

UM ESQUEMA NUMÉRICO PARA ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS INCOMPRESSÍVEIS EMPREGANDO MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

F.A. Schneider, C.R. Maliska

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina
88040-900 – Florianópolis – SC – Brasil

SUMÁRIO

Este trabalho apresenta um modelo numérico para escoamentos bidimensionais incompressíveis utilizando malhas não-estruturadas. A metodologia aqui empregada difere da metodologia CVFEM no tratamento dado ao acoplamento pressão-velocidade e na aproximação dos gradientes de pressão. É apresentada uma comparação global entre o modelo aqui desenvolvido, a metodologia que emprega os diagramas de Voronoi, também para malhas não-estruturadas, e a metodologia tradicional dos volumes finitos.

INTRODUÇÃO

Na solução numérica de problemas de mecânica dos fluidos, o uso de coordenadas generalizadas para geometrias bastante irregulares apresenta dificuldades, pois o mapeamento do domínio em uma malha única e de qualidade nestas geometrias é uma tarefa difícil. Uma das soluções para este problema é o emprego da técnica de multiblocos, presente hoje na maioria dos simuladores comerciais. Outra alternativa é o uso de malhas não-estruturadas onde o método dos elementos finitos se destaca por apresentar grande versatilidade geométrica, porém, sem garantir os princípios de conservação nos volumes elementares. Portanto, a utilização de malhas não-estruturadas em conjunto com técnicas que envolvam o balanço de conservação das propriedades nos volumes elementares resultam em metodologias robustas.

Destas observações surgiram as metodologias denominadas *Control Volume Based Finite Element Method (CVFEM)*, das quais podemos citar as desenvolvidas por Baliga e Patankar (1988) e Schneider e Raw (1987). As metodologias *CVFEM* são assim chamadas por utilizarem os balanços de conservação no volume elementar, semelhante a formulação tradicional de volumes finitos, e por absorverem do método dos elementos finitos a natureza das funções de interpolação.

Uma forma de se obter os volumes de controle não-estruturados é através do método das medianas, onde os volumes são gerados a partir de uma triangulação. Esse processo de obtenção dos volumes é empregado no modelo numérico desenvolvido neste trabalho e é normalmente encontrado na metodologia *CVFEM* desenvolvida por Baliga e Patankar (1988).

O presente trabalho implementa uma metodologia similar à proposta por Baliga e Patankar (1988). A metodologia dos Diagramas de Voronoi (Maliska e Vasconcelos, 1998) e a formulação tradicional de volumes finitos (Maliska, 1995) servem como referência para a avaliação do desempenho do método aqui desenvolvido. Estas três metodologias, diferem, basicamente, na forma de aplicar as funções de interpolação e no número de pontos em que os fluxos são calculados nas interfaces dos volumes para realizar os balanços de conservação.

Nestes métodos, como em outros, a solução das equações é feita de forma segregada gerando o problema do acoplamento pressão/velocidade. Para se resolver este problema são utilizadas equações de correção de velocidades nas interfaces dos volumes em função do gradiente de correção de pressão. Este gradiente corrige o campo de velocidades tal que a massa seja conservada em cada volume elementar. Neste trabalho, uma nova formulação

é proposta para que essa equação de correção envolva um número mínimo de pontos de pressão.

Dois problemas teste foram escolhidos para a comparação das metodologias: a convecção forçada em cavidade quadrada, com solução de referência em Guia et al. (1982), e o transporte, com convecção dominante, de um salto na variável escalar f , com solução analítica aproximada proposta por Raithby (1976).

Revisão Bibliográfica. As primeiras formulações envolvendo volumes poligonais gerados a partir de malhas triangulares surgiram na década de 70 com Baliga e Patankar (1980). Soluções de escoamentos 2D incompressíveis, utilizando os denominados *Polygonal Control-volumes*, podem ser encontrados em Baliga (1978), que já definia uma nova metodologia, denominada *CVFEM*.

As extensões destas metodologias para escoamentos tridimensionais surgiram por volta da década de 80. A partir de então, vários trabalhos de relevância podem ser encontrados sobre o desenvolvimento destes métodos, especificamente envolvendo as funções de interpolação, o procedimento de solução dos sistemas de equações, o acoplamento pressão/velocidade e outros tópicos frequentemente explorados nos métodos numéricos (Swaminatham e Voller, 1992).

Mais recentemente, os desenvolvimentos e contribuições surgem de trabalhos dedicados ao estudo de formulações para malhas não-estruturadas. Entre estes trabalhos podemos citar Tanigushi e Kobayashi (1991), Marcondes et al. (1995) e Peters et al. (1997), onde a metodologia desenvolvida é baseada nos diagramas de Voronoi.

FORMULAÇÃO

A Construção do Volume de Controle pelo Método das Medianas. Este método consiste em ligar o centro geométrico dos triângulos aos pontos médios dos lados dos triângulos. A figura 1 apresenta dois volumes construídos pelo método das medianas.

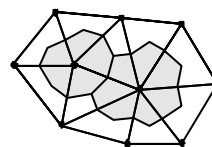


Figura 1 – Volume finito originado no processo da mediana

Equações Governantes. Admitindo o fluido como Newtoniano e adotando um sistema de coordenadas cartesianas (x, y), temos, para problema convectivo/difusivo bidimensional transiente, as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{ru}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ruu}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{ruv}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{m}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{m}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + S^u \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rv}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ruv}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{rvv}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{m}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{m}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + S^v \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ru}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{rv}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rf}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ruf}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{rvf}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^f \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^f \frac{\partial f}{\partial y}\right) + S^f \quad (4)$$

As Eq. (1) e (2) são as equações de conservação da quantidade de movimento em x e y respectivamente. A Eq. (3) é a equação de conservação da massa e a Eq. (4) é a equação de conservação na forma geral para uma variável genérica f , onde G é o coeficiente difusivo e S representa o termo fonte.

A Eq. (4) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rf}) + \nabla \cdot (\bar{\mathbf{J}}) = S^f \quad (5)$$

onde $\bar{\mathbf{J}}$ representa o fluxo total e é dado por

$$\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{r}\bar{\mathbf{V}}f - \Gamma^f \nabla f \quad (6)$$

Função de Interpolação. A função de interpolação tem o objetivo de avaliar o valor de uma propriedade genérica f na interface do volume de controle bem como suas derivadas. A idéia básica da metodologia *CVFEM* é aplicar esta função de interpolação na direção média do escoamento. A figura 2 ilustra um elemento triangular 123 que compõe o volume de controle e seu novo sistema coordenado alinhado com o escoamento médio.

Para determinar a direção do fluxo convectivo médio no elemento, fazemos uso de uma velocidade média U_{av} , que pode ser obtida com uma média simples das velocidades dos nós, u_{av} e v_{av} . Então temos

$$U_{av} = (u_{av}^2 + v_{av}^2)^{1/2} \quad (7)$$

$$u_{av} = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}, \quad v_{av} = \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} \quad (8)$$

Conhecendo-se U_{av} resolve-se o problema convectivo/difusivo neste novo sistema de coordenadas (X, Y), cuja equação governante é dada por

$$\mathbf{r}U_{av} \frac{\partial f}{\partial X} = \Gamma^f \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \right) \quad (9)$$

A solução da Eq. (9) fornece a função de interpolação

$$f = Ax + BY + C \quad (10)$$

onde a coordenada x e o número de Peclet são dados por

$$x = \frac{\Gamma^f}{\mathbf{r}U_{av}} \left\{ \exp \left[\frac{Pe_{\Delta} (X - X_{m\acute{a}x})}{X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n}} \right] - 1 \right\} \quad (11)$$

$$Pe_{\Delta} = \mathbf{r}U_{av} \frac{(X_{m\acute{a}x} - X_{m\acute{i}n})}{\Gamma^f} \quad (12)$$

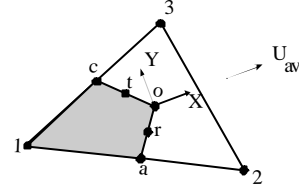


Figura 2 – Elemento triangular e seu novo sistema coordenado

onde $X_{m\acute{a}x}$ e $X_{m\acute{i}n}$ são respectivamente os valores máximos e mínimos de X nos pontos 1, 2 e 3 da figura 2.

Discretização das Equações para f . Integrando a Eq (5) em um dos volumes de controle da figura 1, temos

$$\frac{M_P f_P - M_P^o f_P^o}{\Delta t} + \int_a^o \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{n}} ds + \int_o^c \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{n}} ds - \int_{laoc} S^f dV + [\text{contri-} \quad (13)$$

buição dos outros elementos associados ao nó 1] = 0

onde o termo fonte S é linearizado por (Patankar, 1980)

$$S^f = S_P f + S_c \quad (14)$$

Portanto, para a obtenção das equações aproximadas, precisamos conhecer as integrais dos fluxos nas interfaces do volume. De acordo com a Eq. (6), o fluxo $\bar{\mathbf{J}}$ pode ser escrito

$$\bar{\mathbf{J}} = J_X \bar{\mathbf{a}} + J_Y \bar{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{r}Uf - \Gamma^f \frac{\partial f}{\partial X} \right) \bar{\mathbf{a}} + \left(\mathbf{r}Vf - \Gamma^f \frac{\partial f}{\partial Y} \right) \bar{\mathbf{b}} \quad (15)$$

onde $\bar{\mathbf{a}}$ e $\bar{\mathbf{b}}$ são os vetores unitários do sistema coordenado (X, Y).

Os valores das derivadas de f são obtidos através da função de interpolação definida pela Eq. (10). Estas derivadas são introduzidas nas componentes do fluxo e resultam em

$$J_X = \mathbf{r}(U - U_{av})Ax + \mathbf{r}U(BY + C) - A\Gamma^f, \quad (16)$$

$$J_Y = \mathbf{r}VAx + \mathbf{r}V(BY + C) - B\Gamma^f \quad (17)$$

A integral que fornece o fluxo na face \bar{ao} , ilustrada na figura 2, pode ser aproximada envolvendo os pontos a , r e o . Aplicando a regra de Simpson para estes pontos às componentes J_x e J_y , obtemos, para a integral em \bar{ao}

$$\int_a^o \bar{\mathbf{J}} \cdot \bar{\mathbf{n}} ds = \frac{X_a}{6} [(J_Y)_o + 4(J_Y)_r + (J_Y)_a] - \frac{Y_a}{6} [(J_X)_o + 4(J_X)_r + (J_X)_a] \quad (18)$$

A integral que fornece o fluxo na face \bar{oc} é obtida de forma análoga, e envolve os pontos o , t e c . A integral envolvendo o termo fonte é aproximada da seguinte forma

$$\int_{laoc} S \mathbf{f} dV = \frac{A_e}{3} S_c + \frac{A_e}{3} S_P \mathbf{f}_1 \quad (19)$$

onde A_e é a área do elemento 123 da figura 2. Agrupando as equações aproximadas para as integrais em \overline{ao} , \overline{oc} e termo fonte, obtêm-se a contribuição total do elemento 123 referente ao nó 1, na equação de conservação do volume de controle

$$\int_a^o \bar{J} \cdot \bar{n} ds + \int_o^c \bar{J} \cdot \bar{n} ds - \int_{laoc} S \mathbf{f} dV = D_1 \mathbf{f}_1 + D_2 \mathbf{f}_2 + D_3 \mathbf{f}_3 + E_1 \quad (20)$$

Detalhes das expressões para os coeficientes D_1 , D_2 , D_3 e E_1 podem ser vistas em Baliga e Patankar (1988).

Quando a parcela correspondente aos outros elementos for adicionada e aplicadas às condições de contorno, teremos uma equação algébrica de conservação do volume de controle centrado em 1, conectado a todos os seus vizinhos, na forma

$$A_i \mathbf{f}_i = \sum_n A_{nb} \mathbf{f}_{NB} + B_i \quad (21)$$

Resolvendo o sistema linear obtido através de um algoritmo adequado, teremos os valores de \mathbf{f} determinados em todos os vértices dos triângulos, ou seja, no centro de todos os volumes.

Discretização das Equações para u e v . A integral da equação de conservação da quantidade de movimento é idêntica à da equação de conservação de \mathbf{f} , exceto pela presença da integral envolvendo o gradiente de pressão que pode ser aproximada por

$$\int_{laoc} \frac{\partial p}{\partial x} dV = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_p \cdot V_p \quad (22)$$

onde o gradiente em P é o gradiente representativo do volume P .

Uma forma de avaliar este gradiente é fazê-lo em função dos gradientes de cada um dos elementos que compõe este volume. Podemos escrever este gradiente como

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_p = \frac{\sum \left(\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i \cdot |X_{máx} - X_{mín}|_i \right)}{\sum (|X_{máx} - X_{mín}|_i)} \quad (23)$$

onde o somatório é realizado para os i elementos que compõe o volume P . O gradiente em y é calculado de forma análoga usando Y no lugar de X . A figura 3 mostra os parâmetros envolvidos no cálculo do gradiente representativo para o volume centrado em P .

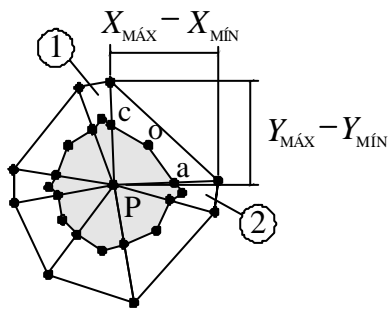


Figura 3 – Parâmetros para o cálculo do gradiente de pressão no volume

Considere os elementos 1 e 2 da figura 3. Um gradiente em x calculado no elemento 2 é mais significativo do que aquele calculado em 1, portanto, devemos atribuir ao gradiente em 2 um peso maior. Os pesos correspondentes a cada elemento poderão ser obtidos através das dimensões máximas de cada elemento. Na formulação de Baliga e Patankar (1988) os gradientes em 1 e 2 são multiplicados pelas áreas dos elementos, e portanto, recebem o mesmo peso. Isso justifica o emprego da Eq.(23).

Para obter os gradientes referentes aos elementos triangulares i , é necessário adotar uma função de interpolação para a pressão. Essa função de interpolação poderá ser linear em cada elemento triangular e determinada pela expressão

$$p = dx + ey + f \quad (24)$$

Maiores detalhes sobre esta proposição podem ser encontrados em Schneider (1998).

Acoplamento Pressão-Velocidade. A solução segregada das equações de conservação da quantidade de movimento e da equação de conservação da massa gera o problema do acoplamento pressão-velocidade. Neste item é proposto uma formulação para tratar este acoplamento, onde a equação de correção de pressão é desenvolvida e aplicada de maneira a simplificar a implementação computacional.

Pelo fato de ser usado um arranjo co-localizado, ou seja, as velocidades estão armazenadas nos centros dos volumes e não nas faces dos elementos, é necessário, inicialmente a determinação destas velocidades de interface, aqui denominadas u_f^* pois o balanço de massa na equação da continuidade é feito com os fluxos calculados nestas interfaces. Podemos obter u_f^* através da média das equações do movimento para os volumes centrados em 1, 2 e 3. Então, podemos escrevemos u_f^* como

$$u_f^* = \frac{\left\{ \begin{array}{l} c_1 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_1 \\ + c_2 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_2 \\ + c_3 \left\{ \sum \left\{ A_{nb} u_{NB}^* \right\} + L \left\{ S^u \right\} \Delta V \right\}_3 \\ + \left\{ \frac{\overline{M}^o}{\Delta t} \right\} \cdot u_f^o - L \left\{ p^u \right\}_f \cdot \Delta V \end{array} \right\}}{\left\{ c_1 A_{p1} + c_2 A_{p2} + c_3 A_{p3} \right\}} \quad (25)$$

onde as constantes c_1 , c_2 e c_3 de interpolação são dadas em função da posição (X, Y) do ponto em que se deseja interpolar a velocidade. A equação aproximada para a determinação de v_f^* é obtida de forma análoga.

Conhecidas as velocidades de interface, é necessário estabelecer uma equação de correção de velocidades. Como estas equações de correção, afetam, como se sabe, apenas a taxa de convergência, podemos propor uma equação de correção similar as usadas nos métodos tipo SIMPLE, como

$$V = V^* - d_f \frac{\partial p'}{\partial \bar{n}} \quad (26)$$

onde V representa as velocidades normais as faces \overline{ao} e \overline{oc} da figura 2. Admitindo para p' uma função de interpolação linear idêntica aquela estimada para p , podemos escrever

$$p' = d' x + e' y + f' \quad (27)$$

com isso, a derivada de p' normal a uma face é dada por

$$\frac{\partial p'}{\partial \bar{n}} = d' e_x + e' e_y \quad (28)$$

onde e_x e e_y são as componentes do vetor normal a face. Introduzindo estas expressões na Eq. (26) resulta

$$V = V^* - DD_1 p'_1 - DD_2 p'_2 - DD_3 p'_3 \quad (29)$$

onde os coeficientes DD_1 , DD_2 e DD_3 podem ser vistos em Schneider (1998).

Discretização da Equação de Conservação da Massa (Equação de p'). Integrando a equação de conservação da massa no volume de controle da figura 1 assumindo r constante, temos

$$\int_a^o \bar{U} \bar{n} ds + \int_o^c \bar{U} \bar{n} ds + [\text{contribuições de outros elementos}] = 0 \quad (30)$$

A integral referente ao fluxo de massa na face \bar{ao} pode ser aproximada diretamente por

$$\int_a^o \bar{U} \bar{n} ds = [V \cdot L]_{ao} \quad (40)$$

onde L_{ao} é o comprimento do segmento \bar{ao} da figura 2, e V_{ao} é a velocidade normal a este segmento.

Substituindo a Eq. (40) juntamente com a integral do fluxo de massa na face \bar{oc} , que é calculada de forma análoga, obtêm-se a contribuição total do elemento $I23$, na equação de conservação da massa, para o volume de controle centrado em I

$$\int_a^o \bar{U} \bar{n} ds + \int_o^c \bar{U} \bar{n} ds = F_1 p'_1 + F_2 p'_2 + F_3 p'_3 + S^M \quad (41)$$

O termo fonte presente na Eq. (41) é dado pelo fluxo de massa calculado com as velocidades V^* das faces dos volumes. A velocidade V em cada face poderia ser aproximada diretamente pela velocidade dos pontos r e t . Mas, para este trabalho optou-se por uma média entre os pontos a, r, o e o, t, c , representados na figura 2, usando peso dois para os pontos r e t e um para os demais.

Vale lembrar que esta formulação, apresentada para a discretização da equação de p' , envolve unicamente valores de p' armazenados no centro do volume e seus vizinhos, o que difere da formulação sugerida por Baliga e Patankar (1988), onde são envolvidos os pontos de pressão vizinhos dos vizinhos, dificultando a implementação computacional para os pontos de fronteira e também vizinhos destes.

Condições de Contorno. Para completar a modelagem é necessária a especificação das condições de contorno e a implementação das mesmas de forma discretizada, sendo esta uma das tarefas mais importantes a ser realizada.

Para f prescrito a equação do volume de fronteira passa assumir a forma

$$f = f_{\text{Prescrito}} \quad (42)$$

Note que assumindo a equação anterior, não se está garantindo o balanço de conservação de f , pois para as frações de

volume da fronteira não há um balanço dos fluxos de f e sim a imposição de um valor prescrito, o que se traduz em um ponto falho desta metodologia, se for desejado a realização de balanços para todos os volumes. Já para o caso da conservação da massa isso não ocorre, pois o fluxo de massa na fronteira pode ser obtido de alguma forma, seja diretamente pela condição de contorno ou então pela estimativa inicial, permitindo que o volume de fronteira faça parte do sistema de equações e a pressão seja determinada, permitindo a conservação da massa de forma mais eficiente.

Em caso de fluxo prescrito, a equação do volume de fronteira é normalmente calculada e o fluxo conhecido acrescido ao termo fonte. As condições de contorno para as componentes cartesianas da velocidade seguem, em princípio, a aplicação das condições de contorno para f .

RESULTADOS

Malhas utilizadas. As malhas adotadas para a solução dos problemas citados anteriormente podem ser visualizadas na figura 4. Deve-se lembrar que esta é uma das inúmeras opções de triangulação possível para se discretizar o domínio, pois a metodologia *CVFEM* aplica-se muito bem para malhas não-estruturadas. Vale lembrar que a figura 4 tem caráter apenas ilustrativo e não representa o número exato de volumes utilizado.

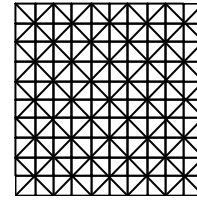


Figura 4 – Discretização do domínio (triangulação para o método das medianas)

Convecção forçada em cavidade quadrada. O problema de convecção forçada de um fluido incompressível em uma cavidade quadrada é resolvido para um escoamento bidimensional laminar e em regime permanente. A cavidade tem dimensões unitárias e possui a tampa superior móvel com velocidade horizontal também unitária, todas as demais velocidades são nulas nas faces.

As equações governantes para este problema são as Eq. (1), (2) e (3), extraídos os termos temporais. Este problema foi resolvido para dois valores do número de Reynolds, $Re = 100$ e $Re = 1000$, com uma malha 29×29 volumes. As figuras 5 à 8 apresentam os resultados obtidos.

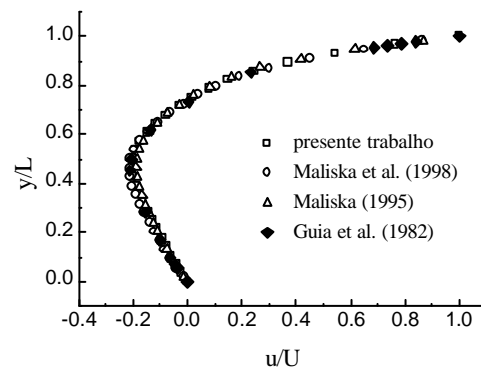


Figura 5 – Componente horizontal de velocidade em $x/L = 0.5$, $Re = 100$

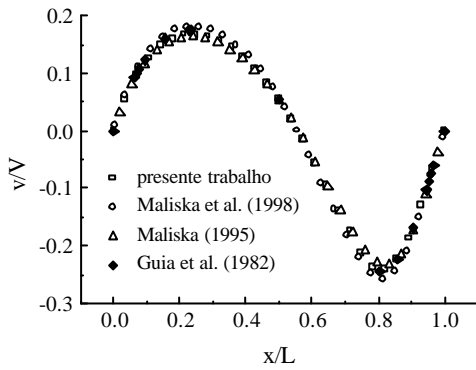


Figura 6 – Componente vertical de velocidade em $y/L = 0.5$, $Re = 100$

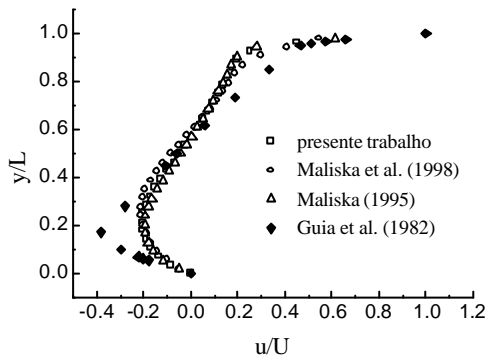


Figura 7 – Componente horizontal de velocidade em $x/L = 0.5$, $Re = 1000$

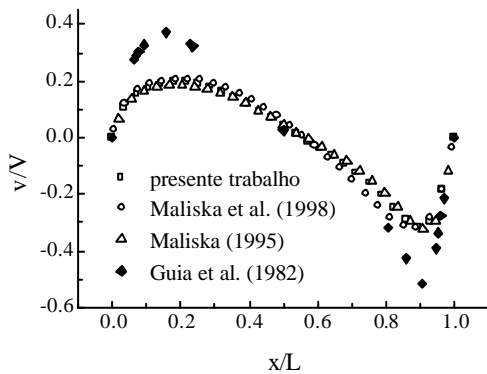


Figura 8 – Componente vertical de velocidade em $y/L = 0.5$, $Re = 1000$

Pelas figuras 5 e 6 podemos verificar que o modelo baseado na metodologia *CVFEM* apresentou um desempenho satisfatório para este caso em particular, uma vez que a solução numérica aproxima-se da solução de referência.

Para Reynolds 1000 já se observa que a solução obtida pela metodologia estruturada afasta-se mais da solução de referência que as outras soluções. Uma das causas deste resultado se deve a difusão numérica introduzida através das funções de interpolação utilizadas nesta metodologia, que, para a malha empregada, são mais pobres do que aquelas utilizadas no *CVFEM* e *Voronoi*.

Os resultados de Guia et al. (1976), são consideravelmente diferentes dos demais resultados pelo fato de utilizar uma malha mais refinada (129×129 volumes).

Transporte, com convecção dominante, de um salto na variável escalar f . Para avaliar o desempenho da formulação proposta na solução de problemas com convecção dominante foi escolhido o caso do transporte, com velocidade uniforme, de um salto na variável escalar f . A equação governante para este problema é a equação (4), excluindo o termo temporal e o termo fonte. A figura 9 ilustra o problema.

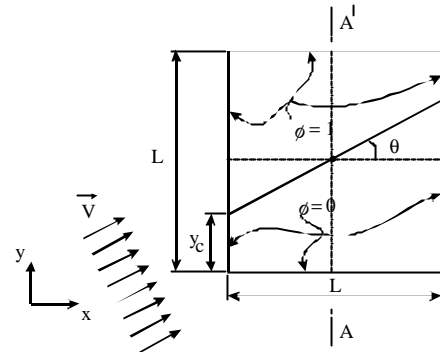


Figura 9 – Transporte da variável f , com velocidade uniforme

Este problema foi resolvido para o número de Reynolds igual a 250. Para comparação dos resultados obtidos nas três metodologias, *CVFEM*, *Voronoi* e estruturada, é adotada a solução analítica aproximada, apresentada por Raithby (1976).

As condições de contorno são $f=1$, acima da linha paralela ao escoamento e que passa através do centro do domínio e $f=0$, abaixo dessa linha. A solução obtida é plotada ao longo da seção AA' , onde $x = 0.25$. A solução deste problema foi obtida para $q = 0^\circ$, $q = 26,57^\circ$ e $q = 45^\circ$ e malha 31×31 . As figuras 10 à 12 apresentam os resultados obtidos.

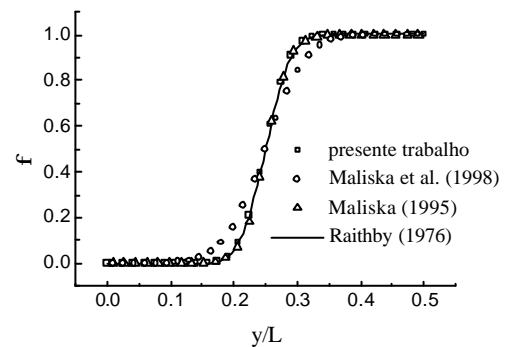


Figura 10 - Perfil de f , $x = 0.25$, para o caso de $q = 0^\circ$. $Re = 250$

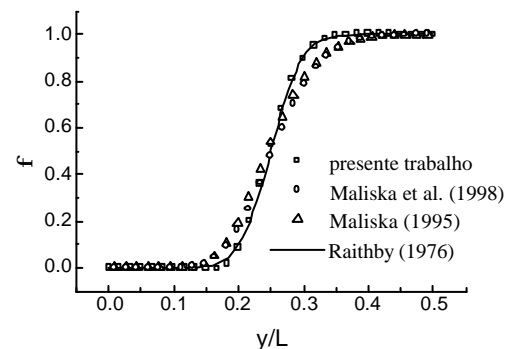


Figura 11 - Perfil de f , $x = 0.25$, para o caso de $q = 26.57^\circ$. $Re = 250$

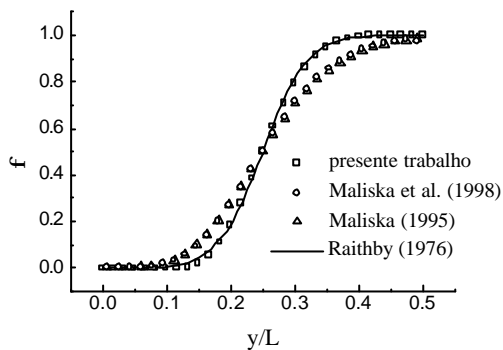


Figura 12 - Perfil de f , $x = 0.25$, para o caso de $q = 45^\circ$. $Re = 250$

Para o modelo numérico aqui desenvolvido, como visto, a função de interpolação é aplicada na direção do escoamento, já para a metodologia Voronoi e estruturada a função de interpolação é aplicada sempre normal as faces do volume de controle, que nem sempre estão alinhadas com o escoamento. Esta é a provável razão pela qual bons resultados foram obtidos com a metodologia CVFEM.

CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi a implementação de uma metodologia similar a proposta por Baliga e Patankar (1988), e a comparação desta com a metodologia dos Diagramas de Voronoi (Maliska e Vasconcellos, 1998), que também utiliza malhas não-estruturadas, e a metodologia tradicional de volumes finitos para malhas estruturadas (Maliska, 1995). O alvo desta comparação foi o comportamento do algoritmo proposto neste trabalho em relação aos outros dois. Em todas as formulações utilizou-se as funções de interpolação básicas de cada método.

A formulação proposta aqui diferenciou-se da formulação proposta por Baliga e Patankar (1988) em alguns aspectos. Uma contribuição deste trabalho está na formulação do acoplamento pressão/velocidade, que foi implementado através de uma equação de correção de velocidades que envolve um número mínimo de pontos de pressão, facilitando a implementação computacional. Outra contribuição está no cálculo do gradiente de pressão, que foi realizado segundo os desenvolvimentos presentes nas metodologias que utilizam malhas não-estruturadas, como por exemplo, Maliska (1995) e Cardoso (1997).

Os resultados obtidos neste trabalho mostraram que o modelo numérico proposto é mais compacto do que outros métodos que utilizam malhas não-estruturadas, como o método dos elementos finitos, sem perder a generalidade que estes métodos oferecem.

REFERÊNCIAS

- Baliga, B.R., 1978, "A control volume based finite element method for convective heat and mass transfer", Ph. D. Thesis, University of Minnesota, Minneapolis.
- Baliga, B.R. e Patankar, S.V., 1980, "A New Finite Element Formulation for Convection Diffusion Problems", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 3, pp. 393-409.
- Baliga, B.R. e Patankar, S.V., 1988, "Elliptic systems: Finite-element method II", *Handbook of Numerical Heat Transfer*, pp. 421-455, John Wiley & Sons.
- Cardoso, F.C., 1997, "Algoritmo para simulação numérica das equações do movimento pelo método dos volumes finitos

usando diagramas de Voronoi", Dissertação de mestrado, Departamento de Informática e Estatística, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.

Guia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, 387-411.

Maliska, C.R., 1995, "Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional", LTC, Rio de Janeiro.

Maliska, C.R., Vasconcellos, J.F.V., 1998, "An Unstructured Finite Volume Procedure for Simulating Flows with Moving Fronts", In: IV WCCM – World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, CD-ROM edition.

Marcondes, F., Zambaldi, M.C., e Maliska, C.R., 1995, "Comparação de Métodos Estacionários e GMRES em Simulação de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas Não-Estruturadas", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, Vol. XVII, fasc. 4, pp. 360-370.

Patankar, S.V., 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow", McGraw-Hill, New York.

Peters, S., Mariani, V.C. e Cardoso, F.C., 1997, "Avaliação do desempenho de diferentes métodos de cálculo do gradiente de pressão em malhas não estruturadas de Voronoi", In: Anais XVIII CILAMCE – Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Vol 1, pp. 1297-1304, Brasília.

Raithby, G. D., 1976, "Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow", *Computational Method Applied Mechanical Engineering*, Vol. 9, pp. 153-164.

Schneider, F.A., 1998, "Solução Numérica de Escoamentos Bidimensionais em Malhas Não-Estruturadas pelo método dos Volumes Finitos", Dissertação de Mestrado, Coordenadoria de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.

Schneider, G.E. e Raw, M.J., 1987, "Control-volume finite-element method for heat transfer and fluid flow using co-located variables – 2: Application and validation", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 11, pp. 391-400.

Swaminathan, C.R. e Voller, V.R., 1992, "Streamline upwind scheme for control-volume finite-element, part I: Formulation", *Numerical heat Transfer*, Vol. 22, pp. 95-107.

Taniguchi, N. e Kobayashi, T., 1991, "Finite Volume Method on the Unstructured Grid System", *Computers & Fluids*, vol.9, n.º.34, p. 287-295.

ABSTRACT

This paper presents a numerical method for the solution of 2d incompressible fluid flow problems using unstructured grids. The method uses the control volume approach and the integration volumes are obtained by the method of the medians. The method differs from the usual CVFEM in the construction of the correction equations in the pressure-coupling procedure using the SIMPLEC method. The solutions of classical test problems are obtained for evaluation of the methodology in comparison with similar methodology developed for unstructured grids of Voronoi type.