

REFERÊNCIAS

- Camarero, R. and Reggion, M. (1986) - "Numerical Solution Procedure for Viscous Incompressible Flows", Numerical Heat Transfer, vol.10, p. 131-146.
- Majumdar, S. (1988) - "Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Non-Staggered Grids", Numerical Heat Transfer, vol.13, p.125-132.
- Maliska, C.R. (1981) - "A Solution Method for Three-dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates", Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Canadá.
- Marchi, C.H., Maliska, C.R. and Bortoli, A.L. (1989) - "The Use of Co-located Variables in the Solution of Supersonic Flows", COBEM 89 - X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica.
- Patankar, S.V. (1980) - "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Co., Washington, DC., USA.
- Peric, M., Kessler, R. Scheuerer, G. (1988) - "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids", Computers and Fluids, vol. 16, p. 389-403.
- Raithby, G.D. (1976a) - "Prediction of Dispersion by Surface Discharge", Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario.
- Raithby, G.D. (1976b) - "Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow", Comp. Meth. Applied Mech. Eng., vol.9, p. 153-164.
- Raithby, G.D. and Torrance, K.E. (1974) - "Upstream Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", Computers and Fluids, vol. 2, p. 191-206.
- Roache, P.J. (1976) - "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M., USA.
- Schneider, G.E. (1986) - "A Novel Co-located Finite Difference Procedure For the Numerical Computation of Fluid Flow", AIAA 4th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Boston, Massachusetts.
- Schneider, G.E. and Zedan, M. (1981) - "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution Of Field Problems", Numerical Heat Transfer, vol. 4, p. 1-19.
- Spalding, D.B. (1972) - "A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives", Int. Journal Num. Meth. Eng., vol. 4, p. 551-559.
- Ulson de Souza, S.M.A.G. (1992) - "Um Esquema Numérico utilizando Variáveis Co-localizadas com Função de Interpolação Completa para a Solução de Problemas de escoamento de Fluidos", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC.
- Ulson de Souza, S.M.A.G., Ulson de Souza A.A. e Maliska, C.R. (1992) - "Comparação entre a Função de Interpolação Completa e o Esquema WUDS no Método de Volumes Finitos", IX Congresso Brasileiro de Engenharia Química, Salvador-BA, p. 535-542.
- Van Doormaal, J.P. and Raithby, G.D. (1984) - "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", Numerical Heat Transfer, vol. 7, p. 147-163.

XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia

Instituto de Pesquisas Tecnológicas
São Paulo - SP - Brasil
1 a 3 de dezembro de 1993

QUANTIFICAÇÃO DA DIFUSÃO NUMÉRICA NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM COORDENADAS GENERALIZADAS, COM MALHAS ADAPTATIVAS

Antônio Augusto Ulson De Souza
Departamento de Engenharia Química - UFSC
Campus Universitário - Trindade - CP. 476
Cep: 88040 - 900 - Florianópolis - SC - Brasil

Clóvis Raimundo Maliska
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC
Campus Universitário - Trindade - CP. 476
Cep: 88040 - 900 - Florianópolis - SC - Brasil

SUMÁRIO

Uma alternativa para a quantificação da difusão numérica é proposta por Vahl Davis e Mallison aplicada ao sistema de coordenadas cartesianas. Neste trabalho é feita uma extensão desta proposta para o sistema de coordenadas generalizadas. Um esquema de malhas adaptativas é utilizado para a solução de um problema de escoamento de fluidos, sendo o efeito da difusão numérica analisado em função da adaptação da malha.

1. INTRODUÇÃO

Na solução numérica de problemas de escoamento de fluidos, utilizando-se o método de volumes finitos, especialmente nos casos onde a convecção é dominante, a influência da difusão numérica pode ocasionar graves distorções dos resultados. Diversas estratégias podem ser empregadas para a minimização dos efeitos da difusão numérica, como o refinamento da malha, o uso de funções de interpolação baseadas nas equações de conservação (Schneider e Raw, (1987), Ulson de Souza, (1992)), esquemas de interpolação "Skew upwind" (Raithby, (1976a), Lillington, (1981)) ou a utilização de malhas adaptativas (Ghia et al, (1981), Ulson de Souza, (1992)).

O elevado custo computacional ocasionado pela excessiva discretização do domínio de cálculo torna, em muitos casos, proibitiva a utilização de uma malha muito refinada. A complexidade e grande dificuldade da implementação de esquemas de interpolação multidimensionais ou baseados nas equações de conservação completas, nos programas computacionais existentes, é um fator desmotivante para a adoção destas técnicas de interpolação. A presença de coeficientes negativos, nos casos "Skew upwind", levam a problema de convergência ou de resultados não realísticos (Hassan et al, 1983).

A utilização de malhas adaptativas, que se ajustam à

física do problema, é uma alternativa bastante promissora para minimização da difusão numérica. Durante a solução do problema, a malha deve modificar-se de acordo com as informações dos passos de solução. A geração da malha passa a estar então acoplada à solução do problema sendo, as diferentes maneiras de promover este acoplamento, um assunto de pesquisa bastante atual. O uso de malhas adaptativas permite uma maior precisão da solução, comparativamente a uma malha fixa de mesmo número de pontos, não aumentando o tempo computacional, na maioria dos casos, uma vez que as características de convergência podem ser melhoradas, necessitando-se de menor esforço computacional, para se obter uma dada tolerância.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes do problema de escoamento de fluidos newtonianos escritas para um escalar ϕ , para o sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η) , podem ser expressas através da equação (2.1).

$$1/J \partial(\rho\phi)/\partial t + \partial(\rho u\phi)/\partial \xi + \partial(\rho v\phi)/\partial \eta + \tilde{P}\phi = \quad (2.1)$$

$$\partial[C_1 \partial\phi/\partial \xi + C_2 \partial\phi/\partial \eta]/\partial \xi + \partial[C_3 \partial\phi/\partial \eta + C_4 \partial\phi/\partial \xi]/\partial \eta + \tilde{S}\phi$$

onde,

$$C_1 = \alpha J^{-0.5}; \quad C_2 = -\beta J^{-0.5}; \quad C_3 = \gamma J^{-0.5} \quad (2.2)$$

O termo $\tilde{P}\phi$ representa o termo de pressão transformado, α, β, γ são os componentes do tensor métrico, J , o jacobiano da transformação e $\tilde{S}\phi$ é o termo fonte da equação transformada. Uma descrição geométrica e interpretação física de algumas relações matemáticas, envolvendo a transformação de coordenadas, podem ser obtidas em Maliska (1981) e Perez (1987). As componentes contravariantes do vetor velocidade sem normalização métrica são representadas pelas variáveis U e V .

3. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

A equação (2.1), a qual representa os balanços diferenciais de conservação da massa, quantidade de movimento e da energia, dependendo do parâmetro admitido para ϕ , pode ser aproximada de diversas formas sendo neste trabalho adotada a aproximação resultante da integração da equação (2.1), sobre o volume de controle de dimensões $\Delta \xi$ e $\Delta \eta$, ao longo do intervalo de tempo Δt . Este procedimento respeita o princípio de conservação a nível de volume de controle.

3.1 APROXIMAÇÃO DOS TERMOS DIFUSIVOS

A integração da equação (2.1) no volume de controle cria a necessidade de avaliação dos fluxos convectivos e difusivos nas faces do volume de controle. Usando-se coordenadas generalizadas, é comum aplicar ponderação (em função da

difusão/convecção) apenas nas derivadas diretas do termo difusivo, aproximando-se as derivadas cruzadas por diferenças centrais. Neste trabalho o fluxo difusivo completo é avaliado, buscando-se uma ponderação ao longo da normal. As derivadas ao longo da normal em função das derivadas ao longo de ξ e η são dadas por

$$\partial\phi/\partial n|_e = \alpha^{-0.5} J^{-0.5} (C_1 \partial\phi/\partial \xi + C_2 \partial\phi/\partial \eta)|_e \quad (3.1)$$

$$\partial\phi/\partial n|_n = \gamma^{-0.5} J^{-0.5} (C_3 \partial\phi/\partial \eta + C_4 \partial\phi/\partial \xi)|_n \quad (3.2)$$

Expressões análogas às equações (3.1) e (3.2) podem ser obtidas para as faces oeste e sul do volume de controle. A aproximação das derivadas na direção normal às faces dos volumes de controle, neste trabalho, é realizada com um esquema numérico onde quatro pontos são escolhidos entre os seis vizinhos à face em questão, em função do ângulo formado entre as linhas da malha. A Fig. 3.1 ilustra o esquema de aproximação para a derivada na direção normal à face norte, no caso onde o ângulo entre as linhas da malha, θ é maior que 90° .

A equação para a aproximação de $\partial\phi/\partial n|_n$ é

$$\partial\phi/\partial n|_n = (\phi_1 - \phi_2)/\Delta L \quad (3.3)$$

onde

$$\phi_1 = (a\phi_N + b\phi_{NE})/(a + b) \quad (3.4)$$

$$\phi_2 = (a\phi_P + b\phi_W)/(a + b) \quad (3.5)$$

$$a = \Delta \xi \gamma^{0.5} - b \quad (3.6)$$

$$b = \alpha^{0.5} \Delta \eta / 2 \sin \Omega \quad (3.7)$$

$$\Delta L = \alpha^{0.5} \Delta \eta \cos \Omega \quad (3.8)$$

Os ângulos θ e Ω podem ser obtidos através das seguintes relações

$$\cos \theta = \beta \alpha^{-0.5} \gamma^{-0.5} \quad (3.9)$$

$$\cos \Omega = \alpha^{-0.5} \gamma^{-0.5} J^{-1} \quad (3.10)$$

Convém salientar que o esquema proposto para o cálculo de $\partial\phi/\partial n$ nas faces do volume de controle, para o caso de malhas ortogonais, recai nas formulações tradicionais, como por exemplo

o esquema WUDS (Raithby, 1976b), com $\beta=1$.

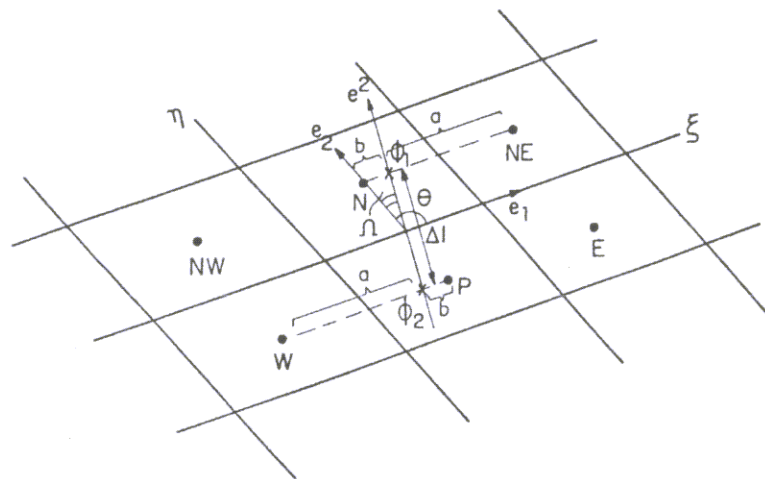


Figura 3.1-Esquema de aproximação de $\partial\phi/\partial\eta|_n$, para $\theta > 90^\circ$.

3.2 APROXIMAÇÃO DO FLUXO CONVECTIVO NA INTERFACE

Neste trabalho é usada a função de interpolação WUDS-E, que é uma extensão do esquema WUDS, com suporte nas equações de conservação. A equação (2.1) escrita para a face leste do volume de controle resulta

$$\rho U_e \frac{\partial\phi}{\partial\xi} - C_{1e} \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + B^* = 0 \quad (3.11)$$

onde B^* é dado pela equação

$$B^* = \hat{P}\phi - \hat{S}\phi - C_{1e} \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta^2} + \rho V_e \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \quad (3.12)$$

Resolvendo a equação (3.11) para a face leste do volume de controle, após adimensionalização (Ulson de Souza e Maliska, 1991), obtém-se

$$\phi_e = a_P^* \phi_P + a_E^* \phi_E + b^* B^{**} \quad (3.13)$$

onde

$$a_P^* = 1/2 + \alpha_e \quad (3.14)$$

$$a_E^* = 1/2 - \alpha_e \quad (3.15)$$

$$b^* = \alpha_e / Pe^{**} \quad (3.16)$$

sendo que

$$\alpha_e = 1/2 - (e^{Pe^{**}/2} - 1) / (e^{Pe^{**}} - 1) \quad (3.17)$$

$$b^* = (1/2 - a_E^*) / Pe^{**} \quad (3.18)$$

e,

$$B^* = [C_{1e} [\phi_N + \phi_{NE} + \phi_{SE} + \phi_S - 2\phi_E - 2\phi_P] / 2 - \rho V [\phi_{NE} + \phi_N - \phi_{SE} - \phi_S] / 4] / C_{1e} - [P] \hat{\phi} / C_{1e} + [S] \hat{\phi} / C_{1e} \quad (3.19)$$

Substituindo-se as expressões de ϕ e de suas derivadas, obtidas para as faces do volume de controle, na equação (2.1) integrada no volume de controle, obtém-se a equação discretizada

$$a_P \phi_P = a_P^o \phi_P^o + a_e \phi_E + a_w \phi_W + a_n \phi_N + a_s \phi_S + a_{ne} \phi_{NE} + a_{nw} \phi_{NW} + a_{se} \phi_{SE} + a_{sw} \phi_{SW} + b_P^* \hat{\phi} - L [P_P^*] \quad (3.20)$$

A função de interpolação WUDS-E recai na função WUDS para o caso onde B^{**} for nulo. Ressalta-se no entanto que a função WUDS-E considera, além dos componentes dos termos difusivos e convectivos na direção de uma das coordenadas, a influência do termo de pressão, fonte e componentes dos termos difusivos e convectivos na direção da outra linha coordenada, minimizando desta forma, os erros de difusão numérica. O tratamento do acoplamento pressão-velocidade é feito através do método PRIME (Maliska, (1981)).

4. GERAÇÃO DE MALHAS ADAPTATIVAS

Um esquema de malhas adaptativas foi utilizado, no qual as linhas da malha se alinham às linhas de corrente do escoamento. Assim os efeitos de difusão numérica são reduzidos.

O esquema de adaptação proposto está baseado no cálculo do campo da função corrente no domínio de cálculo, através da integração da equação (4.1).

$$d\psi = U d\eta - V d\xi \quad (4.1)$$

Deste modo obtém-se a distribuição do campo da função corrente. O campo de ψ obtido dará origem aos novos valores da coordenada ξ , sendo os correspondentes valores de η obtidos por um método algébrico. Obtidos os novos valores de ξ e η , são efetuados os cálculos da iteração seguinte, para obtenção de novos campos de velocidades, repetindo-se este procedimento até que seja alcançada a convergência desejada. Neste processo a malha final obtida estará alinhada com as linhas de corrente do problema em estudo.

5. QUANTIFICAÇÃO DA DIFUSÃO NUMÉRICA

Com o objetivo de quantificar a difusão numérica, a expressão para o coeficiente de falsa difusão apresentada por Vahl Davis e Mallinson (1976), equação (5.1), em coordenadas cartesianas, é estendida para coordenadas generalizadas.

$$\Gamma_f = \rho |V| \Delta x \Delta y \sin 2\theta / [4(\Delta y \sin^3 \theta + \Delta x \cos^3 \theta)] \quad (5.1)$$

O coeficiente da falsa difusão introduzido no método numérico, em coordenadas generalizadas, é dado por

$$\Gamma_f = \Gamma_\xi \Gamma_\eta / (\Gamma_\xi l^2 + \Gamma_\eta m^2) \quad (5.2)$$

onde l e m são os cossenos diretores do vetor velocidade com relação aos eixos coordenados e Γ_ξ e Γ_η são os coeficientes de falsa difusão nas direções ξ e η , respectivamente, dados por

$$\Gamma_\xi = \rho U \Delta \xi / 2 \quad (5.3)$$

$$\Gamma_\eta = \rho V \Delta \eta / 2 \quad (5.4)$$

$$l = \cos \theta = (x_\xi u + y_\xi v) / \alpha^{0.5} |V|^{-1} \quad (5.5)$$

$$m = (x_\eta u + y_\eta v) / (\alpha^{0.5} |V|^{-1}) \quad (5.6)$$

sendo θ o ângulo entre o vetor velocidade e o eixo ξ .

Substituindo-se as equações (5.3) a (5.6) na equação (5.2) obtém-se

$$\Gamma_f = (\rho U \Delta \xi V \Delta \eta) / (2 [U \Delta \xi / (\alpha |V|^2) (x_\xi u + y_\xi v)^2 + V \Delta \eta / (\alpha |V|^2) (x_\eta u + y_\eta v)^2]) \quad (5.7)$$

Para o caso de malhas cartesianas, a equação (5.7) recai na equação (5.1).

O problema teste escolhido é o escoamento de fluido entre duas placas planas em ângulo de 90° , conforme ilustra o esquema apresentado na Fig. 5.1, onde podem ser vistos os parâmetros geométricos e a malha inicial utilizada.

O campo de coeficiente de falsa difusão Γ_f foi obtido para malha 10×10 , sem adaptação (ITMAA=1) e após 4 adaptações (ITMAA=5), sendo os resultados apresentados nas FIGURAS 5.2 e 5.3, respectivamente.

Convém salientar que a utilização da estratégia de malha adaptativa, alinhando-se as linhas coordenadas com relação ao vetor velocidade, reduz expressivamente o coeficiente de falsa difusão, comparativamente à utilização de malha fixa.

Com o objetivo de se obter uma análise global da falsa difusão em todo o domínio computacional, foi calculado um coeficiente de falsa difusão médio, através de

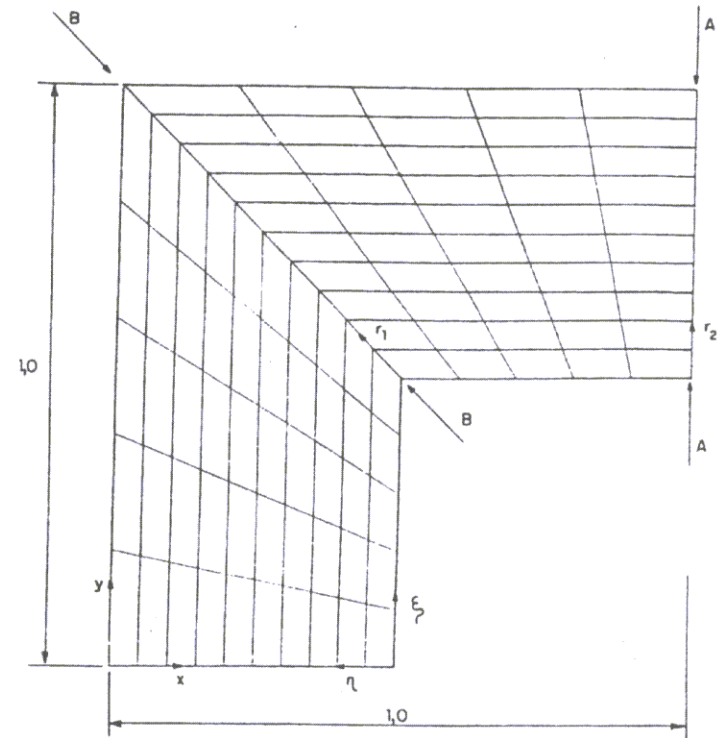


FIGURA 5.1 - Escoamento entre duas placas planas paralelas, em ângulo de 90° .

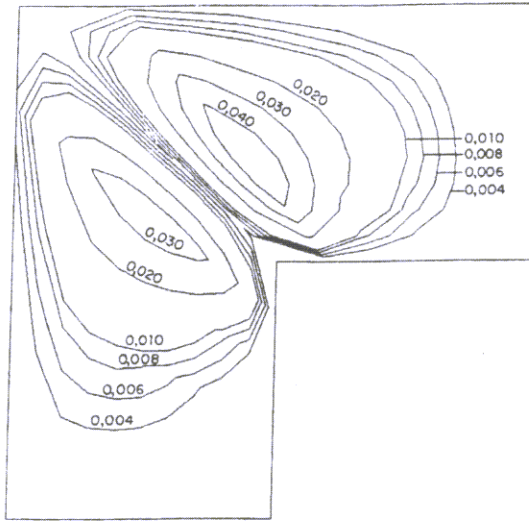


FIGURA 5.2 - Campo do coeficiente de falsa difusão, sem adaptação da malha.

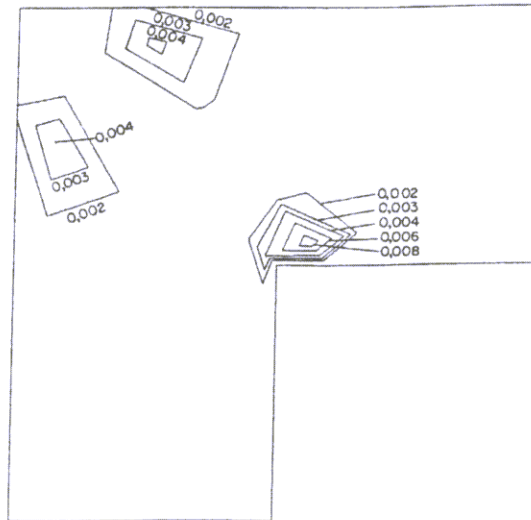


FIGURA 5.3 - Campo do coeficiente de falsa difusão, com adaptação da malha, ITMAA=5.

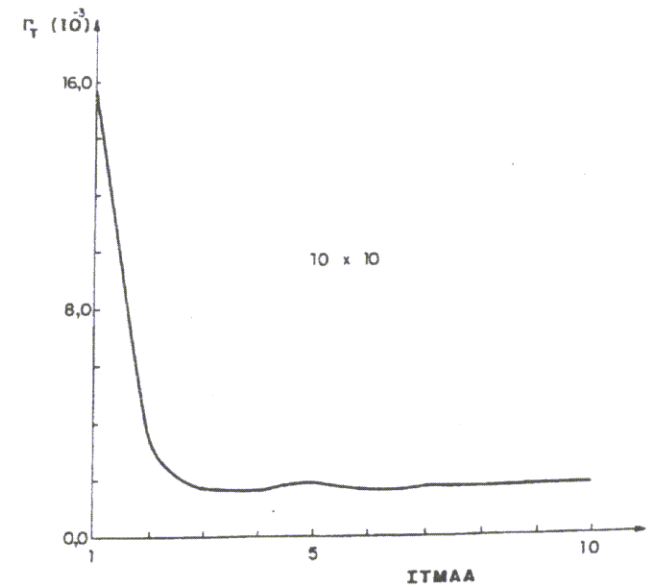


FIGURA 5.4 - Influência do número de adaptações de malha no valor de Γ_T

$$\Gamma_T = \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_{fi}^2 \right)^{0.5} / N \quad (5.8)$$

onde N é o número de pontos total no domínio e Γ_{fi} é o valor de Γ_f no ponto i do domínio.

A FIGURA 5.4 apresenta o valor de Γ_T obtido em função do número de adaptações utilizado (ITMAA).

6. CONCLUSÃO

A utilização de malhas adaptativas que se alinham a direção do vetor velocidade mostrou ser uma eficiente estratégia para a minimização da difusão numérica, reduzindo de nove vezes o valor de Γ_T , em comparação com o obtido com malha sem adaptação.

A extensão da expressão de Vahl Davis e Mallinson para coordenadas generalizadas (ξ, η) viabiliza a quantificação da difusão numérica neste sistema de coordenadas.

A equação para quantificar a difusão numérica no sistema de coordenadas generalizadas recai na equação de Vahl Davis e Mallinson, quando aplicada ao sistema de coordenadas cartesianas.

A função de interpolação utilizada, WUDS-E, é simples, de fácil implementação e preserva a influência dos termos difusivos, convectivos, pressão e fonte.

O procedimento adotado para a avaliação das derivadas normais às faces do volume de controle retém total consistência com os parâmetros geométricos, considerando-se a direção normal às faces na malha computacional, leva em conta o ângulo entre as linhas coordenadas, calculando adequadamente ($\partial\phi/\partial n$) quando malhas não ortogonais estão envolvidas.

REFERÊNCIAS

- Ghia, K.N., Ghia, U. and Shin, C.T.(1986), "Adaptative Grid Generation for Flows With Local High Gradient Regions", Advances in Grid Generation, ASME, FED, 5, pp. 35-47.
- Hassan, Y.A., Rice, J.C. and Kim, J.H.(1983), "A Stable Mass-Flow-Weighted Two-Dimensional Skew Upwind Scheme", Numer. Heat Transfer, 6, N-4, pp. 395-408.
- Lillington, J.N.(1981), "A Vector Upstream Differencing Scheme for Problems in Fluid Flow Involving Significant Source Terms in Steady-State Linear Systems", Int. J. Numer. Methods in Fluids, 1, pp.3-16.
- Maliska, C. R.(1981), "A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates", Ph.D.Tesis, University of Waterloo, Canadá.
- Perez, J.O.(1987), "Simulação Numérica de Descargas Térmicas em Corpos D'Água Rasos de Geometria e Profundidade Variáveis", Tese de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. Eng.Mecânica.
- Raithby, G.D.(1976a), "Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow", Comp. Meth. Applied Mech. Eng., 2, pp. 153-164.
- Raithby, G.D.(1976b), "Prediction of Dispersion by Surface Discharge, Basin Investigations and Modelling Section", Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario, Canadá.
- Schneider, G.E. and Raw, M.J.(1987), "Control Volume Finite-Element Method for Heat Transf and Fluid Flow Using Colocated - 1 Computational Procedure", Numerical Heat Transfer, 11, pp. 363-390.
- Ulson de Souza, S.M.A.G.(1992), "Um Esquema Numérico Utilizando Variáveis Co-localizadas com Função de Interpolação para a Solução de Problemas de Escoamento de Fluidos", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis
- Ulson de Souza, A.A. Maliska, C.R.(1991), "Utilização de Malhas Adaptativas em Problemas com Recirculação", Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, pp. 120-127. Belo Horizonte.
- Ulson de Souza, A.A.(1992), "Um Esquema para Minimização da Difusão Numérica na Solução de escoamentos em Geometrias Arbitrárias", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- Vahl Davis, G. and Mallinson, G.D.(1976), "An Evaluation of Upwind and Central Difference Approximations by a Study of Recirculating Flows", Comp. Fluids, 4, pp. 24-43.

XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia

Instituto de Pesquisas Tecnológicas
São Paulo - SP - Brasil
1 a 3 de dezembro de 1993

COMBINED LAMINAR CONVECTION IN A VERTICAL ANNULUS

Carlos A. C. Altemani
UNICAMP - FEM - Depto. Energia
Caixa Postal 6122
CEP 13081-970 - Campinas - SP

ABSTRACT

Heat transfer characteristics were obtained numerically for the mixed convection inside a vertical annular open cavity. Laminar conditions were assumed in the analysis performed under steady state conditions. Natural convection effects were considered through the Boussinesq approximation. The governing equations were solved in dimensionless form via the control volumes numerical method. It is shown that natural convection may be the dominant factor in the heat transfer from the cavity. The results presented include the streamlines and isotherms of the flow inside the cavity, as well as the local and average values of a Nusselt number.

1. INTRODUCTION

There are several applications of engineering interest dealing with laminar flow heat transfer in annular passages, such as the design of heat exchangers, coolant channels for power transformers, and others. For some applications, as for the cooling of electronic equipment, a reduced power operation is usually necessary and the flow occurs under laminar conditions. Under these circumstances, natural convection effects may play an important role in the heat transfer, so that a mixed convection analysis has to be undertaken in the design.

There are a few reports in the literature pertaining to mixed convection in a vertical annulus. Sherwin, (1968) considered the fully developed flow in a vertical annulus with a radius ratio of 3. His theoretical analysis included only the axial component of the momentum equation and the energy equation did not include the term of axial diffusion. Maitra and Raju, (1975) also considered fully developed laminar flow in a vertical annulus with upward flow. A constant heat flux was maintained in the inner wall while the outer wall was adiabatic in their theoretical analysis. They performed experimental measurements with water in an apparatus with a radius ratio of 2.65. Their reported experimental results for the Nusselt number were about 45 per cent above the prediction of their analysis. Roberya and Iqbal, (1971) performed a theoretical analysis under fully developed laminar flow conditions in a vertical annulus, taking into account viscous dissipation effects. Their results indicate that the viscous dissipation has a very small effect on the velocity and temperature profiles. Hashimoto et al., (1986) performed a numerical analysis of the mixed laminar