

30/11 a 2/12, 1994
B.H., M.G., BRASIL

ESCOLA DE ENGENHARIA DA UFMG
AMC - Associação para Métodos
Computacionais em Engenharia

UTILIZAÇÃO DO ESQUEMA "UPWIND" PARA A APROXIMAÇÃO DO TERMO CONVECTIVO LATERAL DA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO WUDS-E

Antonio Augusto Ulson de Souza
Departamento de Engenharia Química - UFSC
Campus Universitário Trindade, CP 476
CEP 88040-900, Florianópolis-SC, Brasil

Clóvis Raimundo Maliska
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC
Campus Universitário Trindade, CP 476
CEP 88040-900, Florianópolis-SC, Brasil

SUMÁRIO

Neste trabalho são estudados dois esquemas para a aproximação do termo de convecção lateral na formulação WUDS-E; o esquema de diferenças centrais, CDS, e o "upwind", UDS. As formulações resultantes são empregadas na solução do problema da cavidade quadrada com a parede superior movendo-se com velocidade constante. Os resultados numéricos obtidos neste trabalho são comparados com resultados encontrados na literatura e com outras formulações.

1. INTRODUÇÃO

A solução da maioria dos problemas de escoamento de fluidos com transferência de calor e massa exige o uso de métodos numéricos, devido à complexidade das equações diferenciais parciais que modelam o problema.

A utilização de balanços, a nível de volume de controle, garantindo a conservação das grandezas físicas envolvidas a nível elementar, fornece uma metodologia numérica consistente com as leis físicas de conservação. O método de volumes finitos baseia-se em balanços das grandezas físicas em cada volume de controle e é de uso bastante difundido no tratamento de problemas complexos de escoamento de fluidos (Roache(1972), Patankar(1980) e Maliska(1981)), no âmbito de coordenadas generalizadas.

Para a obtenção das equações de conservação discretizadas, é necessária a utilização de uma função de interpolação para a avaliação das variáveis nas faces do volume de controle. A tendência dos primeiros métodos, baseados em diferenças finitas, foi a aproximação das derivadas espaciais das equações

diferenciais por diferenças centrais (CDS), resultando em esquemas de segunda ordem. Para problemas envolvendo somente difusão, ou para aqueles que possuem baixos números de Reynolds ou Peclet, a utilização de diferenças centrais é satisfatória. Para o caso de escoamentos a elevados números de Reynolds ou Peclet, observa-se a geração de coeficientes negativos, requerendo o refinamento da malha para a obtenção da solução dos sistemas de equações (Raithby(1976)).

Um grande número de proposições de funções de interpolação tem sido reportado pela literatura, visando agrupar as vantagens dos esquemas CDS e UDS, ou ainda trazer contribuições para minimizar o problema da difusão numérica, como os trabalhos de Allen e Southwell(1955), Raithby e Torrance(1974), Patankar(1980), Raithby(1976), Lillington(1981), Hassan et al.(1983), Huget(1985), Guia et al.(1986), Schneider(1986), Schneider e Raw(1984), Varejão(1979), Niecele(1985), Ulson de Souza(1992).

A função de interpolação WUDS-E (Ulson de Souza(1992)), proposta como uma extensão da formulação WUDS, obtida com base nas equações de conservação, traz através de seu termo fonte as contribuições da pressão, convecção e difusão lateral, além de adotar um esquema que leva em conta o cálculo dos termos difusivos ao longo da direção normal às faces do volume de controle.

No presente trabalho é feito um estudo sobre a utilização do esquema CDS e Upwind na função de interpolação WUDS-E, desenvolvida no sistema de coordenadas generalizadas, utilizando o método de Volumes Finitos. Os resultados numéricos são comparados com outras formulações.

2. FORMULAÇÃO PROPOSTA

As equações de conservação de quantidade de movimento, calor e massa podem ser escritas de um modo genérico como

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \partial_i (\rho u_i \phi) + P^\phi = \partial_i (\Gamma^{\phi} \partial_i \phi) + S^\phi \quad (1)$$

onde ϕ , Γ^{ϕ} , e S^ϕ devem assumir os valores apropriados na representação de cada caso.

A equação (1) transformada para o sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η) pode ser representada por

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial (\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + P^\phi = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} [C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}] + \frac{\partial}{\partial \eta} [C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}] + S^\phi \end{aligned} \quad (2)$$

onde, $C_1 = \alpha J \Gamma^{\phi}$, $C_2 = -\beta J \Gamma^{\phi}$, $C_4 = \gamma J \Gamma^{\phi}$, sendo α , β e γ as componentes do tensor métrico, J o jacobiano da transformação e U e V as componentes contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica.

No método de Volumes Finitos a discretização da equação (2) é feita integrando-se esta equação sobre o volume de controle de dimensões $\Delta \xi$, $\Delta \eta$, e ao longo do intervalo de tempo Δt . Do processo de integração resulta a equação (3) em termos da variável ϕ e de suas derivadas na direção normal às faces do volume de controle.

$$\begin{aligned} & [(\frac{\rho\phi}{\Delta t J})_P^{n+1} - (\frac{\rho\phi}{\Delta t J})_P^n] \Delta \xi \Delta \eta - \bar{m}_w^{n+0} \phi_w^{n+0} - \bar{m}_n^{n+0} \phi_n^{n+0} - \bar{m}_e^{n+0} \phi_e^{n+0} + \bar{m}_s^{n+0} \phi_s^{n+0} + \\ & + [\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{(I_n^\phi \sqrt{\alpha_w})^{n+0}} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{(I_w^\phi \sqrt{\alpha_w})^{n+0}}] \Delta \eta + [\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{(I_n^\phi \sqrt{\gamma_n})^{n+0}} + \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{(I_s^\phi \sqrt{\gamma_s})^{n+0}}] \Delta \xi + \\ & + [(S^\phi)_P - (P^\phi)_P]^{n+0} \Delta \xi \Delta \eta \end{aligned} \quad (3)$$

Para a avaliação dos termos convectivos na face dos volumes de controle é proposta a seguinte equação, tomando-se como exemplo a face leste do volume de controle.

$$\rho U_e \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - C_{1e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + B^e = 0 \quad (4)$$

onde B^e é dado pela equação

$$B^e = \dot{P}^e - \dot{S}^e - C_{4e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \rho V_e \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (5)$$

A equação (4) é resolvida como uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, assumindo-se B^e localmente constante. Fazendo-se as seguintes adimensionalizações:

$$\xi^* = \frac{\xi - \xi_P}{\xi_E - \xi_P} \quad (6)$$

$$P_{\theta}^{*e} = \frac{\rho U_e \Delta \xi}{C_{1e}} \quad (7)$$

$$B^{*e} = \frac{-B^e \Delta \xi^2}{C_{1e}} \quad (8)$$

a solução da equação (4) adimensionalizada para a face leste do volume de controle é dada por:

$$\phi_e = a_P^e \phi_P + a_E^e \phi_E + b_e^e B^{*e} \quad (9)$$

$$a_P^e = \frac{\theta^{Pe^*} - \theta^{\left(\frac{Pe^*}{2}\right)}}{\theta^{Pe^*} - 1} = \left(\frac{1 + \alpha_e}{2}\right) \quad (10)$$

$$a_E^e = \frac{\theta^{\left(\frac{Pe^*}{2}\right)} - 1}{\theta^{Pe^*} - 1} = \left(\frac{1 - \alpha_e}{2}\right) \quad (11)$$

$$b_e^e = \left(\frac{1 - a_E^e}{2}\right) \frac{1}{P_{\theta}^{*e}} \quad (12)$$

Fazendo-se a aproximação do termo fonte, utilizando-se diferenças centrais, obtém-se a seguinte equação:

$$B^{*e} = \frac{-P^e |e}{C_{1e}} + \frac{1}{C_{1e}} \left(\frac{S^e |P + S^e |E}{2} \right) + \frac{C_{4e}}{2C_{1e}} (\phi_N + \phi_{NE} + \phi_S + \phi_{SE} - 2\phi_P - 2\phi_E) - \frac{\rho V_e}{4C_{1e}} (\phi_N + \phi_{NE} - \phi_S - \phi_{SE}) \quad (13)$$

Informações mais detalhadas sobre a obtenção destas equações, estudo dos

casos limites, assim como o esquema adotado para a discretização dos termos difusivos podem ser encontradas em Ulson de Souza e Maliska (1993).

Uma outra estratégia para a aproximação do termo convectivo, presente no termo fonte da função de interpolação WUDS-E, foi proposta, sendo utilizado o esquema "upwind", e neste caso a função de interpolação será denominada de WUDS-E(UP).

A função de interpolação WUDS-E(UP) é dada por

$$\phi_e = \left(\frac{1 + \alpha_e}{2}\right) \phi_P + \left(\frac{1 - \alpha_e}{2}\right) \phi_E + \frac{\alpha_e}{P_{\theta}^{*e}} B^{*e} \quad (14)$$

O termo fonte B^{*e} , neste caso, é dado por

$$B^{*e} = \frac{-P^e |e}{C_{1e}} + 2[\bar{\phi}_y - \bar{\phi}_d] - P_{\theta_y}^{*e} [\bar{\phi}_x - \left(\frac{(1+\delta)}{2} \bar{\phi}_y^e + \frac{(1-\delta)}{2} \bar{\phi}_d^e\right)] \quad (15)$$

onde $\bar{\phi}_x$, $\bar{\phi}_y$, $P_{\theta_y}^{*e}$ são dados pelas equações (16), (17) e (18) respectivamente e os termos δ , de $\bar{\phi}_x^e$, $\bar{\phi}_y^e$ são dados pelas equações (19), (20) e (21)

$$\bar{\phi}_x = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} \quad (16)$$

$$\bar{\phi}_y = \frac{\phi_N + \phi_{NE} + \phi_{SE} + \phi_S}{4} \quad (17)$$

$$P_{\theta_y}^{*e} = \frac{\rho V_e \Delta \xi}{C_{1e}} \quad (18)$$

$$\delta = \frac{V_e}{|V_e|} \quad (19)$$

$$\bar{\phi}_y^n = \frac{\phi_N + \phi_{NE}}{2} \quad (20)$$

$$\bar{\phi}_y^s = \frac{\phi_{SE} + \phi_S}{2} \quad (21)$$

No presente trabalho foi adotada a disposição das variáveis desencontradas na malha computacional e o tratamento do acoplamento pressão-velocidade pelo método PRIME (Maliska (1981)).

3. ANÁLISE DOS RESULTADOS

O problema da cavidade quadrada com a parede superior movendo-se com velocidade constante, esquematizado na Figura 1, foi escolhido para avaliar o desempenho das duas funções de interpolação WUDS-E e WUDS-E(UP). Este problema foi resolvido para os valores de número de Reynolds de 400 e 1000, sendo apresentado neste trabalho somente os resultados relativos a $Re=1000$, onde a importância da convecção, neste caso, evidenciam o desempenho das formulações em estudo.

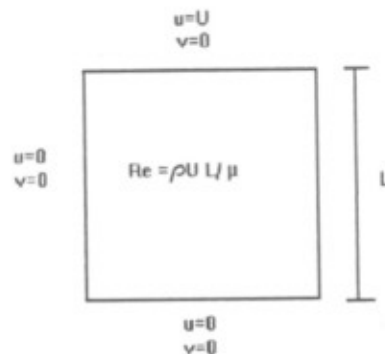


FIGURA 3.1 -Cavidade quadrada bidimensional.

O perfil da componente de velocidade, u , ao longo da linha central vertical do domínio de cálculo, obtido com malha 20×20 , com a utilização do esquema WUDS-E e WUDS-E(UP) é apresentado na FIGURA 3.2, juntamente com os resultados de Schreiber et al. (1983).

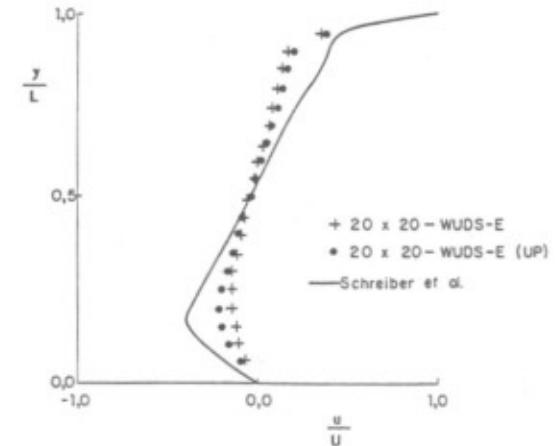


FIGURA 3.2 - Perfil da componente de velocidade, u , ao longo da linha central vertical do domínio, $Re = 1000$.

Como pode ser visto na FIGURA 3.2, os resultados obtidos com a formulação WUDS-E(UP) apresentam melhor concordância com os resultados obtidos por Schreiber et al.(1983), comparativamente à utilização do esquema WUDS-E.

QUADRO 3.1 - Erros relativos obtidos no valor de Ψ_{min} , para o caso de $Re=1000$.

ESQUEMA	MALHA	Ψ_{min}	ERRO %
EDS	10X10	-0,0494	57,8
	20X20	-0,0677	42,1
SUDS	10X10	-0,0370	68,4
	20X20	-0,0577	50,7
MWUS	10X10	-0,0456	61,0
	20X20	-0,0643	45,0
WUDS-E	10X10	-0,0400	65,9
	20X20	-0,0611	47,8
WUDS-E (UP)	10X10	-0,0558	52,3
	20X20	-0,0715	38,9

Um outro parâmetro importante, neste problema, para a comparação do desempenho de diversos métodos é a avaliação do valor da função corrente, Ψ_{m} , no centro do vórtice principal (Huget (1985)).

O QUADRO 3.1 apresenta os valores de Ψ_{m} obtidos com vários esquemas, com malha 10x10 e 20x20, Re=1000, bem como os erros relativos obtidos com estes esquemas, calculados com referência ao valor médio, $\Psi_{m} = -0.11695$, obtido com os resultados de Schreiber et al. (1983) e Ghia et al. (1982), $\Psi_{m} = -0.11603$ e $\Psi_{m} = -0.11793$, respectivamente.

Pode-se observar no QUADRO 3.1 que o esquema WUDS-E(UP), para este problema em estudo, foi o que apresentou o menor erro percentual, quer para a malha 10x10 quanto 20x20.

4. CONCLUSÕES

Pela análise dos resultados obtidos com a utilização das formulações WUDS-E e WUDS-E(UP), na solução do problema da cavidade quadrada com a parede superior movendo-se com velocidade constante, pode-se verificar o melhor desempenho da função de interpolação adotada no esquema WUDS-E(UP).

A determinação do Ψ_{m} , utilizando-se a formulação WUDS-E(UP), com malhas de 10x10 e 20x20, apresentou erros percentuais inferiores a vários esquemas numéricos largamente difundidos pela literatura.

O desempenho observado pelas duas formulações ressalta a importância da presença da convecção lateral na função de interpolação e mesmo se tratando de uma aproximação secundária, no termo fonte da função de interpolação WUDS-E, é relevante a adoção de uma estratégia adequada para sua avaliação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allen, D.N.G. and Southwell R.S., (1955)-Quart.J.Mech.and Applied Math., 8, 129.
- Ghia, K.N., Ghia, U. and Shin, C.T., (1986)- Adaptive Grid Generation for Flows With Local High Gradient Regions, Advances in Grid Generation, ASME, FED, 5, pp. 35-47.
- Hassan, Y.A., et al. (1983)-A Stable Mass-Flow-Weighted Two-Dimensional Skew Upwind Scheme, Numer.Heat Transfer, 6, N.4, pp.395-408.
- Huget, R.G., (1985)-The Evaluation and Development of Finite Volume Approximation Schemes for Fluid Flow and Heat Transfer Predictions, Ph.D.Thesis, Waterloo, Ontario, Canadá.
- Lillington, J.N., (1981)-A Vector Upstream Differencing Scheme for Problems in Fluid Flow Involving Significant Source Terms in Steady-State Linear Systems, Int.J.Numer.Methods in Fluids, 1, pp.3-16.
- Maliska C.R., (1981)-A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canadá.
- Nieckele, A.O., (1985)-Development and Evaluation of Numerical Schemes for the solution of Convection-Diffusion Problems, Ph.D. Thesis, University of Minnesota.
- Patankar, S.V., (1980)-Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Cooperation, Washington, DC., USA.
- Raithby, G.D., (1976)-A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow, Computer Meth.Applied Mechanics and Engineering 9, pp.75-103.
- Raithby, G.D., (1976)-Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving

Fluid Flow, Comp.Meth.Applied Mech.Eng., 9, pp.153-164.

- Raithby, G.D. and Torrance, K.E., (1974)-Upstream-Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computers and Fluids, 2, pp.191-206.
- Roache, P.J., (1972)-Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M..
- Schreiber, R. and Keller, H.B., (1983)-Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Technics, J. Comp. Phys., 49, pp. 310-333.
- Schneider, G.E., (1986)-A Novel Co-located Finite Difference Procedure for the Numerical Computation of Fluid Flow, AIAA - 4th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Boston, Massachusetts.
- Schneider, G.E. and Raw, M.J., (1987)-Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables -1.Computational Procedure, Numerical Heat Transfer, 11, pp.363-390.
- Ulson de Souza, A.A., (1992)-Um Esquema Numérico Para Minimização da Difusão Numérica na Solução de Escoamentos em Geometrias Arbitrárias, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Ulson de Souza, A.A. e Maliska, C.R., (1993)-Quantificação da Difusão Numérica na Solução de Problemas em Coordenadas Generalizadas, com Malhas Adaptativas, Anais do XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, pp. 683 a 692, IPT, São Paulo.
- Ulson de Souza, S.M.A.G., (1992)-Um Esquema Numérico Utilizando Variáveis Colocalizadas com Função de Interpolação Completa para a Solução de Problemas de Escamento de Fluidos, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Varejão, L.M.C., (1979)-Flux Spline Method for Heat, Mass and Momentum Transfer, Ph.D.Thesis, University of Minnesota.