

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS USANDO MALHAS DE VORONOI

João Flávio V. de Vasconcellos e Clovis R. Maliska

SINMEC - Laboratório de Simulação Numérica em

Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor

Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC - C. P. 476

88040-900 - Florianópolis - SC - Brazil

web: <http://www.sinmec.ufsc.br>

### ABSTRACT

Este trabalho complementa e testa a metodologia básica apresentada por Maliska (1995) para a análise de escoamentos utilizando malhas não-estruturadas com a apresentação de resultados para escoamentos bidimensionais incompressíveis. Esta metodologia faz uso de um tipo específico de malhas não-estruturadas, as malhas de Voronoi, em conjunto com os conceitos desenvolvidos para o método de Volumes Finitos. Resultados comparativos com soluções de problemas clássicos da mecânica dos fluidos computacional são apresentados mostrando a potencialidade do método.

### INTRODUÇÃO

O método de volumes finitos tem sido usado por pesquisadores de todo o mundo na solução de problemas envolvendo fluido e calor. As soluções obtidas por este método não deixam dúvidas quanto à sua funcionalidade, pois bons resultados são encontrados nas mais diversas revistas que tratam de problemas envolvendo mecânica dos fluidos computacional. Historicamente, a grande deficiência deste método, sempre esteve relacionado com a geometria. Problemas envolvendo escoamentos complexos, transientes, etc., em princípio, não representam grandes limitações ao método. Mas, por outro lado, há uma grande dificuldade no uso deste método na estudo de problemas envolvendo geometrias complexas, mesmo em situações físicas relativamente simples. Algumas metodologias foram desenvolvidas para contornar esta dificuldade. Cita-se a aplicação de coordenadas coincidentes com a fronteira ou o uso de multidomínios no mapeamento da estrutura em estudo. A aplicação destas duas metodologias, que podem inclusive ser usadas em conjunto, habilitaram o método de volumes finitos para ser usados em geometrias bastante complexas. Mas, mesmo assim, a geometria continuou a ser um fator limitante do método. Entre as metodologias alternativas para a solução de problemas envolvendo geometrias complexas cita-se o método de elementos finitos, baseado no uso de malhas não-estruturadas para o mapeamento do domínio. Virtualmente, pode-se modelar qualquer região bi ou tridimensional. Em contrapartida, formulações baseadas neste método não satisfazem localmente os princípios de conservação. Como se sabe, o problema relativo à limitação geométrica do método de volumes finitos está intrinsicamente associado ao uso de malhas estruturadas e a necessidade de se mapear o domínio baseado em um sistema de coordenadas global. A aplicação de malhas não-estruturada em conjunto com os conceitos de volumes finitos não é muito difundida na literatura, muito embora recentemente o volume de trabalhos sobre o assunto tenha aumentado significativamente. Nos trabalhos de Taniguchi *et alii* (1990) e Taniguchi e Kobayashi (1991) os conceitos que são amplamente difundidos em malhas estruturadas foram transplantados para malhas não-estruturadas. O

uso do diagrama de Voronoi nestes trabalhos está associado a uma de suas características, i. e., estas malhas são localmente ortogonais. Entre os artigos que desenvolveram variações do método de volumes finitos para ser usado com malhas não-estruturadas tem-se o trabalho de Davidson (1996). Fazendo uso de malhas não-estruturadas genéricas, ele apresenta o resultado de simulações de diversos problemas clássicos com o objetivo de mostrar a sua metodologia. Como sua metodologia utiliza malhas genéricas, algumas características encontradas no uso de malhas de Voronoi deixam de existir. Por esta razão algumas interpolações realizadas por ele são bem mais complexas do que as aqui apresentadas. Mathur e Murthy (1997) apresentam uma metodologia baseada em volumes finitos que faz uso de poliedros irregulares para mapear o domínio. Simulação de problemas bi e tridimensionais são apresentadas neste trabalho. Por um caminho diferente dos anteriormente citados seguiu o trabalho de Vilsmeier e Hänel (1995). Eles fazem uso de malhas triangulares na discretização do domínio e um esquema de Runge-Kutta para determinar o comportamento das variáveis no tempo. Thomadakis e Leschziner (1996) fazem uso de um esquema "desencontrado" usando malhas não-estruturadas. No centro dos volumes triangulares ou quadrangulares são armazenados todas as variáveis, com exceção da pressão. Esta é armazenada nos vértices dos volumes. Esta maneira de armazenar as variáveis faz com que este método seja similar aos de armazenamento desencontrados usado com volumes finitos clássico, e provavelmente com as mesmas vantagens e desvantagens. Maliska (1995) apresentou uma metodologia usando diagramas de Voronoi que emprega toda a formulação do método de volumes finitos para malhas estruturadas. Cardoso (1997) apresenta a solução do escoamento em uma cavidade quadrada com a tampa móvel usando, com alterações, a metodologia proposta por Maliska (1995).

### FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Todas as equações que serão estudadas neste trabalho podem ser escritas na seguinte forma genérica

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\phi\nabla\phi - \rho\vec{V}\phi) + S^{\phi} \quad (1)$$

onde  $\phi$  é a variável genérica que poderá ser tanto  $u$ ,  $v$  ou  $T$ , dependendo da equação de conservação analisada.  $\Gamma^\phi$  é o coeficiente de transporte da respectiva equação.

O método dos volumes finitos baseia-se na integração das equações diferenciais, na sua forma conservativa, sobre um volume de controle. Tradicionalmente, o volume de controle empregado é um quadrilátero, para situações bidimensionais, ou um hexaedro, para situações tridimensionais. No presente trabalho a equação genérica, Eq. (1), será integrada sobre o volume de Voronoi apresentado na Figura 1, fazendo-se uso do teorema da divergência.

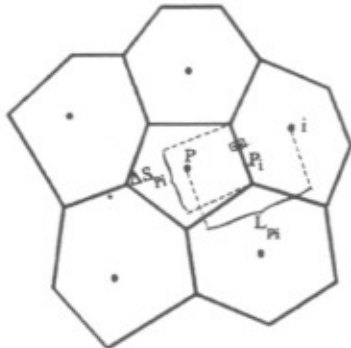


Figura 1: Volume típico usado na integração da Eq. (1).

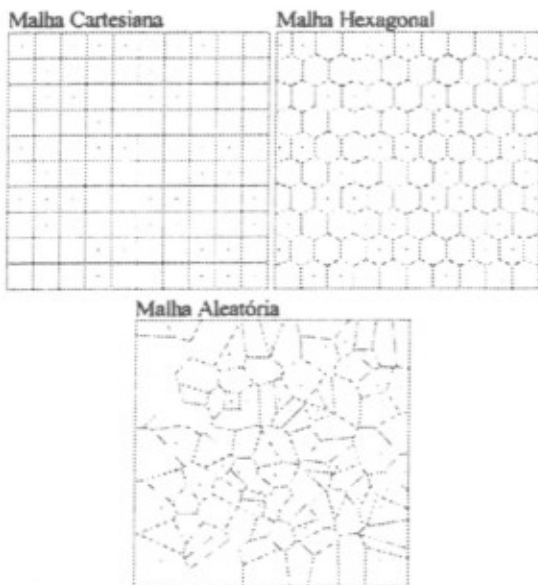


Figura 2: Malhas de Voronoi usadas para testar a metodologia.

$$\int_V \rho (\phi - \phi^o) dV = \int_t \left( \sum_i^N (\vec{J} \cdot \Delta S)_i + S^\phi \Delta V \right) dt \quad (2)$$

onde  $\vec{J}$ , que representa o fluxo total de  $\phi$  por difusão e convecção, é assim definido

$$\vec{J} = \Gamma^\phi \nabla \phi - \rho \vec{V} \phi \quad (3)$$

O resultado da integração de cada um dos termos da Eq. (2) é

$$\int_V \rho (\phi - \phi^o) dV = M_P \phi_P - M_P^o \phi_P^o \quad (4)$$

onde  $M_P$  é massa no volume  $P$ . O sobrescrito "o" indica que esta variável deve ser avaliada no instante de tempo anterior. O termo responsável pela convecção e difusão de  $\phi$  na Eq. (2) é integrado da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \int_t \sum (\vec{J} \cdot \Delta S)_i dt &= \int_t \sum \left( (\Gamma^\phi \nabla \phi - \rho \vec{V} \phi) \cdot \Delta S \right)_i dt \\ &= \left( \sum (\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}})_{P_i} \Delta S_{P_i} - \sum \rho (\vec{V} \cdot \vec{n})_{P_i} \phi_{P_i} \Delta S_{P_i} \right) \Delta t \end{aligned} \quad (5)$$

E, finalmente, o termo fonte desta equação é convenientemente linearizado.

$$\int_t S^\phi \Delta V dt = (S_P^\phi \phi_P + S_c^\phi) \Delta V_P \Delta t \quad (6)$$

onde  $\Delta V_P$  é o volume do  $P$ -ésimo volume de integração.

A Eq. (2) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{M_P \phi_P - M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} &= \sum (\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}})_{P_i} \Delta S_{P_i} - \\ &\sum \rho (\vec{V} \cdot \vec{n})_{P_i} \phi_{P_i} \Delta S_{P_i} + (S_P^\phi \phi_P + S_c^\phi) \Delta V_P \end{aligned} \quad (7)$$

A Eq. (7), na forma com que foi apresentada, pode ser usada em diversas variantes do método de volumes finitos que fazem uso de malhas estruturadas. A partir deste momento esta equação começa a ser preparada para uso de malhas não-estruturadas, especificamente, malhas de Voronoi. O termo  $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{P_i}$  é facilmente calculado, pois como já foi dito, o diagrama de Voronoi, usado para a discretização dos volumes, é localmente ortogonal. Desta forma pode-se avaliá-lo como

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{P_i} = \frac{\phi_i - \phi_P}{L_{P_i}} \quad (8)$$

onde  $L_{P_i}$  é a distância entre dois pontos geradores, como indicado na Figura 1. Deve-se, de alguma maneira, determinar o valor de  $\phi_{P_i}$ , que é o valor de  $\phi$  na  $i$ -ésima face do volume  $P$ . O método WUDS (Raithby e Torrence, 1974), adaptado para malhas não-estruturadas, foi a maneira escolhida para realizar esta interpolação. A função de interpolação é

$$\phi_{P_i} = (1 + \alpha_i) \phi_P + (1 - \alpha_i) \phi_i \quad (9)$$

onde  $\alpha_i$  é calculado pela seguinte equação

$$\alpha_i = \frac{P_e^2}{10 + 2P_e^2} \quad (10)$$

e o número de Peclet,  $P_e$ , deve ser calculado como

$$P_e = \frac{V_{P_i} L_{P_i}}{\Gamma^\phi} \quad (11)$$

com  $V_{Pi}$  sendo a velocidade normal à interface  $i$  e  $\Gamma^\phi$  o coeficiente de difusão da propriedade  $\phi$ . Pode-se, então, reescrever a Eq. (7) da seguinte forma

$$A_p \phi_P = \sum A_i \phi_i + B \quad (12)$$

onde

$$A_i = \left\{ \frac{\Gamma_{Pi}^\phi}{L_{Pi}} - \rho V_{Pi} \left( \frac{1}{2} - \alpha_{Pi} \right) \right\} \Delta S_{Pi}$$

$$A_P = \sum \left\{ \frac{\Gamma_{Pi}^\phi}{L_{Pi}} + \rho V_{Pi} \left( \frac{1}{2} + \alpha_{Pi} \right) \right\} \Delta S_{Pi} \quad (13)$$

$$- S_P^\phi \Delta V_P + \frac{M_P}{\Delta t}$$

$$B = S_c^\phi \Delta V_P + \frac{M_P^o \phi_P^o}{\Delta t}$$

Assim tem-se um sistema linear de equações para determinar os valores de  $\phi$  nos centros de cada um dos volumes finitos.

#### CÁLCULO DO GRADIENTE DE PRESSÃO

A correta determinação do gradiente de um vetor usando malhas não-estruturadas é uma questão chave para o método de volumes finitos. Necessita-se calcular o gradiente de pressão para ser usado na Eq. (13). Quando  $\phi = u$  então  $S_c = -\frac{\Delta P}{\Delta x}$  e quando  $\phi = v$  então  $S_c = -\frac{\Delta P}{\Delta y}$ . Ao se usar malhas cartesianas a determinação dos gradientes é extremamente facilitada, pois todos os pontos estão alinhados em uma linha de coordenadas. Mas, infelizmente, quando se adota malhas não-estruturadas esta simplicidade já não é mais possível, ou pelo menos não foi ainda desenvolvida.

Taniguchi *et alii* (1990) apresentaram uma maneira para o cálculo do gradiente de um vetor baseado em uma técnica de minimização, que envolve a solução de um sistema de equações lineares para cada volume do domínio. A única limitação encontrada é que cada volume finito deve ter pelo menos dois vizinhos (no caso bidimensional). Os termos  $\frac{\Delta P}{\Delta x}$  e  $\frac{\Delta P}{\Delta y}$  são calculados segundo as seguintes fórmulas (Cardoso, 1997)

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta P}{\Delta x} \\ \frac{\Delta P}{\Delta y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

onde

$$A_{11} = \sum g^{Pi} e_x^2$$

$$A_{12} = A_{21} = \sum g^{Pi} e_x e_y$$

$$A_{22} = \sum g^{Pi} e_y^2$$

$$B_1 = \sum g^{Pi} \nabla P_i e_x$$

$$B_2 = \sum g^{Pi} \nabla P_i e_y \quad (15)$$

$$g^{Pi} = \frac{\Delta S_{Pi}}{L_{Pi}}$$

$$\nabla P_i = \frac{P_i - P_P}{L_{Pi}}$$

e  $e_x$ , e  $e_y$ , são as componentes  $x$  e  $y$  do vetor normal à face  $i$  do volume, respectivamente.

Maliska (1995) propôs uma metodologia que calcula o gradiente do vetor, baseada numa média dos gradientes das faces dos volumes. Esta metodologia apresenta os mesmos resultados que a metodologia de Taniguchi *et alii* (1990) em malhas cartesianas. Para outras malhas há pequenas diferenças. Estudos, entretanto, demonstraram (Vasconcellos e Maliska, 1998) que, apesar destas diferenças no cálculo do gradiente, os campos de velocidade obtido usando as Eqs. (16) e (17) se aproximam satisfatoriamente das soluções padrão nos casos testados. Os termos  $\frac{\Delta P}{\Delta x}$  e  $\frac{\Delta P}{\Delta y}$  são calculados por

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\sum_i^N \left( \frac{\Delta P}{\Delta \vec{n}} \cdot \vec{i} \right) L_{Pi}}{\sum_i^N L_{Pi} (\vec{n} \cdot \vec{i})} = \frac{\sum_i^N (P_i - P_P) (\vec{n} \cdot \vec{i})}{\sum_i^N L_{Pi} |\vec{n} \cdot \vec{i}|} \quad (16)$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta y} = \frac{\sum_i^N \left( \frac{\Delta P}{\Delta \vec{n}} \cdot \vec{j} \right) L_{Pi}}{\sum_i^N L_{Pi} (\vec{n} \cdot \vec{j})} = \frac{\sum_i^N (P_i - P_P) (\vec{n} \cdot \vec{j})}{\sum_i^N L_{Pi} |\vec{n} \cdot \vec{j}|} \quad (17)$$

#### ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

A determinação de um procedimento de correção da pressão é uma das questões mais importantes num método numérico de simulação de escoamentos. Como se sabe, este procedimento só é necessário porque as variáveis são resolvidas de forma segregada, isto é, determina-se a solução de um sistema linear para cada uma das variáveis em estudo, no lugar de resolver um único, e grande, sistema linear para todas as variáveis. Na prática, devido as limitações dos computadores, esta alternativa tem sido evitada.

Um dos procedimentos mais amplamente difundidos para lidar com o problema do acoplamento da pressão com a velocidade é o SIMPLEC, desenvolvido por Van Doormall e Raithby (1984) para ser usado com malhas estruturadas. Com o seu uso, pode-se obter pressões e velocidades que satisfazem, simultaneamente, a equação de conservação da massa e do movimento linear. Maliska (1995) reescreveu o método SIMPLEC para poder usá-lo em malhas não-estruturadas. Desta forma, pode-se escrever  $V_{Pi}$ , velocidade normal a  $i$ -ésima face do volume, como sendo

$$V_{Pi} = V_{Pi}^* - \frac{(P'_P - P'_i)}{\left( A_P - \sum A_{nb} \right)_{Pi}} \frac{\overline{\Delta V}}{L_{Pi}} \quad (18)$$

onde  $P'$  é a correção da pressão, que se relaciona com  $P$  da seguinte maneira

$$P = P^* + P' \quad (19)$$

e  $P^*$  é o valor estimado de pressão. Uma aproximação linear do valor de  $A_P - \sum A_{nb}$  foi então apresentada

$$\left( \overline{A_P - \sum A_{nb}} \right)_{P_i} = \frac{(A_P)_P + (A_P)_i - \sum (A_{nb})_P - \sum (A_{nb})_i}{2} \quad (20)$$

Vasconcellos e Maliska (1998) propuseram uma interpolação geométrica, Eq. (21), com a qual obtiveram melhores resultados, dada por

$$\left( \overline{A_P - \sum A_{nb}} \right)_{P_i} = \frac{2 [A_P - \sum (A_{nb})]_P [A_P - \sum (A_{nb})]_i}{[A_P - \sum (A_{nb})]_P + [A_P - \sum (A_{nb})]_i} \quad (21)$$

A relação anterior foi obtida levando-se em conta que a  $i$ -ésima face do volume  $P$  está situada a mesma distância do ponto gerador  $i$  e  $P$ . Substituindo a Eq. (18) na equação de conservação da massa, obtém-se uma equação de Poisson para a correção da pressão

$$A_P P'_P = \sum_i^N A_i P'_i + B \quad (22)$$

onde

$$A_i = \frac{\overline{\Delta V}}{\left( \overline{A_P - \sum A_{nb}} \right)_{P_i}} \frac{\Delta S_{P_i}}{L_{P_i}}$$

$$A_P = \sum_i^N A_i \quad (23)$$

$$B = \sum_i^N V_{P_i}^* \Delta S_{P_i}$$

$$\overline{\Delta V} = \frac{\Delta V_P + \Delta V_i}{2}$$

Com os coeficientes calculados, resolve-se este sistema de equações lineares, determinando, desta forma, os valores de correção da pressão.

### VELOCIDADES NAS INTERFACES

O método apresentado é intrinsecamente co-localizado, ou seja, todas as variáveis estão armazenadas nos centros dos volumes. Mas, para o cálculo da conservação da massa, é necessário conhecer os valores das velocidades nas faces do volume, para realizar o balanço de massa corretamente. Como o valor das velocidades não é conhecido nas fronteiras dos volumes, uma interpolação deve ser feita. Historicamente este sempre foi um problema dos métodos co-localizados. O presente trabalho faz uso de uma interpolação, que satisfaz a conservação do movimento linear,

apresentada por Marchi e Maliska (1994). Originalmente preparada para ser usada em malhas estruturadas, especificamente em malhas que se adaptam à fronteira, esta metodologia foi alterada por Maliska (1995) para a sua aplicação em volumes de Voronoi.

A velocidade  $u$  e  $v$  na  $i$ -ésima face do volume  $P$  é calculada como

$$u_{P_i}^* = \frac{(Sc\Delta V)_i + \sum (A_{NB} u_{NB}^*)_i + (Sc\Delta V)_P}{(A_P)_P + (A_P)_i} + \frac{\sum (A_{NB} u_{NB}^*)_P + \frac{(M_P^* + M_i^*)}{\Delta t} u_{P_i}^o - \left( 2 \frac{\Delta P}{\Delta x} \right)_{P_i} \overline{\Delta V}}{(A_P)_P + (A_P)_i} \quad (24)$$

$$v_{P_i}^* = \frac{(Sc\Delta V)_i + \sum (A_{NB} v_{NB}^*)_i + (Sc\Delta V)_P}{(A_P)_P + (A_P)_i} + \frac{\sum (A_{NB} v_{NB}^*)_P + \frac{(M_P^* + M_i^*)}{\Delta t} v_{P_i}^o - \left( 2 \frac{\Delta P}{\Delta y} \right)_{P_i} \overline{\Delta V}}{(A_P)_P + (A_P)_i} \quad (25)$$

onde o sobrescrito "o" indica que a propriedade foi avaliada no instante de tempo anterior.

O cálculo do gradiente de pressão, para ser utilizado nas Eqs. (24) e (25), deve obedecer o seguinte procedimento: calcular o gradiente de pressão em uma determinada direção como sendo a média dos gradientes de pressão calculados nos centros dos volumes. Por exemplo

$$\left. \frac{\Delta P}{\Delta y} \right|_{P_i} = \frac{1}{2} \left[ \left. \frac{\Delta P}{\Delta y} \right|_P + \left. \frac{\Delta P}{\Delta y} \right|_i \right] \quad (26)$$

Esta média não é consistente, pois sabe-se que como o gradiente de pressão é calculado da seguinte maneira

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} \right|_{P_i} = \frac{P_i - P_P}{L_{P_i}} \quad (27)$$

e pode ser decomposto em suas componentes na seguinte equação

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \vec{n}} \right|_{P_i} = \left. \frac{\Delta P}{\Delta x} \right|_{P_i} e_x + \left. \frac{\Delta P}{\Delta y} \right|_{P_i} e_y \quad (28)$$

com  $e_x$  e  $e_y$  são as componentes  $x$  e  $y$  do vetor normal à face  $i$  do volume, respectivamente. Relacionando a Eq. (27) com a Eq. (28)

$$\frac{P_i - P_P}{L_{P_i}} = \left. \frac{\Delta P}{\Delta x} \right|_{P_i} e_x + \left. \frac{\Delta P}{\Delta y} \right|_{P_i} e_y \quad (29)$$

A aproximação dos gradientes usando a Eq. (26) será inconsistente sempre que o lado esquerdo da Eq. (29) for diferente do lado direito. Não é difícil conceber que normalmente é isto o que acontece quando se usa uma média como a Eq. (26). Neste trabalho procurou-se evitar esta inconsistência da seguinte maneira:

1. Calcula-se os gradientes de pressão nas direções  $x$  e  $y$  usando a média aritmética, Eq. (26).
2. Escolher entre os dois gradientes aquele de menor valor, por exemplo  $\left. \frac{\Delta P}{\Delta x} \right|_{P_i}$ .
3. Determinar  $\left. \frac{\Delta P}{\Delta y} \right|_{P_i}$ , por exemplo, substituindo  $\left. \frac{\Delta P}{\Delta x} \right|_{P_i}$  na Eq. (29).

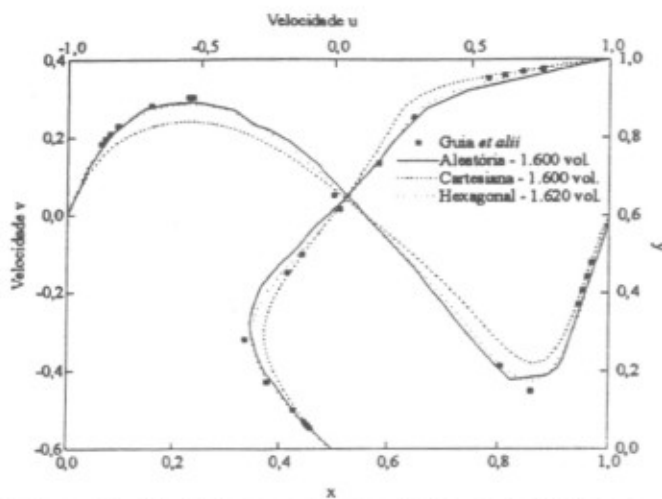


Figura 3: Cavity com tampa móvel - velocidade  $u$  e  $v$  - número de Reynolds = 400 - Gradiente de pressão calculado usando a Eq. (14)

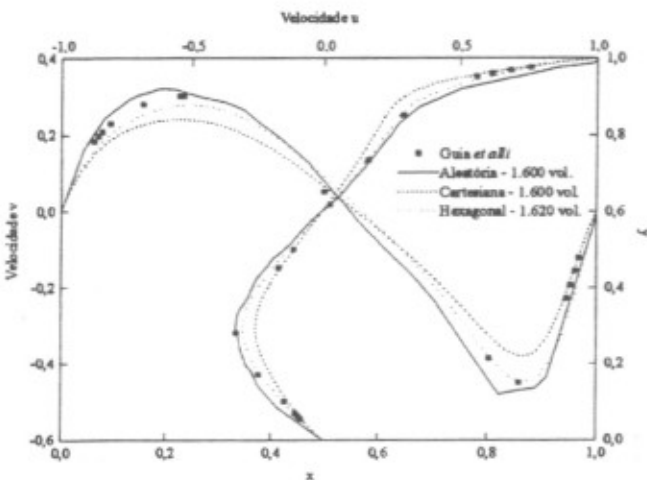


Figura 4: Cavity com tampa móvel - velocidade  $u$  e  $v$  - número de Reynolds = 400 - Gradiente de pressão calculado usando as Eqs. (16) e (17)

Este procedimento garante que os valores médios do gradiente de pressão devem satisfazer a Eq. (29). Deve-se levar em conta que, para algumas faces, pode acontecer de  $\epsilon_{x_i}$  ou  $\epsilon_{y_j}$  ser nulos. Com os gradientes de pressão devidamente calculados em todas as faces, determina-se os valores das velocidades cartesianas e normal à cada uma das faces.

Há a necessidade de algum esquema de correção das velocidades nos centros dos volumes usando, ou os novos valores de pressão, ou os valores das velocidades nas faces. A opção empregada foi fazer uso do gradiente de  $P'$  e corrigir as velocidades nos centros dos volumes no mesmo molde já realizado com as faces dos volumes. Sendo assim, as equações de correção para estas velocidades são

$$u_P = u_P^* - \frac{\Delta P'}{\Delta x} \frac{\Delta V_P}{[A_P - \sum A_{nb}]_P} \quad (30)$$

$$v_P = v_P^* - \frac{\Delta P'}{\Delta y} \frac{\Delta V_P}{[A_P - \sum A_{nb}]_P} \quad (31)$$

## RESULTADOS

Dois problemas clássicos na mecânica dos fluidos computacional foram usados para comparar a metodologia.

São eles: escoamento em uma cavidade quadrada com tampa móvel e convecção natural em uma cavidade quadrada. As malhas que foram usadas na investigação de ambos os problemas são apresentadas na Figura 2. Em ambos os problemas as faces da cavidade tinham comprimento unitário. Para resolver o problema do escoamento em uma cavidade quadrada com tampa móvel usou-se o seguinte procedimento, baseado na solução das equações que governam o escoamento laminar de um fluido isocórico:

1. Fornecer as condições iniciais das variáveis ( $u, v, P$ );
2. Calcular o gradiente de pressão usando os valores de  $P$  disponíveis;
3. Calcular os coeficientes e resolver o sistema linear de equações definido pela Eq. (12). A solução deste sistema linear fornece  $u^*$  e  $v^*$ ;
4. Determinar as velocidades nas faces de cada volume,  $u_{P_i}^*$  - Eq. (24) e  $v_{P_i}^*$  - Eq. (25);
5. Determinar  $P'$ , através da solução da Eq. (22);
6. Calcular o gradiente de  $P'$ ;
7. Obter a pressão através de  $P = P^* + P'$ ;
8. Corrigir as velocidades nas interfaces, usando a Eq. (18);
9. Corrigir as velocidades nos centros dos volumes usando Eq. (30) e (31);
10. Testar se a solução convergiu, através de algum critério pré-definido. Se a convergência não foi alcançada deve-se voltar ao item 2.

O número de Reynolds para este problema é definido por

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad (32)$$

onde  $\rho$  e  $\mu$  são, respectivamente, a densidade e a viscosidade do fluido,  $U$  a velocidade constante com que se move a tampa superior da cavidade e  $L$  a dimensão das faces da cavidade. Para este problema considerou-se  $\rho, U$  e  $L$  iguais a 1. A Figura 3 apresenta os valores de  $u$  na linha coordenada de  $y$  constante que passa pelo centro da cavidade e os valores de  $v$  na linha coordenada de  $y$  constante que passa pelo centro da cavidade. Os resultados desta figura foram obtidos com os gradientes calculados pela Eq. (14). As malhas usadas são similares às apresentadas na Figura 2, mas com uma maior quantidade de volumes. A solução obtida foi comparada com uma solução numérica padrão obtida por Guia et alii (1982). Os resultados são bastante concordantes. A Figura 4 apresenta a solução do mesmo problema, do mesmo número de Reynolds, da mesma malha e do mesmo critério de convergência, mas com os gradientes sendo calculados usando as Eqs. (16) e (17). Os resultados usando malhas cartesianas são os mesmos que foram apresentados na Figura 3, mas há uma pequena diferença para as outras configurações de malhas, que está associada a um erro na avaliação dos gradientes. Outros resultados que confirmam estes apresentados podem ser vistos nos trabalhos de Vasconcelos e Maliska (1998) ou Vasconcelos (1998). Na confecção das curvas das Figuras 3 e 4 foi realizada uma interpolação linear, contudo nenhum outro ajuste de curva foi realizado. Isto fez com que as curvas de velocidades usando malhas aleatórias não fossem tão suaves quanto o esperado.



O segundo problema visto é o da convecção natural em uma cavidade quadrada onde as faces laterais estão a uma temperatura de  $\pm 0,5$  e as faces superior e inferior desta cavidade estão isoladas termicamente. As malhas usadas são similares as apresentadas na Figura 2. Os resultados foram comparados com outro autor (de Vahl Davis, 1983). Note-se que no trabalho de referência fez-se uso de malhas cartesianas, algoritmos de malhas múltiplas e esquemas de interpolação na fronteira para melhor calcular o número de Nusselt. Estes procedimentos não foram realizados neste trabalho. O número adimensional usado, número de Rayleigh, foi definido da seguinte maneira:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu\alpha} \quad (33)$$

Tabela 1: Comparação com a solução padrão para o número de Rayleigh =  $10^6$

Malha Cartesiana			
$N$	$\overline{Nu}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
441	10,325	20,698	1,804
1681	9,274	21,324	1,083
6561	8,933	18,392	0,985
Malha Hexagonal			
$N$	$\overline{Nu}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
451	11,315	21,761	1,312
1701	9,864	19,495	1,025
6601	9,143	17,618	0,962
Malha Aleatória			
$N$	$\overline{Nu}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
441	10,245	24,687	1,237
1681	10,104	19,672	1,197
Solução Padrão			
Referência	$\overline{Nu}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
de Vahl Davis (1983)	8,800	17,925	0,989

Com exceção do número de Prandtl,  $Pr$ , e da viscosidade,  $\mu$ , considerou-se as variáveis que fazem parte da definição do número de Rayleigh como sendo unitárias. O número de Prandtl usado neste trabalho foi 0,72. Os resultados apresentados aqui são aqueles em que se verificaram os maiores erros. Esta situação ocorreu em  $Ra = 10^6$ . Isto já era o esperado. Esta é uma situação crítica nos problemas desta natureza e para que os erros fossem efetivamente menores dos que os aqui apresentados seria necessário uma malha mais refinada ou os mesmos cuidados que tomaram os autores usados na comparação. A Tabela 1 apresenta os valores do número de Nusselt médio na parede,  $\overline{Nu}$ , o valor máximo,  $Nu_{max}$ , e o valor mínimo,  $Nu_{min}$ . Por limitações do gerador de volumes de Voronoi não se obteve malhas aleatórias com aproximadamente 6.600 volumes.

## CONCLUSÃO

A nova metodologia apresentada, baseada integralmente no método de volumes finitos, é simples, versátil e com funções de interpolação igualmente simples. Os resultados obtidos para os dois problemas clássicos mostram o bom desempenho do método.

## REFERÊNCIAS

- Cardoso, Fabian Corrêa, 1997, *Algoritmo para a Simulação Numérica das Equações do Movimento pelo Método dos Volumes Finitos Usando Diagrama de Voronoi*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Davidson, Lars, 1996, "A Pressure Correction Method for Unstructured Meshes with Arbitrary Control Volumes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, p. 265-281.
- Guia, U., Guia, K. N. e Shin, C. T., 1982, "High Reynolds Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equation and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, p. 387-411.
- Maliska, C. R., 1995, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, Livros Técnicos e Científicos Editora.
- Marchi, C. H. and Maliska, C. R., 1994, "A Nonorthogonal Finite-Volume Method for Solution of All Speed Flows Using Co-Located Variables", *Numerical Heat Transfer - Part B*, Vol. 26, p. 293-311.
- Mathur, S. R. e Murthy, S. Y., 1997, "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes", *Numerical Heat Transfer - Part B*, Vol. 31, p. 195-215.
- Raithby, G. D. e Torrence, K. E., 1974, "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Computers & Fluids*, vol. 2, p. 191-206.
- Taniguchi, N., Arakawa, C. e Kobayashi, T., 1990, "Construction of a Flow-Simulating Method with Finite Volume Based on a Voronoi Diagram", *JSME International Journal*, Série II, Vol. 34, p. 18-23.
- Taniguchi, N. e Kobayashi, T., 1991, "Finite Volume Method on the Unstructured Grid System", *Computers & Fluids*, Vol. 19, n° 34, p. 287-295.
- Thomadakis, M. e Leschziner, M., 1996, "A Pressure-Correction Method for Solution of Incompressible Viscous Flows on Unstructured Grids", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, p. 581-601.
- de Vahl Davis, G., 1983, "Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, p. 249-264.
- Van Doormaal, J. P. e Raithby, G. D., 1984, "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow", *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, p. 147-163.
- Vasconcellos, J. F. V., 1998, *Solução Numérica de Injeção de Termoplásticos usando uma Formulação Completa, Diagrama de Voronoi e Solução Implícita do Posicionamento da Frente*, (Tese de doutorado em andamento), EMC/UFSC.
- Vasconcellos, J. F. V. e Maliska, C. R., 1998, "A Finite Volume Method Based on Voronoi Discretization for Fluid Flow Problems", Submetido para publicação.
- Vilsmeier, R. e Hänel, D., 1995, "Adaptive Solutions for Unsteady Laminar Flows on Unstructured Grids", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, p. 85-101.

## AGRADECIMENTO

O primeiro autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro para a realização das pesquisas que resultaram neste trabalho.

O segundo problema visto é o da convecção natural em uma cavidade quadrada onde as faces laterais estão a uma temperatura de  $\pm 0,5$  e as faces superior e inferior desta cavidade estão isoladas termicamente. As malhas usadas são similares as apresentadas na Figura 2. Os resultados foram comparados com outro autor (de Vahl Davis, 1983). Note-se que no trabalho de referência fez-se uso de malhas cartesianas, algoritmos de malhas múltiplas e esquemas de interpolação na fronteira para melhor calcular o número de Nusselt. Estes procedimentos não foram realizados neste trabalho. O número adimensional usado, número de Rayleigh, foi definido da seguinte maneira:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu\alpha} \quad (33)$$

Tabela 1: Comparação com a solução padrão para o número de Rayleigh =  $10^6$

Malha Cartesiana			
N	$\overline{Nu}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
441	10,325	20,698	1,804
1681	9,274	21,324	1,083
6561	8,933	18,392	0,985
Malha Hexagonal			
N	$\overline{Nu}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
451	11,315	21,761	1,312
1701	9,864	19,495	1,025
6601	9,143	17,618	0,962
Malha Aleatória			
N	$\overline{Nu}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
441	10,245	24,687	1,237
1681	10,104	19,672	1,197
Solução Padrão			
Referência	$\overline{Nu}$	$Nu_{max}$	$Nu_{min}$
de Vahl Davis (1983)	8,800	17,925	0,989

Com exceção do número de Prandtl,  $Pr$ , e da viscosidade,  $\mu$ , considerou-se as variáveis que fazem parte da definição do número de Rayleigh como sendo unitárias. O número de Prandtl usado neste trabalho foi 0,72. Os resultados apresentados aqui são aqueles em que se verificaram os maiores erros. Esta situação ocorreu em  $Ra = 10^6$ . Isto já era o esperado. Esta é uma situação crítica nos problemas desta natureza e para que os erros fossem efetivamente menores dos que os aqui apresentados seria necessário uma malha mais refinada ou os mesmos cuidados que tomaram os autores usados na comparação. A Tabela 1 apresenta os valores do número de Nusselt médio na parede,  $\overline{Nu}$ , o valor máximo,  $Nu_{max}$ , e o valor mínimo,  $Nu_{min}$ . Por limitações do gerador de volumes de Voronoi não se obteve malhas aleatórias com aproximadamente 6.600 volumes.

## CONCLUSÃO

A nova metodologia apresentada, baseada integralmente no método de volumes finitos, é simples, versátil e com funções de interpolação igualmente simples. Os resultados obtidos para os dois problemas clássicos mostram o bom desempenho do método.

## REFERÊNCIAS

- Cardoso, Fabian Corrêa, 1997, *Algoritmo para a Simulação Numérica das Equações do Movimento pelo Método dos Volumes Finitos Usando Diagrama de Voronoi*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Davidson, Lars, 1996, "A Pressure Correction Method for Unstructured Meshes with Arbitrary Control Volumes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, p. 265-281.
- Guia, U., Guia, K. N. e Shin, C. T., 1982, "High Reynolds Solution for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equation and a Multigrid Method", *Journal of Computational Physics*, p. 387-411.
- Maliska, C. R., 1995, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, Livros Técnicos e Científicos Editora.
- Marchi, C. H. and Maliska, C. R., 1994, "A Nonorthogonal Finite-Volume Method for Solution of All Speed Flows Using Co-Located Variables", *Numerical Heat Transfer - Part B*, Vol. 26, p. 293-311.
- Mathur, S. R. e Murthy, S. Y., 1997, "A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes", *Numerical Heat Transfer - Part B*, Vol. 31, p. 195-215.
- Raithby, G. D. e Torrence, K. E., 1974, "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Computers & Fluids*, vol. 2, p. 191-206.
- Taniguchi, N., Arakawa, C. e Kobayashi, T., 1990, "Construction of a Flow-Simulating Method with Finite Volume Based on a Voronoi Diagram", *JSME International Journal*, Série II, Vol. 34, p. 18-23.
- Taniguchi, N. e Kobayashi, T., 1991, "Finite Volume Method on the Unstructured Grid System", *Computers & Fluids*, Vol. 19, n° 34, p. 287-295.
- Thomadakis, M. e Leschziner, M., 1996, "A Pressure-Correction Method for Solution of Incompressible Viscous Flows on Unstructured Grids", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, p. 581-601.
- de Vahl Davis, G., 1983, "Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, p. 249-264.
- Van Doormaal, J. P. e Raithby, G. D., 1984, "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flow", *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, p. 147-163.
- Vasconcelos, J. F. V., 1998, *Solução Numérica de Injeção de Termoplásticos usando uma Formulação Completa, Diagrama de Voronoi e Solução Implícita do Posicionamento da Frente*, (Tese de doutorado em andamento), EMC/UFSC.
- Vasconcelos, J. F. V. e Maliska, C. R., 1998, "A Finite Volume Method Based on Voronoi Discretization for Fluid Flow Problems", Submetido para publicação.
- Vilsmeier, R. e Hänel, D., 1995, "Adaptive Solutions for Unsteady Laminar Flows on Unstructured Grids", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 22, p. 85-101.

## AGRADECIMENTO

O primeiro autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro para a realização das pesquisas que resultaram neste trabalho.