedades do volume com dois fluxos  $\vec{J}$ , um para o segmento  $ao$  e outro para o segmento  $oc$ , calculados nos pontos  $r$  e  $t$  da Fig. 2, respectivamente. Portanto, integrando a Eq. (5) no volume de controle  $P$ , temos

$$\frac{M_P \mathbf{f}_P - M_P^o \mathbf{f}_P^o}{\Delta t} + \int_a^o \vec{J} \cdot \vec{n} ds + \int_o^c \vec{J} \cdot \vec{n} ds - \int_{Iaoc} S^f dV + \left[ \begin{array}{c} \text{contrib. de outros elementos} \\ \text{associados ao nó } P \end{array} \right] = 0 \quad (11)$$

Quando a parcela correspondente aos outros elementos for adicionada e aplicadas as condições de contorno, teremos uma equação algébrica de conservação do volume de controle centrado em  $P$ , conectado a todos os seus vizinhos, na forma

$$A_i \mathbf{f}_i = \sum_n A_{nb} \mathbf{f}_{NB} + B_i \quad (12)$$

Resolvendo o sistema linear obtido através de um algoritmo adequado, teremos os valores de  $\mathbf{f}$  determinados em todos os vértices dos triângulos, ou seja, no centro de todos os volumes.

## 2.5 Discretização das equações para $u$ e $v$

A integral da equação de conservação da quantidade de movimento é idêntica à da equação de conservação de  $\mathbf{f}$ , exceto pela presença da integral envolvendo o gradiente de pressão que, para o caso da equação de conservação da quantidade de movimento em  $x$ , pode ser aproximada por

$$\int_{Iaoc} \frac{\partial p}{\partial x} dV = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i \cdot V_i \quad (13)$$

onde o gradiente em  $i$  é o gradiente representativo do elemento  $I23$  da Fig. 2 e é calculado através da Eq. (10), e  $V_i$  representa a área do quadrilátero  $Iaoc$  da Fig. 2.

Uma outra forma de se avaliar este termo fonte e que difere da formulação original CVFEM é realizando esta integração diretamente sobre o volume de controle<sup>12</sup>. Neste caso, a integral não é mais avaliada em cada elemento, mas sim no volume de controle como um todo. Para isto, basta que se obtenha um gradiente representativo em  $P$  e a integral, agora no volume, pode ser aproximada por

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_P \cdot V_P \quad (14)$$

onde o gradiente em  $p$  é o gradiente representativo do volume  $P$  e  $V_p$  representa a área do volume.

### 3 ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

A solução segregada das equações de conservação da quantidade de movimento e da equação de conservação da massa, para problemas incompressíveis, gera o problema do acoplamento pressão-velocidade. Uma das formas de se abordar o problema é seguindo o princípio dos métodos tipo SIMPLE<sup>9</sup>.

Inicialmente estima-se um campo de pressão  $p^*$  e obtêm-se através das equações de conservação da quantidade de movimento um campo de  $u^*$  e  $v^*$  que, a priori, não satisfazem a equação de continuidade. Não faz sentido algum, alterar aleatoriamente o campo de pressão a fim de que em algum momento um campo de  $u^*$  e  $v^*$  satisfaça a equação de continuidade. O procedimento recomendado comumente é estabelecer expressões de correção para as velocidades  $u^*$  e  $v^*$  em função de gradientes de correção de pressão  $p'$ . Quando esta correção de pressão não for mais necessária, estes gradientes de  $p'$  serão nulos e a correção sobre  $u^*$  e  $v^*$  será nula. Para a evolução de  $p'$  utiliza-se a equação da continuidade, onde as equações de correção são introduzidas gerando uma equação para  $p'$  com termo fonte envolvendo  $u^*$  e  $v^*$ .

A principal motivação para a proposição de uma nova formulação para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade é devido ao fato de que na formulação original CVFEM<sup>8</sup> é o número de pontos de pressão vizinhos envolvidos na equação para  $p'$ .

A Figura 3 ilustra o caso. Na contribuição do elemento triangular centrado em  $o$ , representado na Fig. 1.a, estarão presentes os valores de  $p'$  deste elemento e também os valores de  $p'$  dos elementos vizinhos. Portanto, o volume de controle centrado em  $i$  e representado na Fig. 3.b, envolverá um grande número de pontos de correção de pressão  $p'$ .

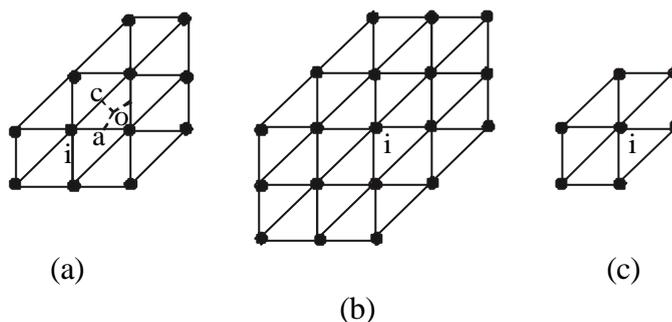


Figura 3 – Número de nós envolvidos na discretização da equação para  $p'$ .

- (a) elemento de integração  $Iaoc$  e seus elementos vizinhos;
- (b) número total de nós envolvidos na equação de  $p'$  do volume em  $i$ ;
- (c) proposta para utilização de um número reduzido de nós.

A proposta é aplicar uma equação de correção de pressão que simplifique a implementação computacional envolvendo apenas os valores de  $p'$  do ponto nodal  $i$  e seus vizinhos, como representado na Fig. 3.c.

### 3.1 Determinação das velocidades nas faces dos volumes

Pelo fato de ser usado um arranjo co-localizado, ou seja, as velocidades estão armazenadas nos centros dos volumes e não nas faces dos elementos, é necessário, inicialmente, a determinação destas velocidades de interface, pois o balanço de massa na equação da continuidade é feito com os fluxos calculados nestas interfaces. Estas velocidades serão aqui denominadas  $u_f^*$ .

Considere a equação de conservação de quantidade de movimento em um ponto nodal  $i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) que forma o elemento triangular da Fig. 2, na seguinte forma

$$\left\{ A_p u_p^* \right\}_i = \left\{ \sum \left\{ A_{nb} u_{NB}^* \right\} \right\}_i + \left\{ L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_i + \left\{ \frac{M_p^o u_p^o}{\Delta t} \right\}_i - \left\{ L \left\{ P^u \right\} \Delta V \right\}_i \quad (15)$$

onde o operador  $L$  representa as aproximações numéricas para os termos fonte.

Fazendo  $i=1,2,3$  temos as três equações, uma para cada ponto. Como temos velocidades armazenadas apenas nos vértices dos elementos, é necessário interpolar estas equações para as posições em que, possivelmente, se deseja calcular a velocidade  $u$ , ou seja, os pontos  $a, r, o, t$  e  $c$  da Fig. 2. Note que esta estimativa de  $u$  no interior do elemento triangular poderia ser obtida através da função de interpolação, mas isto não se traduz em uma boa aproximação. A média, ou interpolação, das equações do movimento e não das variáveis propriamente ditas é fisicamente mais consistente, pois teremos equações do movimento aproximadas nestes pontos.

As equações nodais, multiplicadas por fatores de interpolação, somadas e aplicadas as aproximações para os termos de interface<sup>14</sup> resultam

$$\begin{aligned} \left\{ c_1 A_{p1} + c_2 A_{p2} + c_3 A_{p3} \right\} u_f^* = & c_1 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_1 \\ & + c_2 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_2 \\ & + c_3 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_3 \\ & + \left\{ \frac{\bar{M}^o}{\Delta t} \right\} \cdot u_f^o - L \left\{ P^u \right\}_f \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (16)$$

Podemos escrever  $u_f^*$  como

$$\begin{aligned}
 u_f^* = \frac{1}{c_1 A_{p1} + c_2 A_{p2} + c_3 A_{p3}} & \left\{ c_1 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} \cdot u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_1 \right. \\
 & + c_2 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} \cdot u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_2 \\
 & + c_3 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} \cdot u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_3 \\
 & \left. + \left\{ \frac{\overline{M}^o}{\Delta t} \right\} \cdot u_f^o - L \left\{ p^u \right\}_f \cdot \Delta V \right\}
 \end{aligned} \tag{17}$$

com,

$$\overline{M}_p^o = \mathbf{r}^o \cdot \overline{\Delta V} \tag{18}$$

$$\overline{\Delta V} = c_1 \Delta V_1 + c_2 \Delta V_2 + c_3 \Delta V_3$$

onde as constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  de interpolação são dadas em função da posição  $(x,y)$  do ponto em que se deseja interpolar a velocidade.

A construção de um plano entre os valores de uma propriedade genérica  $z$ , armazenados nos pontos 1,2 e 3 de um elemento triangular, fornece coeficientes que permitem uma interpolação linear desta propriedade no interior do triângulo. Estes coeficientes tem sempre soma unitária e dão um peso para cada valor da propriedade  $z$  que está armazenada nos nós do elemento triangular em função da posição  $(x,y)$  em que desejamos a interpolação. As expressões para estes coeficientes são

$$c_1 = (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + (x_2y_3 - x_3y_2)/Det \tag{19}$$

$$c_2 = (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + (x_3y_1 - x_1y_3)/Det$$

$$c_3 = (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (x_1y_2 - x_2y_1)/Det$$

$$Det = (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1)$$

A equação aproximada para a determinação de  $v_f^*$  é obtida de maneira análoga.

### 3.2 Proposição da equação de correção de velocidades

Considere a velocidade  $\vec{U}$  e os vetores unitários normais aos segmentos  $\overline{ao}$  e  $\overline{oc}$  mostrados na Fig. 4. O produto escalar entre  $\vec{U}$  e  $\vec{n}$  fornece as componentes de velocidade normais a estes segmentos, ou seja, na direção de  $\vec{n}$ , responsáveis pelo fluxo de massa através de cada seção.

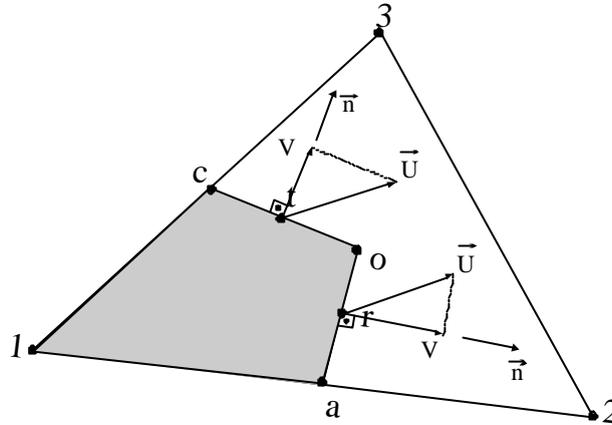


Figura 4 – Velocidades envolvidas no balanço de massa

Como se sabe as equações de correção da velocidade podem ser quaisquer, pois não afetam a solução do problema mas apenas a taxa de convergência. Propondo uma equação de correção similar as usadas nos métodos tipo SIMPLE<sup>15</sup>, temos

$$V = V^* - dd_f \frac{\partial p'}{\partial \vec{n}} \quad (20)$$

onde  $V^*$  é a velocidade da iteração anterior.

Admitindo para  $p'$  uma função de interpolação linear idêntica aquela estimada para  $p$  e dada pela Eq. (10), podemos escrever

$$p' = d'x + e'y + f' \quad (21)$$

e escrevendo o vetor unitário  $\vec{n}$  como,

$$\vec{n} = e_x \vec{i} + e_y \vec{j} \quad (22)$$

podemos determinar a derivada de  $p'$  em relação a normal como

$$\frac{\partial p'}{\partial \vec{n}} = \nabla p' \cdot \vec{n} \quad (23)$$

com

$$\nabla p' = \frac{\partial p'}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p'}{\partial y} \vec{j} \quad (24)$$

Portanto, a derivada de  $p'$  em relação a normal é dada por

$$\frac{\partial p'}{\partial \vec{n}} = d' e_x + e' e_y \quad (25)$$

Introduzindo estas expressões na Eq. (20) resulta

$$V = V^* - DD_1 p'_1 - DD_2 p'_2 - DD_3 p'_3 \quad (26)$$

onde os coeficientes  $DD_1$ ,  $DD_2$  e  $DD_3$  são dados por

$$DD_1 = dd_f [(Y_2 - Y_3) e_x + (X_3 - X_2) e_y] / DET \quad (27)$$

$$DD_2 = dd_f [(Y_3 - Y_1) e_x + (X_1 - X_3) e_y] / DET$$

$$DD_3 = dd_f [(Y_1 - Y_2) e_x + (X_2 - X_1) e_y] / DET$$

$$DET = (X_1 Y_2 + X_2 Y_3 + X_3 Y_1 - Y_1 X_2 - Y_2 X_3 - Y_3 X_1)$$

O coeficiente  $dd_f$  é interpolado em qualquer ponto no interior do elemento, em função dos valores de  $dd$  nos vértices 1,2,3 do triângulo elementar. Esta interpolação ocorre seguindo a mesma formulação utilizada para determinar as velocidades nas interfaces, inclusive com os mesmos coeficientes, que são calculados nos pontos em que se deseja a interpolação, ou seja, pontos  $r$  e  $t$ . Então, como no método SIMPLEC<sup>9</sup>, podemos admitir

$$dd_i = \frac{\Delta V_i}{[A_p - \sum A_{nb}]_i} \quad , \quad i = 1,2,3 \quad (28)$$

$$dd_f = c_1 dd_1 + c_2 dd_2 + c_3 dd_3$$

com os coeficientes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  dados pelo conjunto de equações (19).

### 3.3 Discretização da equação de conservação da massa (equação para $p'$ )

Integrando a equação de conservação da massa no volume de controle  $P$ , representado na Fig. 1, e assumindo  $\mathbf{r}$  constante, temos

$$\int_a^o \vec{U} \cdot \vec{n} ds + \int_o^c \vec{U} \cdot \vec{n} ds + \left[ \begin{array}{c} \text{contrib. de outros elementos} \\ \text{associados ao nó } P \end{array} \right] = 0 \quad (29)$$

onde as integrais acima podem ser aproximadas por

$$\int_a^o \vec{U} \cdot \vec{n} ds = [V.L]_{ao} \quad (30)$$

$$\int_o^c \vec{U} \cdot \vec{n} ds = [V.L]_{oc}$$

onde  $L_{ao}$  e  $L_{oc}$  são os comprimentos dos segmentos  $\overline{ao}$  e  $\overline{oc}$  da Fig. 4, respectivamente, e  $V_{ao}$  e  $V_{oc}$  são as velocidades normais a estes segmentos, também representadas na Fig. 4.

Substituindo o conjunto de equações (30) em (29), obtém-se a contribuição total do elemento 123 referente ao nó 1 na equação de conservação da massa do volume de controle, dada por

$$\int_a^o \vec{U} \cdot \vec{n} ds + \int_o^c \vec{U} \cdot \vec{n} ds = F_1 p_1' + F_2 p_2' + F_3 p_3' + S^M \quad (31)$$

Onde os coeficientes  $F$  são dados por

$$F_1 = [(Y_3 - Y_2)ff_1 + (X_2 - X_3)ff_2] / DET \quad (32)$$

$$F_2 = [(Y_1 - Y_3)ff_1 + (X_3 - X_1)ff_2] / DET$$

$$F_3 = [(Y_2 - Y_1)ff_1 + (X_1 - X_2)ff_2] / DET$$

$$ff_1 = [d_f \cdot e_x L]_{ao} + [d_f \cdot e_x L]_{oc}$$

$$ff_2 = [d_f \cdot e_y L]_{ao} + [d_f \cdot e_y L]_{oc}$$

O termo fonte  $S^M$  presente na Eq. (31) é dado pelo fluxo de massa calculado com as velocidades  $V^*$ .

Vale lembrar que esta formulação, apresentada para a discretização da equação de  $p'$ , envolve unicamente valores de  $p'$  armazenados no centro do volume e seus vizinhos, simplificando consideravelmente a metodologia.

#### 4 PROBLEMA TESTE: CONVECÇÃO FORÇADA EM CAVIDADE QUADRADA

O problema de convecção forçada de um fluido incompressível em uma cavidade quadrada é resolvido para um escoamento bidimensional laminar e em regime permanente. Este problema é clássico na literatura para testes de novos algoritmos.

A cavidade tem dimensões unitárias e possui a tampa superior móvel e com velocidade horizontal também unitária. Todas as demais velocidades são nulas nas faces. As equações governantes para este problema são as Eq. (1), (2) e (3), sem os termos temporais.

Este problema foi resolvido para três valores do número de Reynolds,  $Re = 100$ ,  $Re = 400$  e  $Re = 1000$ , em com uma malha:  $29 \times 29$  volumes, da forma mostrada na Fig. 5.

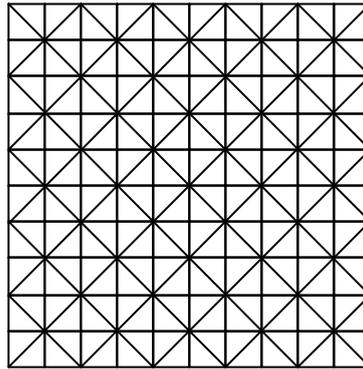


Figura 5 – Discretização do domínio

As Figuras 6 e 7 apresentam os resultados obtidos para Reynolds 100.

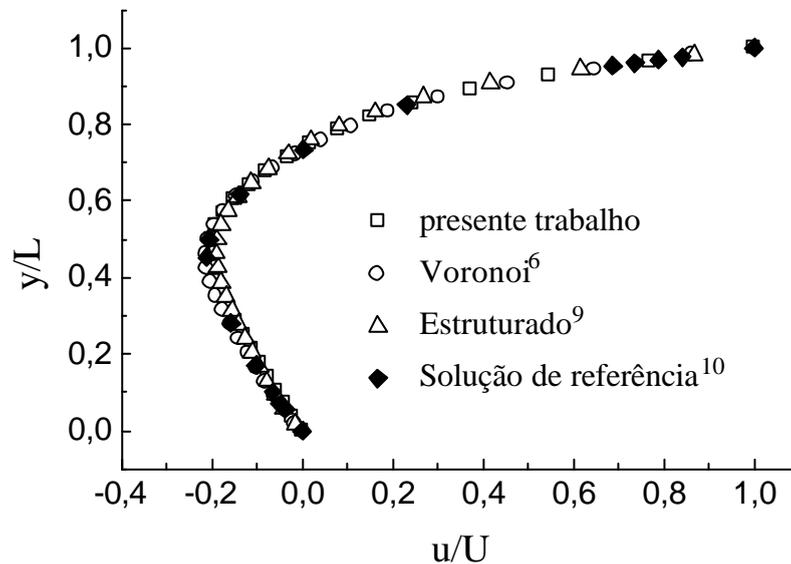


Figura 6 – Componente horizontal de velocidade em  $x/L = 0.5$ ,  $Re = 100$

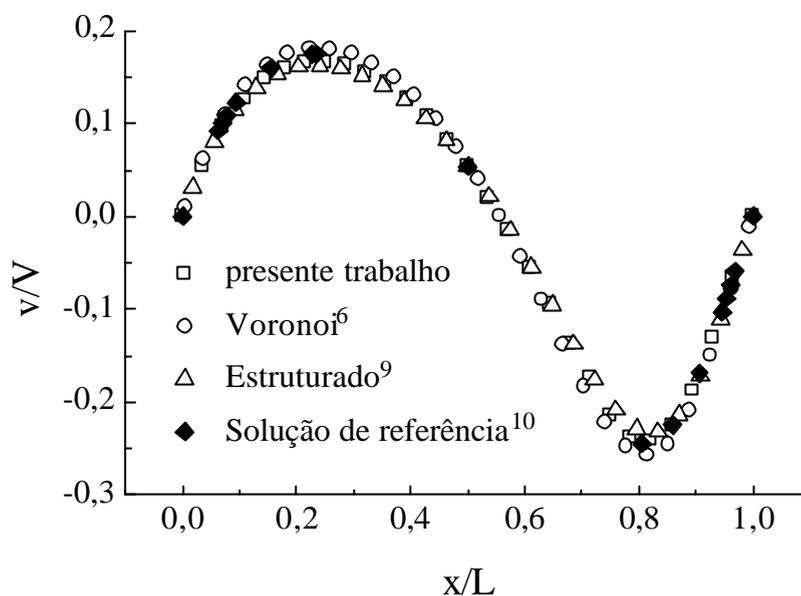


Figura 7 – Componente vertical de velocidade em  $y/L = 0.5$ ,  $Re = 100$

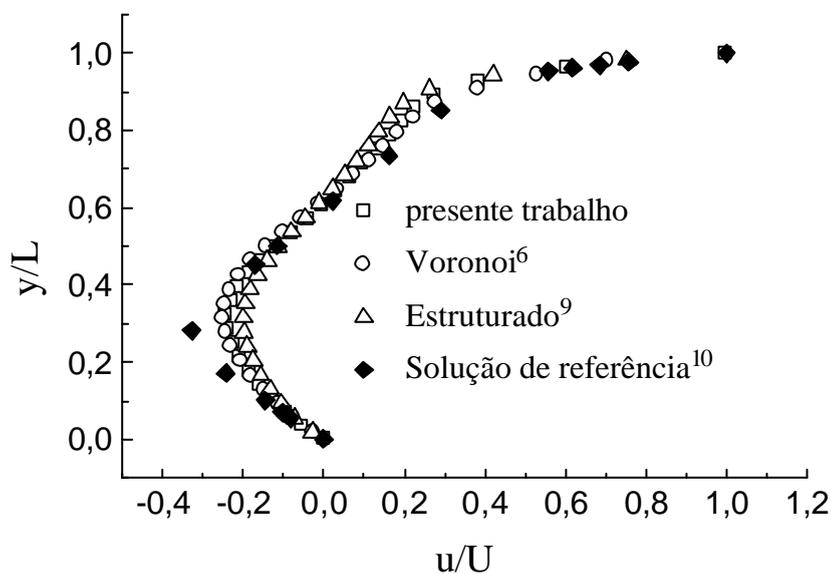


Figura 8 – Componente horizontal de velocidade em  $x/L = 0.5$ ,  $Re = 400$

De acordo com as Figuras 6 e 7,  $Re = 100$ , podemos verificar que o modelo proposto no trabalho apresentou um desempenho satisfatório para este caso em particular, uma vez que a solução numérica aproxima-se da solução de referência.

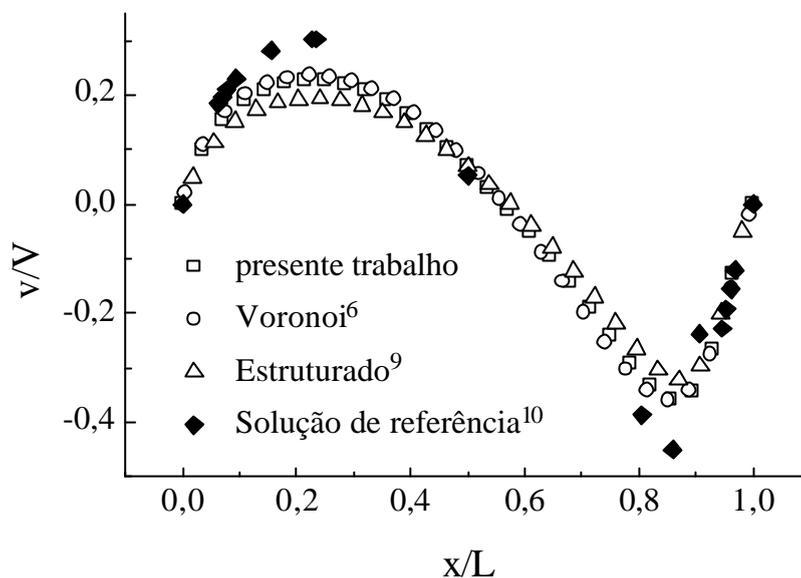


Figura 9 – Componente vertical de velocidade em  $y/L = 0.5$ ,  $Re = 400$

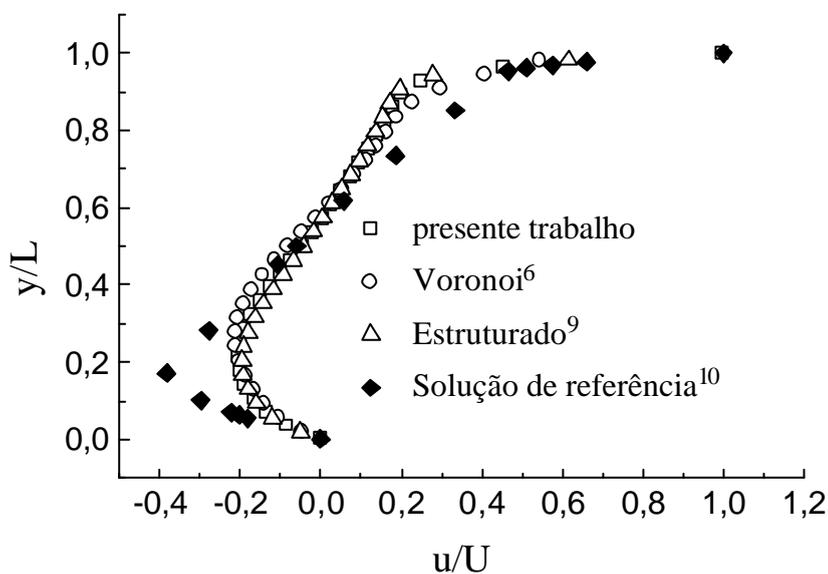


Figura 10 – Componente horizontal de velocidade em  $x/L = 0.5$ ,  $Re = 1000$

As Figuras 8 e 9 apresentam os resultados obtidos para  $Re = 400$ . Neste caso, nota-se uma pequena superioridade da metodologia que usa malhas de Voronoi<sup>6</sup>. As diferenças, entretanto, entre as metodologias e a solução de referência são devidas a difusão numérica.

A menor difusão numérica, para a metodologia Voronoi<sup>6</sup>, deve-se ao emprego das funções de interpolação em um número maior de direções. Pois, a malha utilizada apresenta maior número de volumes vizinhos que nos demais métodos.

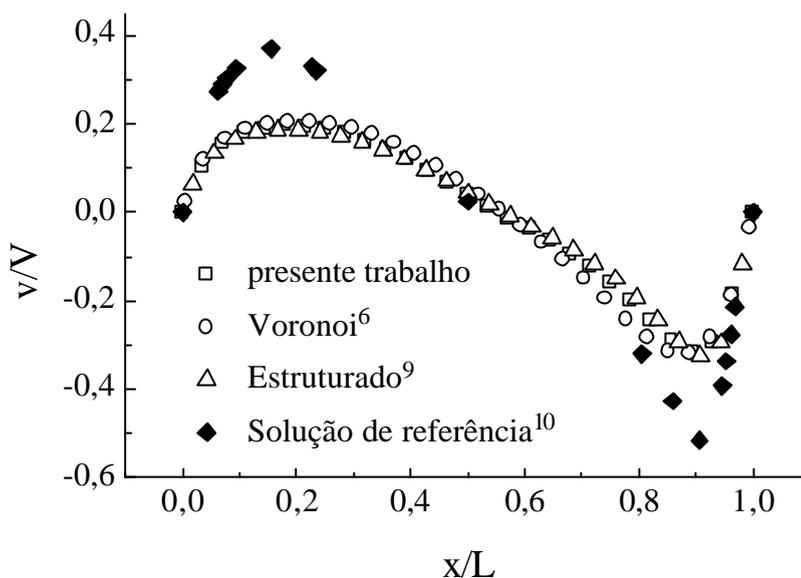


Figura 11 – Componente vertical de velocidade em  $y/L = 0.5$ ,  $Re = 1000$

As Figuras 10 e 11 apresentam os resultados obtidos para  $Re = 1000$ . Para este caso, novamente a metodologia Voronoi teve uma pequena vantagem sobre as demais. Porém nota-se que a solução de referência<sup>10</sup> é consideravelmente diferente dos demais resultados. Isso se deve ao fato de que a solução de referência<sup>10</sup> foi obtida com uma malha bastante refinada ( $129 \times 129$  volumes).

## 5 CONCLUSÕES

Os objetivos deste trabalho foram a apresentação e testes iniciais de um esquema numérico para tratamento do acoplamento pressão-velocidade que surge da solução segregada das equações de conservação da quantidade de movimento e da equação de conservação da massa.

A metodologia empregada é semelhante a metodologia CVFEM<sup>8</sup> que utiliza malhas não-estruturadas para obtenção dos volumes de controle.

A comparação foi realizada com a metodologia dos Diagramas de Voronoi<sup>6</sup>, que também utiliza malhas não-estruturadas, e a metodologia tradicional de volumes finitos para malhas estruturadas<sup>9</sup>. Esta comparação teve como intuito verificar o comportamento do algoritmo proposto neste trabalho em relação aos outros dois. Nas diferentes metodologias aplicadas, preservaram-se as formulações básicas de cada método, como a forma de discretização das equações e emprego das funções de interpolação.

Os resultados obtidos validam a formulação proposta para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade. A formulação é mais simples computacionalmente que a metodologia CVFEM original<sup>8</sup>, uma vez que utiliza um número menor de pontos de correção de pressão  $p'$  envolvidos na discretização da equação de conservação da massa. O emprego de um menor número de pontos na equação de correção, além da simplificação computacional, influencia também o tempo de CPU e a taxa de convergência do método. Estão sendo conduzidos testes comparativos entre a formulação proposta e a formulação CVFEM<sup>8</sup> a fim de mensurar este comportamento.

## REFERENCES

- [1] V. Venkatakrishnan, "Perspective on unstructure grid flow solvers", *AIAA Journal*, 34, 3, 533-547 (1996).
- [2] D.J. Mavriplis and V. Venkatakrishnan, "A 3D Agglomeration Multigrid Solver for the Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 23, 527-544 (1996).
- [3] J.Y. Murthy and S. Mathur, "Periodic Flow and Heat Transfer Using Unstructured Meshes" *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25, 659-677 (1997).
- [4] B.R. Baliga and S.V. Patankar, "A New Finite Element Formulation for Convection Diffusion Problems", *Numerical Heat Transfer*, 3, 393-409 (1980).
- [5] G.E. Schneider and M.J. Raw, "Control-Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Co-Located Variables – 2: Application and Validation", *Numerical Heat Transfer*, 11, 391-400 (1987).
- [6] C.R. Maliska e J.F.V. Vasconcellos, "An Unstructured Finite Volume Procedure for Simulating Flows with Moving Fronts", *IV WCCM*, Buenos Aires, CD-ROM edition (1998).
- [7] N. Taniguchi and T. Kobayashi, "Finite Volume Method on the Unstructured Grid System", *Computers & Fluids*, 9, 34, 287-295 (1991).
- [8] B.R. Baliga and S.V. Patankar, "Elliptic systems: Finite-element method II", *Handbook of Numerical Heat Transfer*, John Wiley & Sons, 421-455 (1988).
- [9] C.R. Maliska, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC (1995).
- [10] U. Guia, K.N. Ghia and C.T. Shin, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, 48, 387-411 (1982).
- [11] D.J. Mavriplis, "Three dimensional unstructured multigrid for the Euler equations", *AIAA Journal*, 30, 1753-1761 (1992).
- [12] F.A. Schneider e C.R. Maliska, "Um Esquema Numérico para Escoamentos Bidimensionais Incompressíveis empregando Malhas Não-Estruturadas" *Anais VII ENCIT*, 1, 897-902, Rio de Janeiro (1998).

- [13] S. Peters, V.C. Mariani e F.C. Cardoso, “Avaliação do Desempenho de Diferentes Métodos de Cálculo do Gradiente de Pressão em Malhas Não Estruturadas de Voronoi”, *Anais XVIII CILAMCE*, 1, 1297-1304, Brasília (1997).
- [14] F.A. Schneider, “Solução Numérica de Escoamentos Bidimensionais em Malhas Não-Estruturadas pelo método dos Volumes Finitos”, Dissertação de Mestrado, Coordenadoria de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, SC, (1998).
- [15] S.V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, McGraw-Hill, (1980).