



## SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS TRIDIMENSIONAIS ELÍPTICOS DE CONVECÇÃO DE CALOR

P.C.S. Juca, A.F.C. Silva, C.R. Maliska

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade Federal de Santa Catarina

C.P. 476 - 88.049 - Florianópolis - SC - Brasil



PEM  
PROGRAMA DE  
ENGENHARIA  
MECÂNICA  
COPPE/UFRJ

### RESUMO

Este trabalho desenvolve um modelo numérico para a solução de escoamentos tridimensionais elípticos em geometrias arbitrárias. O modelo é desenvolvido em coordenadas generalizadas como premissa para seu objetivo principal que é a solução do problema de descargas térmicas nas superfícies de rios e lagos. O modelo hidrodinâmico é testado através da solução elíptica do escoamento na região de entrada de dutos de seções 1x1, 2x1 e 5x1. Os resultados obtidos concordam bem com os resultados experimentais disponíveis.

### INTRODUÇÃO

A principal forma de poluição de corpos d'água são as descargas líquidas provenientes de instalações industriais e de potência. A forma de mensurar o ataque ambiental causado por estas descargas se traduz, em princípio, na determinação dos campos de temperatura e concentração, exigindo para isto a prévia determinação do campo de velocidade no corpo d'água considerado. Uma das maneiras de prever estes campos é modelar o problema matematicamente, invocando os princípios físicos envolvidos, e resolver o modelo matemático. Sendo isto possível, tem-se uma alternativa econômica e geral, uma vez que as diferentes situações podem ser incorporadas facilmente no modelo matemático.

A previsão do comportamento físico de descargas de efluentes térmicos, com ou sem poluentes químicos, pode ser realizada em diversos níveis de complexidade dependendo do tipo de problema. Por exemplo, para descargas em águas rasas onde o jato ocupa praticamente toda a profundidade do corpo d'água, o modelo bi-dimensional, onde a média das propriedades físicas são consideradas ao longo das profundidades, pode ser empregado com bons resultados [1]. Nesta classe de problemas concentram-se grande parte das descargas em rios, uma vez que em geral estes apresentam uma baixa relação entre sua profundidade média e suas dimensões horizontais. A maior restrição da formulação bidimensional com médias na profundidade é, entretanto, a necessidade do jato ser descarregado ocupando toda a profundidade.

Existem casos entretanto, onde o jato é, intencionalmente, lançado na superfície para que os efluentes térmicos fiquem ali concentrados, sem afetar a fauna e a flora que vivem em profundidades maiores. O campo de temperaturas resultante é tridimensional e tal problema não pode ser atacado com o modelo anterior, requerendo uma formulação mais complexa.

Neste trabalho é desenvolvido um modelo numérico em volumes finitos para o tratamento de problemas tridimensionais elípticos. O trabalho descreve as características importantes do modelo, como a natureza do sistema de coordenadas empregado, as condições de contorno, a obtenção da equação para pressão, etc.

A validação de um modelo tridimensional elíptico envolve diversas etapas, entre elas a validação da parte hidrodinâmica do modelo. Assim os resultados aqui apresentados referem-se a solução do problema não linear hidrodinâmico na região de entrada de dutos retangulares. Esta geometria foi escolhida em função dos resultados experimentais disponíveis na literatura, mas deve-se ressaltar que o modelo numérico foi desenvolvido em coordenadas generalizadas estando preparado, portanto, para solução de problemas em geometrias arbitrárias.

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O objetivo final deste trabalho é a solução do sistema de equações que descreve a convecção natural e/ou forçada tridimensional envolvendo a descarga de um jato quente em um escoamento, dito principal, representado pelo corpo d'água receptor da descarga. O escoamento é incompressível e os fluidos envolvidos são newtonianos com propriedades físicas constantes. No sistema coordenado cartesiano a equação da conservação para uma propriedade física  $\phi$  qualquer é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w\phi) + P^{\phi} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}) + S^{\phi} \quad (1)$$

A Tab. I apresenta os valores de  $P^{\phi}$ ,  $S^{\phi}$  e  $\lambda^{\phi}$  para as equações que constituem o problema, quando  $\phi$  assume uma das variáveis envolvidas, ou seja  $u, v, w, P, T, C$ .

Tabela I - Parametros  $P^{\phi}$ ,  $S^{\phi}$  e  $\lambda^{\phi}$

	$P^{\phi}$	$S^{\phi}$	$\lambda^{\phi}$
$\phi = l$	0	0	0
$\phi = u$	$\partial p / \partial x$	0	$\mu$
$\phi = v$	$\partial p / \partial y$	0	$\mu$
$\phi = w$	$\partial p / \partial z$	$g\beta(T - \bar{T})$	$\mu$
$\phi = T$	0	0	$k/cp$
$\phi = C$	0	0	$D_{12}$

### EQUAÇÕES TRANSFORMADAS

O domínio de solução é uma região tridimensional com fronteiras irregulares. Por esta região tratar-se de um corpo d'água (rio ou lago) a mesma tem sempre uma superfície plana e, devido a esta particularidade, a discretização empregada é composta por uma malha bidimensional que se adapta as fronteiras irregulares da superfície do corpo d'água e se reproduz a diferentes profundidades deste corpo. Isto é, visto de cima, o observador sempre visualizará a malha bidimensional que se adapta a superfície. Para este caso, a transformação adequada do sistema cartesiano  $x, y, z$  para o sistema generalizado  $\xi, \eta, \Gamma$  é

$$\xi = \xi(x, y) \quad (2)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (3)$$

$$\Gamma = \Gamma(x, y, z) \quad (4)$$

onde o Jacobiano da transformação é dado por

$$J = 1/(z_{\Gamma} \cdot (x_{\xi} \cdot y_{\eta} - x_{\eta} \cdot y_{\xi})) \quad (5)$$

Expressões das derivadas da matriz Jacobiana podem ser encontradas em [2]. Com este tipo de transformação a geração da malha tridimensional fica bastante facilitada, bastando gerar uma malha bidimensional para a superfície e em cada interseção x,y do plano de superfície, baixar uma vertical e dividi-la no número de volumes e no espaçamento desejado. A equação (1) sujeita a transformação dada pelas equações (2) a (4) tem a seguinte forma quando escrita no sistema de coordenadas generalizado  $\xi, \eta, \Gamma$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + \frac{\partial}{\partial \Gamma} (\rho W \phi) + P^\phi / J = \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [C_{11} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_{12} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_{13} \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma}] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} [C_{21} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_{22} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_{23} \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma}] + \\ + \frac{\partial}{\partial \Gamma} [C_{31} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_{32} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_{33} \frac{\partial \phi}{\partial \Gamma}] + (S^\phi / J) \end{aligned} \quad (6)$$

onde os coeficientes  $C_{ij}$  podem ser encontrados em [2]. Na equação acima U, V e W são as componentes contravariantes do vetor velocidade dadas por

$$U = (y_\eta z_\Gamma u - x_\eta z_\Gamma v) \quad (7)$$

$$V = (x_\xi z_\Gamma v - y_\xi z_\Gamma u) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} W = (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)u - (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi)v \\ + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)w \end{aligned} \quad (9)$$

A equação (6) com  $\phi$  assumindo as diversas variáveis recupera o sistema de equações a ser resolvido no plano transformado.

#### ARRANJO DAS VARIÁVEIS NA MALHA COMPUTACIONAL

Um arranjo conveniente, para garantir um bom acoplamento entre pressão e velocidade é aquele em que as componentes cartesianas do vetor velocidade encontram-se localizadas de modo coincidente no centro das seis faces do volume de controle empregado para a equação da conservação da massa, enquanto que outros escalares como a pressão, temperatura e outras estão localizadas no centro destes volumes [3]. Este arranjo, denominado desencontrado, pode ser visto na Fig. 1, que apresenta um volume no sistema cartesiano e o mesmo volume no domínio transformado. Observa-se que no arranjo desencontrado os volumes de controle para as equações do movimento estarão defasados em relação ao volume de controle para a equação da conservação da massa. A Fig. 2 apresenta os volumes de controle para as equações do movimento nas direções y e z deslocados em relação ao volume de controle para a equação da conservação da massa (volume em linha cheia).

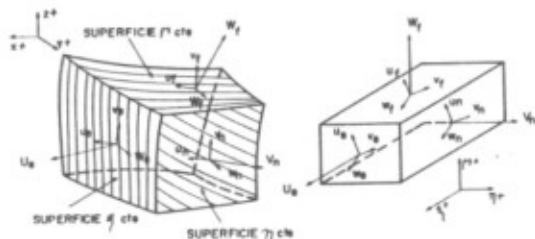


Fig.1 - Volume no domínio físico e no domínio transformado.

Neste tipo de arranjo tanto as componentes cartesianas bem como as componentes contra-variantes do vetor velocidade tomam parte do procedimento de solução. Como apenas a componente contravariante perpendicular a face considerada é responsável pelo fluxo das quantidades em questão, a componente U é armazenada

apenas nas faces este e oeste, a componente V nas faces norte e sul e a componente W nas faces frente e dorso do volume de controle para a equação da conservação da massa.

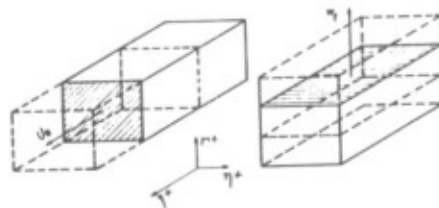


Fig. 2 - Volumes de controle para as equações do movimento nas direções y e z.

#### EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

As equações algébricas são obtidas neste trabalho empregando-se o método do volumes de controle. A Fig. 1, mostra um volume de controle elementar com a respectiva nomenclatura empregada. Integrando-se a Eq. (6) no tempo e no espaço tem-se

$$\begin{aligned} [(\rho \phi)_P^{n+1} - (\rho \phi)_P^n] (\Delta \xi \Delta \eta \Delta \Gamma / J \Delta t) + A_P^* \phi_P^{n+1} = \\ A_N^{\phi N} + A_S^{\phi S} + A_E^{\phi E} + \\ A_W^{\phi W} + A_F^{\phi F} + A_D^{\phi D} + \\ + A_{NE}^{\phi NE} + A_{NW}^{\phi NW} + A_{SW}^{\phi SW} + \\ + A_{SE}^{\phi SE} + A_{FE}^{\phi FE} + A_{DE}^{\phi DE} + \\ + A_{FW}^{\phi FW} + A_{DW}^{\phi DW} + A_{FN}^{\phi FN} + \\ + A_{DN}^{\phi DN} + A_{FS}^{\phi FS} + A_{DS}^{\phi DS} \\ - [P^\phi / J]^{n+1} \Delta \xi \Delta \eta \Delta \Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

onde o esquema WUDS [4] foi usado para obter os valores de  $\phi$  e dos gradientes de  $\phi$  nas faces do volume de controle elementar. Os coeficientes  $A_i$  e  $A_i^*$  da equação (10) podem ser vistos em [2]. Estes não são aqui apresentados por serem em grande quantidade e extensos.

#### GENERALIDADES DO ESQUEMA NUMÉRICO

O esquema numérico empregado para a solução do sistema de equações foi a formulação denominada (U-V-W), a qual se caracteriza por obter as equações para correção das velocidades em termos das componentes contravariantes do vetor velocidade [5]. Estas equações são determinadas com o uso das equações do movimento para u, v e w, discretizadas, e empregando-se as relações entre as componentes cartesianas e contravariantes do vetor. Assim as equações utilizadas são a equação da continuidade e as equações do movimento escritas para U, V e W obtidas a partir das equações do movimento para u, v e w.

O tratamento do acoplamento pressão-velocidade é realizado utilizando-se o método PRIME [5]. Esta técnica consiste em obter uma equação para a pressão através da substituição das expressões das velocidades contra-variantes, obtidas das equações dos movimento, na equação da conservação da massa discretizada.

O princípio da conservação da massa para um volume de controle elementar localizado no interior do domínio, como o mostrado na Fig.1, no plano transformado, pode ser escrito em função das velocidades contra-variantes como:

$$\begin{aligned} [\rho U_e - \rho U_w] \Delta \eta \Delta \Gamma + [\rho V_n - \rho V_s] \Delta \xi \Delta \Gamma \\ + [\rho W_f - \rho W_d] \Delta \xi \Delta \eta = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Substituindo na equação (11) as equações para U, V, e W e reorganizando os termos, obtém-se uma equação para o cálculo da pressão que tem a forma

$$A_P(P_P) = A_N(P_N) + A_S(P_S) + A_E(P_E) + A_W(P_W) + A_F(P_F) + A_D(P_D) + B^P \quad (12)$$

O termo  $B^P$  é dado pela expressão

$$B_P = [A_{NE}^P P_{NE} + A_{SE}^P P_{SE} + A_{SW}^P P_{SW} + A_{NW}^P P_{NW} + A_{FE}^P P_{FE} + A_{FW}^P P_{FW} + A_{FN}^P P_{FN} + A_{FS}^P P_{FS} + A_{DS}^P P_{DS} + A_{DN}^P P_{DN} + A_{DW}^P P_{DW} + A_{DE}^P P_{DE}] (\Delta V/4) + (\hat{U}_E - \hat{U}_W + \hat{V}_N - \hat{V}_S + \hat{W}_F - \hat{W}_D)$$

onde os coeficientes da equação podem ser vistos em [2] e são aqui omitidos pelas razões já citadas. A equação (12) é válida para um volume interno do domínio. Quando o volume estiver localizado em uma de suas fronteiras os coeficientes se modificam, pois as condições de contorno para a pressão ficam automaticamente incorporadas às equações algébricas através do conhecimento das condições de contorno para a velocidade. O procedimento para obtenção destes coeficientes é o mesmo empregado para um volume localizado no interior do domínio.

O ciclo iterativo utilizado para a solução do modelo matemático é composto dos passos descritos a seguir.

- Arbitrar os campos de pressão  $P(\xi, \eta, \Gamma)$ , temperatura  $T(\xi, \eta, \Gamma)$ , e velocidade  $u(\xi, \eta, \Gamma)$ ,  $v(\xi, \eta, \Gamma)$ ,  $w(\xi, \eta, \Gamma)$ , no domínio.
- Calcular os coeficientes para as equações do movimento.
- Calcular os valores de  $U, V$  e  $W$  através das velocidades cartesianas da iteração anterior.
- Resolver a equação de Poisson para o campo de pressões.
- Corrigir as velocidades  $U, V$  e  $W$  em função do novo campo de pressões obtido.
- Calcular o novo campo de velocidades cartesianas em função das velocidades contra-variantes corrigidas.
- Retornar ao passo (b) e iterar até a convergência estabelecida.
- Calcular os coeficientes da equação da energia.
- Resolver a equação da energia e da concentração.

#### CONDIÇÕES DE CONTORNO

Na aplicação das condições de contorno para as equações do movimento foi utilizada a técnica dos volumes fictícios. Valores das velocidades devem ser então obtidos para os pontos fictícios, em função dos valores internos e dos valores prescritos nas fronteiras.

Como exemplo de aplicação da condição de contorno para as componentes cartesianas considere um dos volumes fictícios localizados na face sul do domínio. Neste caso devem ser calculados os valores das componentes cartesianas do vetor velocidade nas faces de gama constante e ksi constante do volume fictício mostrado na Fig. 3. As componentes da velocidade na face do volume fictício que corresponde ao plano de eta constante já estão definidas pela condição de contorno de velocidade imposta sobre a fronteira, no caso do volume em consideração.

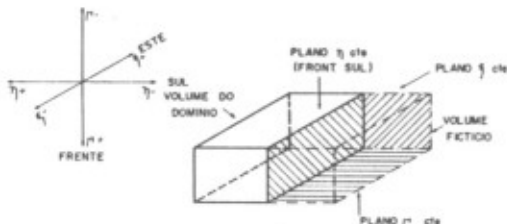


Fig. 3 - Volume fictício localizado na face sul

As componentes do vetor velocidade nos planos de ksi e gama constante do volume fictício são obtidas de acordo com as relações

$$(\phi_p|_{\xi=cte} + \phi_f|_{\xi=cte})/2 = \phi_{fr}$$

$$(\phi_p|\Gamma=cte + \phi_f|\Gamma=cte)/2 = \phi_{fr}$$

onde  $\phi$  representa qualquer das componentes do vetor velocidade,  $\phi_p$  é seu valor no domínio,  $\phi_f$  seu valor sobre o plano do volume fictício e  $\phi_{fr}$  é seu valor sobre a fronteira. O método acima foi aplicado a todas as fronteiras cuja condição de contorno é de velocidade prescrita.

As condições de contorno para temperatura também foram aplicadas utilizando-se a técnica dos volumes fictícios, admitindo-se que a malha seja quase ortogonal na fronteira [2]. Se "f" é um volume fictício e "p" um volume do interior do domínio, e na fronteira a temperatura  $T_{fr}$  é prescrita, tem-se

$$T_{fr} = (T_f + T_p)/2$$

e a equação para o volume fictício assume a forma

$$T_f = -T_p + 2T_{fr}$$

#### RESULTADOS

O problema da região de entrada hidrodinâmica em dutos de seção retangular é resolvido com o objetivo de validar a parte hidrodinâmica do modelo. As geometrias estudadas são de seção transversal 1x1, 2x1 e 5x1, para os quais existem resultados experimentais de duas fontes distintas.

A Fig. 4 mostra a geometria considerada para o duto, sendo que em todos os casos a dimensão  $L_z$  foi tomada como unitária. Estudos desta natureza foram levados a efeito por Goldstein [6] e Sparrow [7]. Goldstein examinou dutos de seção transversal quadrada usando a técnica de laser-doppler para medição das velocidades e Sparrow examinou dutos de seção 2x1 e 5x1, realizando medições através de tubos de Pitot.

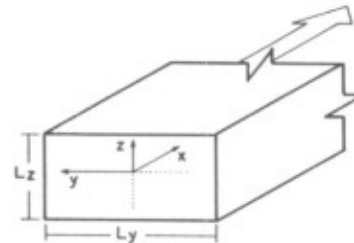


Figura 4 - Duto de seção retangular

A Fig.5 mostra o desenvolvimento da velocidade ao longo da linha central do duto para os tres casos considerados, sendo utilizada a adimensionalização abaixo. Nesta figura são também apresentados os pontos experimentais obtidos por Sparrow e Goldstein.

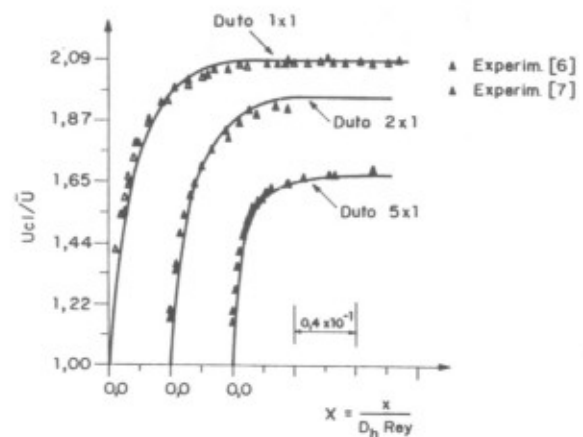


Figura 5 - Variação axial da velocidade na linha de centro do duto.

Observa-se que para as seções imediatamente na entrada dos dutos o resultados numérico prevê velocidades em torno de 5% inferiores as velocidades medidas experimentalmente. De uma forma geral observa-se a concordância com os perfis obtidos experimentalmente para valores de  $X > 0,020$ , nas três geometrias.

Entretanto deve-se observar que Sparrow aponta que existe uma incerteza sobre a determinação do local efetivo de início do desenvolvimento do perfil em seu experimento. Em paralelo, Goldstein aponta que para valores de  $X < 0,0075$  flutuações de velocidade eram observadas no experimento, impossibilitando a obtenção de perfis mais próximos a entrada do duto ou mesmo em pontos próximos a parede nesta localização. Embora a técnica empregada por Goldstein ofereça menor perturbação no escoamento, Sparrow mostra em seu trabalho um perfil de velocidade medido em  $X = 0,00056$  e não comenta problemas de perturbação nas medições. Estes resultados discordam dos resultados obtido numericamente como mostra a fig.6, em sua pior situação, em torno de 13% embora o perfil para  $X = 0,0201$  apresente boa concordância. A Fig. 6 também mostra a existência de velocidades axiais maiores perto das paredes do que na linha de centro do duto. Idêntica observação foi feita por outros autores [8] na solução elíptica do problema de região de entrada em placas paralelas e dutos circulares. Esta questão não será, entretanto, discutida neste trabalho e será objeto de publicação específica.

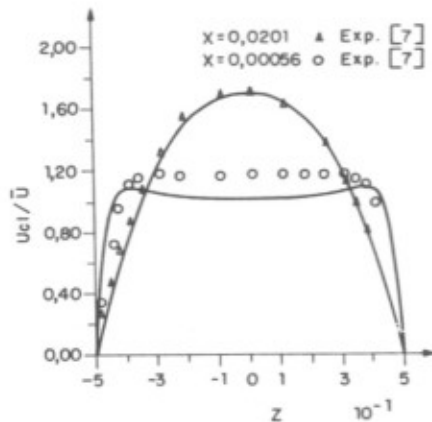


Figura 6 - Perfis de velocidade para o duto 2x1

O perfil obtido por Goldstein para pequenas distâncias da entrada também discorda, embora em menor magnitude, dos resultados obtidos numericamente.

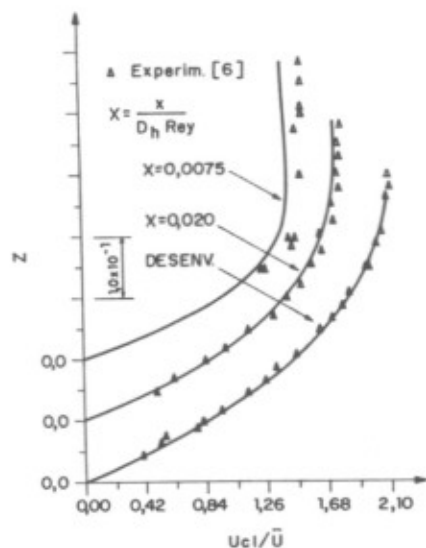


Figura 7 - Perfis de velocidade para o duto 1x1

A Fig 7, apresenta os perfis para o duto 1x1 em diferentes posições de X, comparados com os resultados obtidos por Goldstein.

#### CONCLUSÃO

A previsão numérica dos perfis de velocidade em dutos retangulares concorda bem com os perfis obtidos experimentalmente para valores de  $X > 0,0075$  para dutos de seção transversal 1x1, 2x1 e 5x1. Uma pequena discordância é observada na região próxima a entrada do duto onde os perfis obtidos numericamente preveem um desenvolvimento mais lento da camada limite. Isto pode ser causado pela separação do escoamento na região onde a seção de testes é acoplada a seção de regularização do perfil como observado em [6], ou mesmo por não haver um perfil perfeitamente uniforme na entrada da região de teste, o que ocasionou as observações encontradas em [7] acerca do local efetivo do início do desenvolvimento do perfil de velocidades.

A aproximação teórica empregada tanto por Sparrow como por Goldstein para avaliação de seus resultados é fornecida por Han [9], a qual apresenta resultados bastante inferiores aos obtidos com a presente modelação.

Agradecimento especial às Centrais Elétricas do Sul do Brasil - ELETROSUL - que tem suportado o programa de pesquisa em Poluição Térmica de Rios e Lagos desenvolvido pelo SINMEC/EMC/CT/UFSC.

#### ABSTRACT

The present work advances a numerical model for the solution of three dimensional elliptic fluid flow problems in arbitrary geometries. The method is developed in the framework of a generalized coordinate system with the main goal of solving the surface thermal discharges into rivers and lakes. The hydrodynamics of the model is tested by solving, elliptically, the entrance flow in rectangular ducts of 1x1, 2x1 and 5x1 aspect ratios. The results agree well with the available experimental results.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] Maliska, C.R., Silva, A.F.C. e Perez, J.A.O., Heat Transfer Predictions of Thermal Discharges in Water Bodies, IX Cong. Bras. de Eng. Mecânica, SC, Dez., 1987.
- [2] Jucá, P.C.S., Silva, A.F.C., Maliska, C.R., Ataque Térmico em Rios e Lagos - Desenvolvimento de um Modelo Numérico Tridimensional, Relatório à ELETROSUL, SINMEC/EMC/UFSC, Parte II, Julho 1989.
- [3] Harlow, F.H., Welch, J.E., Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Physics of Fluids, vol. 8, 1965.
- [4] Raithby, G.D., Prediction of Dispersion by Surface Discharge, Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canada, 1976.
- [5] Hackman, L., Personal Communication to Maliska, C.R., Waterloo, Canada, 1981.
- [6] Goldstein, R.J e Kreid, D.K, Measurement of Laminar Flow Development in a Square Duct Using a Laser-Doppler Flowmeter, Journal of Appl. Mechanics, pp 813-817, Dec., 1967.
- [7] Sparrow, E.M., Hixon, C.W. e Shavit, G., Experiments on Laminar Flow Development on Rectangular Ducts, Journal of Basic Engineering, pp 116-124, March, 1967.
- [8] Tribess, A. Maliska, C.R., Um Modelo Numérico para Previsão da Transferência de Calor em Escoamentos Cruzados, VIII COBEM, S.J. dos Campos, 1985.
- [9] Han, L.S., Hydrodynamic Entrance Lengths for Incompressible Flow in Rectangular Ducts, Journal of Appl. Mechanics, vol. 27, num. 3, pp. 403-409, 1960.