

MALHAS ADAPTATIVAS: IMPLEMENTAÇÃO E COMPARAÇÃO
 CRÍTICA DOS MÉTODOS DISPONÍVEIS

PAULO C.S. JUCÁ

Departamento de Engenharia Mecânica, Univ. Federal de Santa Catarina
 CP 476, CEP: 88040-900, Florianópolis - SC - Brasil
 E-MAIL EMC1PCJ@BRUFSC

SUMÁRIO

Malhas adaptativas se ajustam dinamicamente à distribuição dos campos de propriedades físicas a medida que estes emergem de soluções numéricas. Os métodos mais empregados para sua implementação são o método variacional, das funções de controle e pseudo-forças. Estes são revistos e comparados quando adaptando uma malha definida à distribuições de uma propriedade de campo imposta, seguindo direções preferenciais no domínio considerado. Conclui-se que o método das funções de controle se apresenta como o mais eficiente, por exigir menor complexidade para sua implementação e menor tempo de máquina para ajuste da malha, podendo entretanto tornar os volumes da malha muito angulados.

INTRODUÇÃO

A discretização do domínio físico é o passo inicial para a solução numérica de uma equação diferencial parcial. A dificuldade em distribuir os pontos da malha no domínio é que isto é feito sem o conhecimento prévio detalhado do fenômeno físico. Assim a malha gerada para a solução da EDP pode não ser a melhor, ou seja, aquela distribuição de um número finito de pontos que permite melhor representar o fenômeno físico. Considere então uma malha que se modifique dinamicamente com a evolução da solução da EDP, sendo que a redistribuição dos pontos sobre o domínio é direcionada pela física do problema, resultante da evolução de sua solução. A idéia é dispor de uma malha que move seus pontos, enquanto a solução do problema físico evolui, concentrando-os em regiões de maiores gradientes da solução, à medida que estas regiões são identificadas. Os métodos usuais empregados para adaptação de malhas estruturadas são revistos por Jucá (1992) e seu comportamento é apresentado e discutido neste trabalho.

MALHAS ADAPTATIVAS

Três são os principais métodos empregados para adaptação de malhas estruturadas.

Método Variacional. Este método faz uso de operadores variacionais para que uma propriedade da malha seja igualmente distribuída no domínio. Sendo "Q" uma propriedade qualquer da malha, a integral ponderada que representa a acumulação desta sobre o domínio transformado (computacional) é

$$I = \int_D WQ \, dv \quad (1)$$

onde dv é um elemento de área (volume) e " W " é uma função de ponderação para a propriedade que se deseja distribuir de maneira uniforme sobre o domínio. Esta integral permite à malha se ajustar à solução do problema físico se W for expressa em função de uma propriedade física do problema:

$$W = W(p, \rho, Re, \mu, \nu, \dots) \quad (2)$$

Desejando que os volumes da malha sejam distribuídos suavemente ao longo do domínio (I_s) e sua área (volume) seja ponderada por " W " na malha gerada (I_v) deve-se empregar o cálculo variacional para minimizar a integral

$$I = I_s + \lambda_v I_v \quad (3)$$

onde $\lambda_v \geq 0$. A equação de Euler resultante da minimização da integral (3) fornece o sistema de equações necessário à geração adaptativa da malha. Se o fator de ponderação é dado por uma função de propriedades físicas da solução do problema associado, a malha irá se adaptar a este(s) campo(s) da solução.

Método das Funções de Controle. Para geradores de malha elípticos, com equações de Poisson,

$$\nabla^2 \xi^i = P^i \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

o controle do espaçamento de linhas coordenadas pode ser feito através de valores adequados das funções P^i . Para que as funções P^i sejam estimadas a partir do comportamento do campo de soluções do problema físico, adaptando a malha à física do problema, estas devem ser avaliadas por

$$P^i = \frac{W_{\xi^i}}{W} \quad (5)$$

e um gerador de malhas adaptativo é dado pelo sistema

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g^{ij} r_{\xi^i \xi^j} + \sum_{k=1}^3 g^{kk} P^k r_{\xi^k} = 0 \quad (6)$$

onde g^{ij} são as componentes contra-variantes do tensor métrico da transformação de coordenadas e r o vetor posição do ponto da malha.

Método de Pseudo-forças de Atração e Repulsão. Neste método adaptativo os nós da malha atraem (ou repelem) os nós vizinhos quando uma medida de erro da solução é maior (ou menor) que a média deste erro, tomada local ou globalmente na malha. Para que isto seja conseguido imagina-se que cada nó da malha esteja ligado a seus vizinhos por dois tipos de molas: de tensão e de torção. Sobre o sistema de forças gerado por estas molas (ponderadas por uma função de uma propriedade do problema físico) é imposta a condição de equilíbrio e o sistema algébrico resultante resolvido fornece uma nova distribuição dos pontos da malha.

RESULTADOS

Dos processos de adaptação de malha, o método das pseudo-forças envolve um maior número de constantes a ser definido a priori e requer monitoração constante do algoritmo que determina as constantes de mola de tensão e torção. Como se pretende um método adaptativo simples em sua concepção e de fácil acoplamento aos métodos numéricos de solução pressupõe-se que seu controle envolva o menos possível o usuário com a definição de constantes e ajustes correlatos. Deste ponto de vista apenas o método variacional e o método das funções de controle despertam maior interesse e foram implementados.

A avaliação dos métodos foi através do estudo de seu comportamento quando adaptando uma malha retangular sobre um campo de gradientes de uma propriedade fictícia Φ . Na solução de um problema real deseja-se que as linhas coordenadas se concentrem em regiões de maiores gradientes. Assim o campo de Φ , arbitrado, representa o campo de uma propriedade relevante para o problema físico ou é calculado por uma função que pondere várias propriedades. Para o estudo foram escolhidos campos de Φ alinhados em direções definidas. Estes são definidos pelas equações (7), (8) e (9), onde σ é uma constante numérica que define a amplitude do campo

$$\Phi_1 = \text{sen}\left(\frac{2\pi X}{L_x}\right) \text{sen}\left(\frac{2\pi Y}{L_y}\right) + 1 + \frac{1}{\sigma} \quad (7)$$

$$\Phi_2 = \text{sen}\left(\frac{2\pi X}{L_x}\right) + 1 + \frac{1}{\sigma} \quad (8)$$

$$\Phi_3 = \text{sen}\left[\frac{4\pi(X+Y)}{(L_x+L_y)}\right] + 1 + \frac{1}{\sigma} \quad (9)$$

Para todos os campos, $\Phi_{\max}/\Phi_{\min} = 2\sigma + 1$, o que permite controlar a amplitude de Φ no domínio. Para todos os casos o valor de σ foi mantido constante e igual a 100. Os campos acima determinam distribuições de Φ nas direções principais de um domínio quadrado, de lado unitário, discretizado por uma malha com n_x volumes na direção X e n_y volumes na direção Y (domínio quadrado 1×1 , 30×30 volumes). As figuras 1 e 2 mostram o comportamento dos campos Φ_i ao longo das diagonais principal e secundária do domínio, assim com ao longo da coordenada X, para o campo Φ_2 .

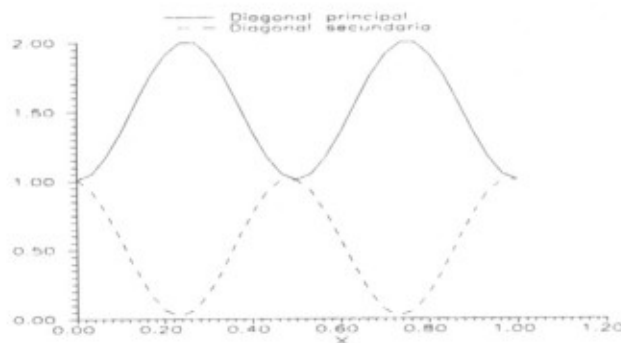


Figura 1 - Comportamento de Φ_1 ao longo das diagonais

Os métodos adaptativos foram aplicados sobre a malha cartesiana inicial, para cada uma das distribuições de Φ acima definidas. A malha era considerada adaptada quando os resíduos como definidos por Blackbill e Saltzman (1982) fossem menores ou iguais a 1.0×10^{-6} . Durante as adaptações, os campos Φ_i não foram regenerados para as novas posições de malha, permanecendo estáticos,

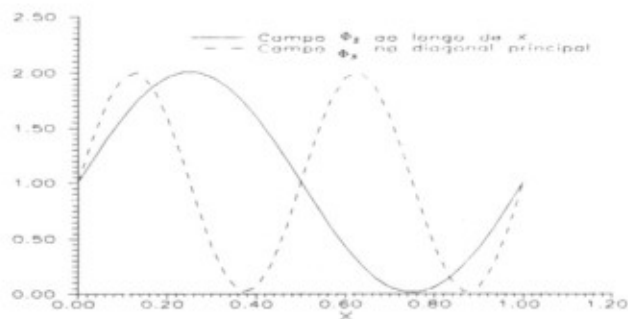


Figura 2 - Comportamento dos campos Φ_2 e Φ_3 .

o que corresponde a uma movimentação periódica ou alternativa da malha, sendo a adaptação aqui referenciada, aquela que seria realizada em um intervalo de tempo da solução física (ou um passo iterativo). Este detalhe é importante na análise dos resultados, pois o valor de Φ está associado ao nó da malha e este se mantém sobre o nó. Este fato é significativo quando associado à solução de um problema físico pois dará indicações de como o processo adaptativo pode distorcer um campo físico da solução e/ou de quando interromper o processo adaptativo.

Para o método variacional, a análise dimensional segundo Kreis et al (1986) sugere que o valor de λ_v seja da ordem de $8,1 \times 10^3$ para o domínio estudado. A malha foi adaptada a cada um dos campos para valores de λ_v na faixa $1 \times 10^4 \leq \lambda_v \leq 1 \times 10^8$. Para o método das funções de controle, as funções empregadas foram da forma

$$P^1 = A_1 \begin{pmatrix} \Phi_\xi \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad P^2 = A_2 \begin{pmatrix} \Phi_\eta \\ \Phi \end{pmatrix} \quad (10)$$

onde os fatores A_1 e A_2 controlam a adaptabilidade do método, sendo que se ambos forem iguais à zero o gerador de malha é reduzido ao mesmo caso do processo variacional para λ_v igual à zero, ou seja, a geração elíptica por equações de Laplace. Nos testes os valores de A_1 e A_2 foram sempre mantidos iguais entre si e variando na faixa $0,25 \leq A_1 = A_2 \leq 2,00$.

No método variacional, para todos os campos Φ_i , o efeito de adaptação ao campo só é percebido para valores λ_v maiores que 1.0×10^4 , aumentado seu efeito a medida que este parâmetro cresce. Observa-se entretanto que o efeito de aumentar o valor de λ_v e aumentar a adaptação da malha ao campo imposto, é obtido em detrimento da distribuição uniforme dos volumes das células, integral I_1 , como é previsível pela análise da equação (3). Ao mesmo tempo, para a malha estudada, o valor de $\lambda_v = 1.0 \times 10^8$, representa um valor máximo para o parâmetro de adaptação. Valores superiores não aumentam a adaptação da malha (concentração das linhas coordenadas junto aos maiores gradientes), mas afetam o processo de solução das equações de geração da malha, induzindo-o a divergência.

As figuras de número 3 a 8 mostram as malhas adaptadas pelos métodos ao campo Φ_2 , considerados vários valores de λ_v e A_1 . Da distribuição inicial do campo, seu valor máximo ocorre para $X = 0,25$ ($i = 7$) e ambos os métodos tendem a concentrar as linhas coordenadas em torno da sétima linha ξ . A seqüência de figuras permite avaliar a progressão dos métodos a medida que a adaptação é enfatizada em cada um deles.

A comparação entre as figuras indica que os dois métodos obtém aproximadamente o mesmo afastamento entre as linhas ξ vizinhas à $\xi = 7$ (para $Y = 1/2$) quando o método variacional encontra-se com seu valor de λ_v máximo e o método das funções de controle encontra-se ainda sub-relaxado ($A_1 = 0,75$). Se o peso A_1 do método das funções de controle é aumentado a linha $\xi = 7$ tende cada vez mais para a fronteira e as linhas vizinhas tendem a

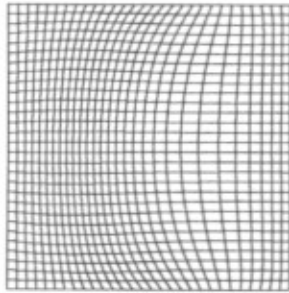


Figura 3. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^6$, campo Φ_2

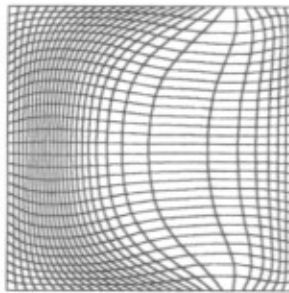


Figura 4. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^7$, campo Φ_2

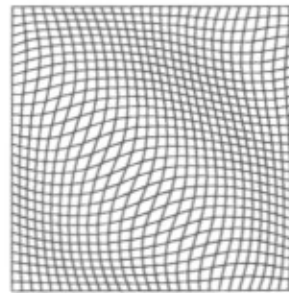


Figura 9. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^6$, campo Φ_3

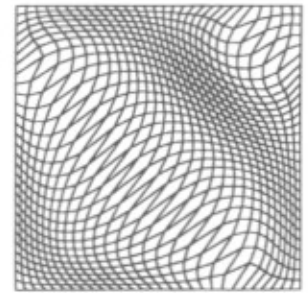


Figura 10. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^7$, campo Φ_3

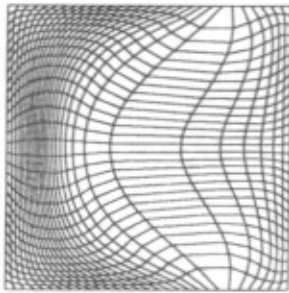


Figura 5. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^8$, campo Φ_2

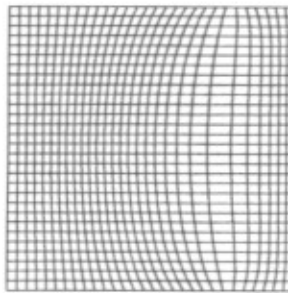


Figura 6. Mét. das funções de controle, $A_p = 0.25$, campo Φ_2

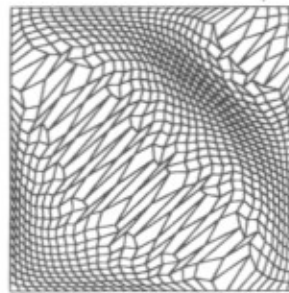


Figura 11. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^8$, campo Φ_3

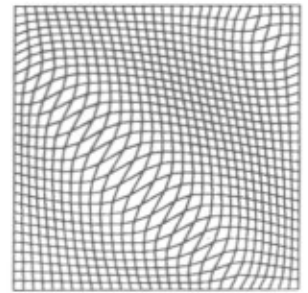


Figura 12. Mét. das funções de controle, $A_p = 0.25$, campo Φ_3

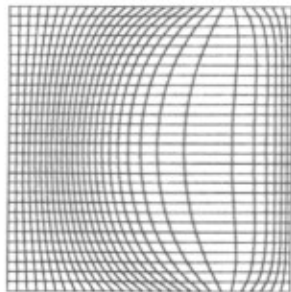


Figura 7. Mét. das funções de controle, $A_p = 0.50$, campo Φ_2

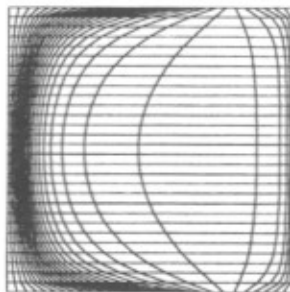


Figura 8. Mét. funções de controle, $A_p = 1.00$, campo Φ_2

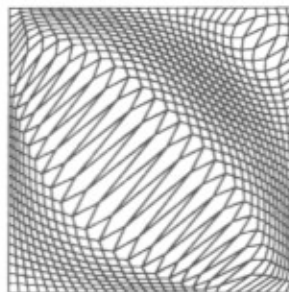


Figura 13. Mét. das funções de controle, $A_p = 0.50$, campo Φ_3

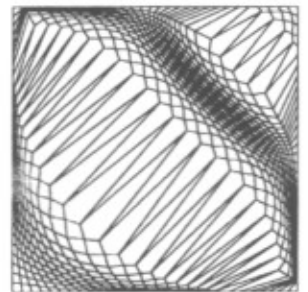


Figura 14. Mét. das funções de controle, $A_p = 1.00$, campo Φ_3

se colapsar (aparentemente) sobre esta. O fato da linha $\xi = 7$ tender a se mover mais em direção à fronteira, indica que o campo de Φ deveria ser recalculado para as novas posições coordenadas do plano físico durante a adaptação ou adaptar a malha com uma tolerância menor nos resíduos. Isto implica em um tempo computacional menor para adaptar a malha por este método. Por outro lado o aumento de λ_v não corresponde a um maior agrupamento das linhas ksi em torno de $\xi = 7$. Acareta apenas a inserção de instabilidades na solução do sistema de geração da malha: o resíduo é inicialmente reduzido e após certo valor passa a oscilar, tendendo a divergir, sem atingir a tolerância ou causar deslocamento apreciável nos nós da malha.

Outra diferença marcante entre os métodos é que no variacional, as linhas eta são distorcidas de tal modo que se obtém volumes menos angulados junto as fronteiras norte e sul do domínio. Para o método das funções de controle estes volumes são fortemente distorcidos o que pode causar instabilidade no método de solução das EDP's relacionadas ao problema físico. Esta distorção era esperada, uma vez que foi imposto apenas gradiente na direção X, e a malha de partida já é a solução para o sistema de equações de Laplace. Uma possível solução seria relaxar a posição dos pontos de fronteira permitindo seu deslocamento controlado sobre esta, procurando eliminar este efeito e/ou ortogonalizar a malha junto a fronteira.

O campo Φ_3 impõe um gradiente na direção da diagonal

principal do domínio e a tendência de levar o processo adaptativo aos mesmos limites anteriores causa a deteriorização da malha em ambos os métodos, figuras de número 9 a 14. Os volumes se tornam extremamente angulados e problemas de instabilidade podem ser inseridos na solução das EDP's do problema físico se a adaptação é forçada sobre gradientes nesta direção. Apesar disto observa-se que os métodos tendem ainda a reduzir os volumes em regiões de alto gradiente e torna-los maiores nas regiões de baixo gradiente, como esperado. O método variacional novamente não causa movimentação apreciável para valores de λ_v inferiores a 1.0×10^8 e o método das funções de controle, ainda subrelaxado ($A_1 = 0.25$), já apresenta uma tendência apreciável de adequação da malha ao campo. Seguindo esta tendência o método das funções de controle deteriora rapidamente a malha. Com valores $A_1 = 0.50$ os volumes na região de baixo gradiente já possuem uma forma de diamante, extremamente angulados.

O campo Φ_1 apresenta a distribuição de gradientes mais complexa e a adaptação obtida pelos dois métodos encontra-se nas figuras de número 15 a 20.

Para o método variacional a adaptação começa a ser apreciável para valores de $\lambda_v = 1.0 \times 10^5$ e a medida que este fator cresce, os volumes localizados nas regiões de menores gradientes tornam-se maiores e os volumes são reduzidos nas regiões de maiores gradientes na diagonal principal. A maior adaptação de malha foi obtida para o valor de λ_v igual a 1.0×10^8 . Valores

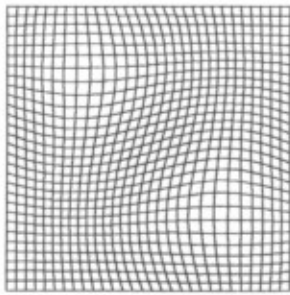


Figura 15. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^6$, campo Φ_1 .

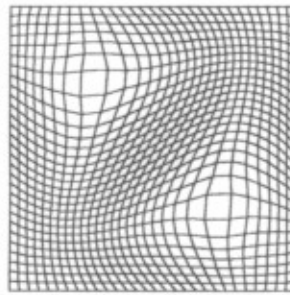


Figura 16. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^7$, campo Φ_1 .

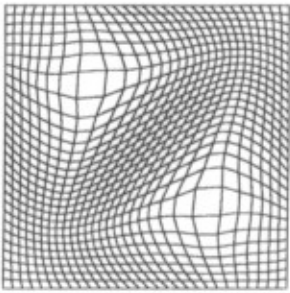


Figura 17. Método variacional, $\lambda_v = 1.0 \times 10^8$, campo Φ_1 .

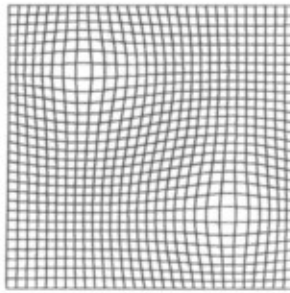


Figura 18. Mét. das funções de controle, $A_p = 0.25$, campo Φ_1 .

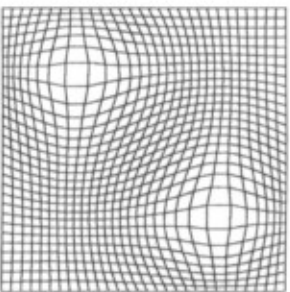


Figura 19. Mét. das funções de controle, $A_p = 0.50$, campo Φ_1 .

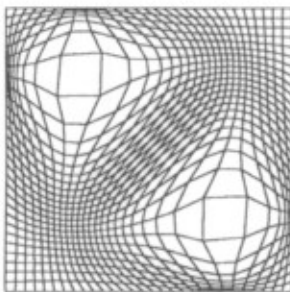


Figura 20. Mét. das funções de controle, $A_p = 1.00$, campo Φ_1 .

superiores implicam em oscilação e divergência.

O método das funções de controle apresenta uma movimentação apreciável da malha ainda que sub-relaxado ($A_p = 0.25$). Valores maiores de A_p fazem a malha se adaptar cada vez mais ao campo, levando entretanto a volumes angulados na diagonal principal.

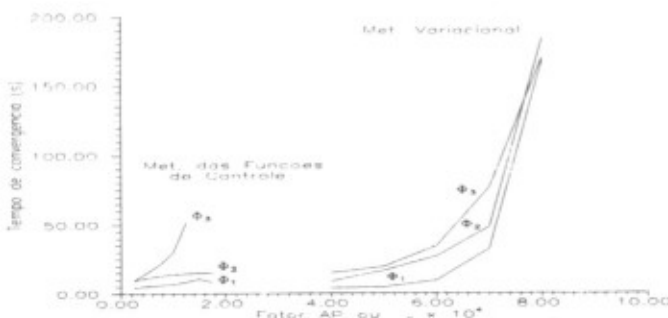


Figura 3.8 - Tempo de CPU para adaptação da malha.

A figura 3.8 apresenta o tempo computacional consumido pelos métodos para realizar a adaptação imposta, lembrando que a

tolerância nos resíduos foi constante assim como a relação Φ_{max}/Φ_{min} . O tempo refere-se ao tempo de CPU dispendido na rotina de adaptação da malha em cada um dos métodos. A máquina empregada foi um Convex C-210 e os códigos não foram otimizados.

O campo orientado na diagonal principal, Φ_3 , demanda maior tempo para adaptação e pela análise anterior, o que mais deteriora os volumes tornando-os angulados. Para este campo o fator A_p deve ser inferior a 0,25 e λ_v da ordem de 10^6 . Com estes valores o método variacional consome aproximadamente 3 vezes mais tempo para adaptar a malha que o método das funções de controle.

Para os campos Φ_1 e Φ_3 , tomadas como referências as malhas obtidas com o método das funções de controle para $A_p = 1.00$, o método variacional só obtém concentrações de volumes semelhantes, para o valor máximo de λ_v (1.0×10^8) e o tempo de computação exigido é da ordem de 10 vezes maior, e sujeito a instabilidade no processo de geração da malha. Embora fosse esperado que o método variacional consumisse mais tempo, em vista do maior número de coeficientes a serem determinados, este também apresenta uma limitação no que diz respeito à capacidade de deslocar a malha a malha original.

CONCLUSÕES

De acordo com o observado pela adaptação da malha original proposta com os campos de gradientes alinhados em direções pré-determinadas e levando em conta os tempos dispendidos para obter os deslocamentos de malha, conclui-se que o método das funções de controle apresenta-se como mais eficiente. Ambos os métodos possuem entretanto tendência a distorcer inconvenientemente os volumes da malha principalmente se o gradiente (ou a função peso) está alinhado com a diagonal dos volumes da malha inicial. Com campos alinhados em outras direções estas distorções ocorrem em menor grau e poderiam ser evitadas se um método de deslocamento dos pontos sobre a fronteira fosse implementado.

SUMMARY Adaptive grids are an important tool in numerical simulations since they can dynamically follow an specific characteristic of a calculated field. The most widely used methods for their generation are the variational, control functions and pseudo-forces. This paper presents an analysis of two of these methods when adapting grids for a specified variable distribution. It comes out that the control function method is more efficient since it requires less efforts in the implementation and in computing times. It however has the drawback of excessively distorting the grid in some situations.

BIBLIOGRAFIA

- Brackbill, J.U.; Saltzman, J.S.; "Adaptive Zoning for Singular Problems in Two Dimensions"; *Journal of Computational Physics*; vol. 46; pp. 342 - 368; 1982
- Jucá, P.C.S.; Malhas Adaptativas: Estudos Preliminares; *Dep. de Engenharia Mecânica; Centro Tecnológico; Univ. Federal de Santa Catarina, Florianópolis; Santa Catarina*; 1992
- Kreis, R.I.; Thames, F.C.; Hassan, H.A.; "Application of a Variational Method for Generating Adaptive Grids"; *AIAA Journal*, vol. 24, nº 3, March, 1986