

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS ITERATIVOS NÃO ESTACIONÁRIOS EM MALHAS NÃO ESTRUTURADAS NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PETRÓLEO

FRANCISCO MARCONDES-Depto. Eng. Mecânica -UFPB, Campina Grande-PB
 MARIO C. ZAMBALDI- Depto. Matemática -UFSC, Florianópolis-SC
 CLOVIS R. MALISKA- Depto. Eng. Mecânica -UFSC, Florianópolis-SC

RESUMO

O presente trabalho investiga a resolução dos sistemas lineares oriundos da simulação numérica de reservatórios de petróleo utilizando malhas não estruturadas de Voronoi. Para efeito de comparação são utilizados três métodos iterativos não estacionários (GMRES, ORTHOMIN e Bi-CGSTAB). É utilizado o modelo black-oil, bifásico com um esquema totalmente implícito. Os resultados são apresentados em termos de tempo de CPU normalizado e número de iterações.

INTRODUÇÃO

A simulação numérica de reservatórios de petróleo é de importância vital no gerenciamento de bacias, aprimoramento das técnicas existentes, controle de poços, etc. Ela pode ser basicamente dividida em três etapas básicas. A primeira é a adequação dos diversos modelos aos fluidos e meio poroso da bacia; a segunda é a escolha do tipo de malha, estruturada ou não estruturada, e discretização das equações; a terceira e última etapa é a resolução dos sistemas lineares oriundos da discretização e linearização das equações. Esta última etapa, em geral, é a que envolve maior custo computacional.

A forma final do sistema linear irá depender do tipo de discretização utilizada. Os sistemas lineares provenientes de malhas estruturadas apesar de serem esparsos, apresentam leis de formação definida, ou seja apresentam largura de banda definida. Entretanto, malhas estruturadas não conseguem representar com facilidade geometrias complexas. Se por um lado, malhas não estruturadas tem facilidade na representação de geometrias arbitrárias, os sistemas lineares resultantes, geralmente são esparsos e sem lei de formação, exigindo algoritmos de resolução mais robustos, no sentido de prever as diversas conectividades possíveis.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma comparação de diferentes métodos iterativos não estacionários para a resolução de problemas oriundos da solução de problemas de petróleo empregando malhas não estruturadas. O modelo que será utilizado é o modelo black-oil bifásico (óleo-água) em geometrias bidimensionais. As malhas empregadas serão as malhas de Voronoi (Palagi, 1993; Marcondes et al., 1994,1995). Este tipo de malhas tem a propriedade de ser localmente ortogonal e desta forma, a realização de balanços de componentes, energia, etc. pode ser facilmente realizado. Como o modelo totalmente implícito será empregado, tem-se duas incógnitas por nó, gerando sistemas bloqueados, cujos blocos serão considerados como unidades de armazenamento. No presente trabalho serão investigados três métodos iterativos, ORTHOMIN (Vinsome, 1984), GMRES (Saad e Shultz, 1985) e Bi-CGSTAB (Van der Worst, 1992). Como preconditionador será utilizado a fatoração incompleta (ILU) com todos os métodos preconditionados à direita. Serão investigados também diversos tipos de malhas, com conectividade bastante variada.

PROBLEMA FÍSICO

A equação de conservação volumétrica da fase p ,

* Em doutoramento na UFSC

nas condições de armazenagem, desprezando a pressão capilar e a força gravitacional, pode ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_p}{B_p} \right) = \nabla \cdot [\lambda_p \nabla P] + q_p \quad (1)$$

onde, P é a pressão, S_p é a saturação da fase p , ϕ é a porosidade da rocha, B_p é o fator de formação volumétrico, λ_p é a mobilidade da fase p e q_p é a vazão volumétrica nas condições de armazenagem, por unidade de volume do reservatório. A equação para fechamento do problema é a conservação volumétrica, dada por

$$S_o + S_w = 1 \quad (2)$$

Integrando a Eq. (1) no volume de controle da Fig. 1 e no tempo e assumindo uma integração totalmente implícita, pode-se mostrar que o resíduo da equação discretizada é dada por

$$R_{p,i} = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \lambda_{p,ij}^{n+1} (P_j^{n+1} - P_i^{n+1}) + \bar{q}_{p,i} - \left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} + \left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n ; p=o,w \quad (3)$$

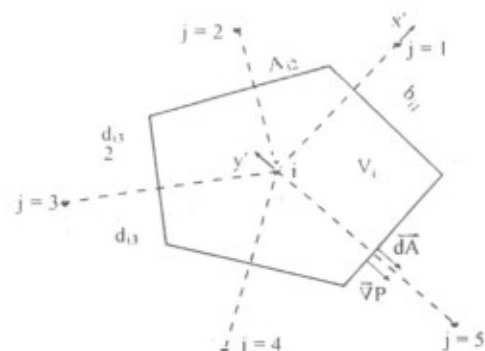


Fig. 1 - Volume de controle de Voronoi

onde, i é o ponto gerador do volume de controle, N_v o número de vizinhos e T_{ij} é conhecido como fator de transmissibilidade. Maiores detalhes do processo de integração podem ser encontrados em Palagi (1993). Expandindo o resíduo em série de Taylor e assumindo que o resíduo na iteração $v+1$ é zero, tem-se

$$\sum_{\substack{X \\ \partial X}} \left(\frac{\partial R_{p,d}}{\partial X} \right)^v \Delta X^{v+1} = -R_{p,d}^v ; p=0,w \quad (4)$$

As incógnitas (P, S_w) são calculadas após cada iteração newtoniana, como

$$X^{v+1} = X^v + \Delta X^{v+1} \quad (5)$$

e a solução aceita quando todas as tolerâncias são satisfeitas, de acordo com

$$\begin{aligned} \Delta P_{\max}^{v+1} &\leq \Delta P_{\max}^v \\ \Delta S_{w,\max}^{v+1} &\leq \Delta S_{w,\max}^v \end{aligned} \quad (6)$$

MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Em cada iteração de Newton deve-se resolver um sistema linear de equações proveniente da linearização da Eq. (3). Considere o sistema isolado.

$$Ax = b \quad (7)$$

onde A representa a matriz jacobiana da função residual e b seu valor funcional. Para o problema em questão a matriz A é não simétrica e blocada. Os blocos são submatrizes 2x2 e estão associados às duas incógnitas (P, S_w).

Para preconditionar os algoritmos que serão descritos a seguir, empregar-se-á uma fatoração incompleta (ILU), dada por

$$A = LU + E \quad (8)$$

onde E é a matriz erro, isto é, contém os elementos que são desprezados na fatoração incompleta ($E=0$ para fatoração completa). Todo elemento dos fatores L e U que coincide com a estrutura original da matriz tem nível zero. Quanto mais alto o nível, maior será o enchimento. Usualmente níveis 0, 1 e 2 são os mais indicados pois não comprometem o custo da iteração individual do algoritmo.

É possível utilizar o preconditionador de diferentes formas. No presente trabalho, melhores resultados foram obtidos com o preconditionamento à direita.

$$AU^{-1}L^{-1}z = b \quad e \quad x = U^{-1}L^{-1}z \quad (9)$$

Neste caso, o resíduo correspondente do sistema preconditionado é idêntico ao resíduo original.

$$r_k = b - AU^{-1}L^{-1}z_k = b - Ax_k \quad (10)$$

Os algoritmos iterativos são descritos a seguir, na forma preconditionada à direita. Nos algoritmos descritos x_0 é a aproximação inicial, r_0 o resíduo calculado com este ponto e $M = LU$, a matriz oriunda da fatoração incompleta.

Algoritmo GMRES.

passo 1 - inicialização

$$r_0 = b - Ax_0 \quad e \quad v_1 = r_0 / \|r_0\|$$

passo 2 - ortogonalização

para $j=1, \dots, m$

$$z_j = M^j v_j$$

$$w = Az_j$$

$$u_{ij} = (w, v_j), \quad i=1, \dots, j$$

$$w = w - \sum_{i=1}^j u_{ij} v_i$$

$$u_{j+1,j} = \|w\|$$

$$v_{j+1} = w / u_{j+1,j}$$

passo 3 - solução corrente

$$x_m = x_0 + V_m y_m \quad \text{onde} \quad y_m = \min \| \beta e_1 - U_m y \| \quad e \quad \beta = \| r_0 \|$$

passo 4 - recomeço

$$r_m = b - Ax_m$$

$$\text{se } \| r_m \| / \| r_0 \| < \text{TOL} \text{ pare}$$

senão $x_0 = x_m$ e $v_1 = r_0 / \|r_0\|$ vá para o passo 2

No GMRES o passo 2 descreve o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt e o passo 3 é obtido por rotações no plano sob a matriz de Hessenberg U .

Algoritmo Bi-CGSTAB.

$$r_0 = b - Ax_0$$

$$\hat{r} = r_0 ; \rho_0 = \alpha_0 = \omega_0 = 1$$

$$v_0 = p_0 = 0$$

para $i=1, 2, \dots$

$$\rho_i = (\hat{r}, r_{i-1})$$

$$\beta_{i-1} = (\rho_i / \rho_{i-1}) / (\alpha_{i-1} / \omega_{i-1})$$

$$p_i = r_{i-1} + \beta_{i-1} (p_{i-1} - \omega_{i-1} v_{i-1})$$

$$\hat{p} = M^{-1} p_i$$

$$v_i = A \hat{p}$$

$$\alpha_i = \rho_i / (\hat{r}, v_i)$$

$$s_i = r_{i-1} - \alpha_{i-1} v_i$$

$$\hat{s} = M^{-1} s$$

$$t = A \hat{s}$$

$$\omega_i = (t, s) / (t, t)$$

$$x_i = x_{i-1} + \alpha_i \hat{p} + \omega_i \hat{s}$$

$$r_i = s - \omega_i t$$

se $\| r_i \| / \| r_0 \| < \text{TOL}$ pare

senão

$$x_{i-1} = x_i ; \alpha_{i-1} = \alpha_i ; \omega_{i-1} = \omega_i ; \rho_{i-1} = \rho_i$$

O Bi-CGSTAB, de Van der Vorst (1992) foi desenvolvido no sentido de corrigir "frequentes irregularidades" no processo de convergência do método CGS (Conjugate Gradient Squared, Sonneveld, 1989), por um tipo de minimização local do vetor resíduo.

Algoritmo ORTHOMIN.

$$r_0 = b - Ax_0$$

para $k=1, 2, \dots$

$$v_k = M^k r_{k-1}$$

$$a_{i,k} = -(Av_k, Aq_i) / (Aq_i, Aq_i) ; i=1, k-1$$

$$q_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k} q_i$$

$$\omega_k = (r_{k-1}, Aq_k) / (Aq_k, Aq_k)$$

$$x_k = x_{k-1} + \omega_k q_k$$

$$r_k = r_{k-1} - \omega_k Aq_k$$

se $\| r_k \| / \| r_0 \| < \text{TOL}$ pare

Conforme citado em Behie e Vinsome (1982) o coeficiente ω_k é escolhido de modo que a soma dos quadrados do resíduo seja minimizado e os coeficientes $a_{i,k}$ são os coeficientes de ortogonalidade, de modo que os vetores Aq_k sejam ortogonais.

RESULTADOS

Para todos os resultados que serão mostrados nesta seção o critério de parada no solver foi a razão $\|r_k\|/\|r_0\| \leq 10^{-3}$, e como critério de parada de uma iteração newtoniana $6.893 \cdot 10^2$ para ΔP_{\max}^* e 10^{-4} para $\Delta S_{w,\max}^*$. Estes critérios garantiram simulações com aproximadamente os mesmos intervalos de tempo.

Tab. 1 - Cálculo aproximado dos métodos para i iterações

MÉTODO	(x,y)	$y + \alpha x$	$y = Ax$	$y = M^{-1} x$
GMRES	$i + 1$	$i + 1$	1	1
ORTHOMIN	$i + 2$	$2i + 2$	1	1
BI-CGSTAB	4	6	2	2

A Tab. 1 apresenta o número aproximado de operações para cada um dos métodos analisados. Verificando-se os dados da Tab. 1, pode-se concluir que, se o número de iterações for

GMRES e ORTHOMIN coincidem, o custo do ORTHOMIN deverá ser maior, uma vez que, o mesmo realiza 1 produto interno e $(i+1)$ operações do tipo $(x + \alpha y)$ a mais que o GMRES.

A primeira geometria testada corresponde a um quarto da configuração de cinco poços. Os dados físicos e geométricos deste caso estão listados na Tab. 2 e a malha utilizada é apresentada na Fig. 3. As curvas de permeabilidade relativa e razão de viscosidades são dados pela Eq. 11. Os resultados correspondentes a este caso estão listados na Tab. 3. O tamanho máximo da base para o GMRES e ORTHOMIN foi 10.

$$\begin{aligned} K_{rw} &= S_w^2 \\ K_{ro} &= (1 - S_w)^2 \\ M &= \mu_o / \mu_w \end{aligned} \quad (11)$$

Tab. 2 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 1

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$K=12,5 \times 10^{15} \text{ m}^2$ $h = 6,09 \text{ m}$ $A = 1,6 \times 10^5 \text{ m}^2$ $\phi = 0,08$	$S_i = 0$ $P_i = 6,893 \times 10^5 \text{ Pa}$	$\mu_o = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ $\mu_w = 1/M \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ $ \bar{q}_p = \bar{q}_i = 1,110^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $c_o = c_w = 1,45 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$

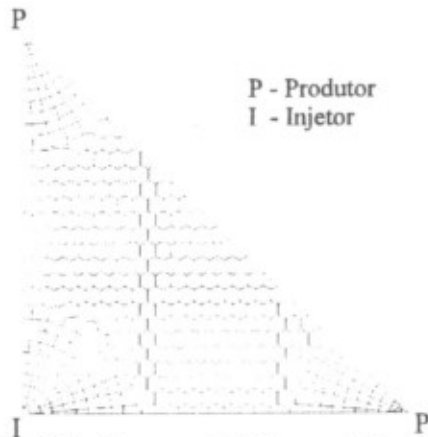


Fig. 3 - Malha hexagonal híbrida com 445 volumes

Tab. 3 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 1.0 VPI - caso 1

MÉTODO (ILU)	ORDENAÇÃO		
	NATURAL	VERTICAL	HORIZONTAL
GMRES(0)	135.223 (2.56)	131.145 (2.50)	132.695 (2.76)
GMRES(1)	40.581 (1.05)	67.275 (1.53)	69.221 (1.69)
GMRES(2)	36.050 (1.22)	34.265 (1.11)	34.671 (1.09)
ORTHOMIN(0)	135.223 (2.75)	131.145 (2.69)	132.695 (2.89)
ORTHOMIN(1)	40.581 (1.08)	67.275 (1.63)	69.221 (1.80)
ORTHOMIN(2)	36.050 (1.26)	34.265 (1.16)	34.671 (1.14)
Bi-CGSTAB(0)	36.190 (1.17)	39.135 (1.23)	40.193 (1.40)
Bi-CGSTAB(1)	22.800 (1.00)	26.058 (1.04)	26.918 (1.15)
Bi-CGSTAB(2)	17.734 (1.05)	18.389 (1.02)	18.577 (1.00)

Observando-se os dados da Tab. 3, verifica-se que ORTHOMIN e GMRES com ILU(0) apresentam comportamento bastante inferior ao Bi-CGSTAB. Por outro lado, o Bi-CGSTAB, apresentou uma sensibilidade muito pequena ao condicionamento quando comparado aos outros dois métodos. Observe, também, que para este caso, a ordenação natural foi a que apresentou melhores resultados para os três métodos. Antes de tentar elucidar este ponto, far-se-á

uma breve descrição de como é obtida a ordenação natural, através do gerador desenvolvido por Maliska Jr. (1993). A malha básica é hexagonal. Após a construção desta, escolhe-se o local onde deseja-se a malha polar (por exemplo, em torno do poço). Os pontos pertencentes a malha hexagonal contidos dentro da região polar são eliminados e os pontos remanescentes no restante do domínio renumerados. Os novos pontos colocados dentro da janela circular são numerados a partir do último nó hexagonal. Isto faz com que as incógnitas relacionadas aos poços fiquem bastante próximas. Neste problema, só existe uma frente de propagação de onda, e como as incógnitas relacionadas aos poços estão bastantes próximas, a informação da frente de onda é rapidamente transmitida para o restante do domínio, melhorando a convergência do solver.

A Fig. 4 apresenta uma configuração mais próxima daquelas encontradas em recuperação de petróleo. A configuração é composta de 8 (oito) poços, sendo que 6 (seis) são poços produtores e 2 (dois) injetores. Os resultados apresentados a seguir foram reproduzidos com uma malha hexagonal híbrida, com 1024 volumes. A malha tem 16 volumes ao longo do ângulo de abertura de cada poço. Os dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 4 e as curvas de permeabilidades relativa e viscosidades são dados na Eq. (12), todos no SI. Neste caso, não foi obtida convergência do GMRES e ORTHOMIN, com base 10, mesmo permitindo-se vários recomeços. O tamanho máximo da base foi 50.

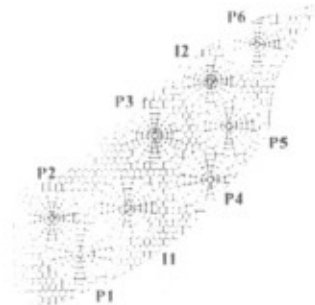


Fig. 4 - Malha hexagonal híbrida com 1026 volumes

$$\begin{aligned} K_{rw} &= (S - 0.2)(-250S^2 + 32S - 55) \\ K_{lo} &= 1 - k_{rw} \\ \mu_w &= 10^{-3}(1 + 1.45^{-12}(P - 1.37 \cdot 10^7)) \\ \mu_o &= 1.1163 \cdot 10^{-2}(1 + 1.45^{-12}(P - 1.37 \cdot 10^7)) \end{aligned} \quad (12)$$

Tab. 4 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 2

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$K=3 \times 10^{13} \text{ m}^2$ $h = 15 \text{ m}$ $A = 1,82 \times 10^6 \text{ m}^2$ $\phi = 0,30$	$S_i = 0,3$ $P_i = 2,413 \times 10^7 \text{ Pa}$	$\bar{q}_{p1} = \bar{q}_{p2} = -9,210^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p3} = -1,110^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p4} = -5,5210^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p5} = \bar{q}_{p6} = -7,3610^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i1} = 2,9410^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i2} = 2,02410^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $c_o = c_w = 7,25 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$

Da Tab. 5 verifica-se, novamente, uma maior sensibilidade do GMRES e ORTHOMIN a qualidade do condicionador. Neste caso, o Bi-CGSTAB, também apresentou uma sensível diferença à qualidade do mesmo. Neste problema, existem diversas frentes de propagação de onda, e a ordenação natural não forneceu bons resultados. A melhor convergência foi obtida com uma ordenação vertical para a maioria dos casos testados. Este fato pode ser explicado, tendo-se em conta que o número de nós na direção y é muito

menor que na direção x. desta forma, a largura de banda originada com a ordenação vertical é muito menor. Observe que o número de iterações para o GMRES com as ordenações vertical e horizontal são bastantes próximas. Novamente, o tempo de CPU do ORTHOMIN foi maior que o tempo do GMRES, apesar de existir uma pequena diferença no número de iterações dos métodos, a favor do ORTHOMIN.

Tab. 5 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 0.5 VPI - caso 2

MÉTODO (ILU)	ORDENAÇÃO		
	NATURAL	VERTICAL	HORIZONTAL
GMRES(0)	70.299 (2.03)	64.124 (1.76)	64.785 (1.80)
GMRES(1)	46.979 (1.42)	42.325 (1.14)	42.554 (1.16)
GMRES(2)	33.831 (1.32)	31.044 (1.00)	31.520 (1.09)
ORTHOMIN(0)	70.286 (2.34)	64.058 (2.01)	-
ORTHOMIN(1)	46.846 (1.61)	42.243 (1.31)	-
ORTHOMIN(2)	33.954 (1.46)	30.924 (1.05)	-
Bi-CGSTAB(0)	54.839 (1.50)	54.669 (1.62)	-
Bi-CGSTAB(1)	36.536 (1.36)	33.162 (1.15)	-
Bi-CGSTAB(2)	27.035 (1.44)	25.326 (1.11)	-

A Tab. 6 apresenta o resultados para a geometria do caso 3, com uma malha somente de hexágonos. A única diferença em relação aos dados do problema anterior é que esta configuração é composta somente de três poços, sendo dois produtores e um injetor. A vazão de cada produtor foi de $1,84 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ e a do injetor igual $3,68 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. A Fig. 5 apresenta a malha empregada.



Fig. 5 - Malha hexagonal com 559 volumes

Tab. 6 - Número de iterações e tempo de CPU normalizado - para 0.5 VPI - caso 3

MÉTODO (ILU)	ORDENAÇÃO		
	NATURAL	VERTICAL	HORIZONTAL
GMRES(0)	61.401 (1.68)	48.218 (1.31)	50.749 (1.30)
GMRES(1)	44.879 (1.55)	36.348 (1.06)	39.743 (1.21)
GMRES(2)	34.147 (1.63)	25.449 (1.00)	28.365 (1.09)
ORTHOMIN(0)	61.312 (2.02)	48.220 (1.46)	50.693 (1.52)
ORTHOMIN(1)	44.886 (1.66)	36.324 (1.14)	39.658 (1.38)
ORTHOMIN(2)	34.147 (1.64)	25.440 (1.05)	28.357 (1.18)
Bi-CGSTAB(0)	49.212 (1.62)	35.941 (1.67)	39.499 (1.41)
Bi-CGSTAB(1)	34.467 (1.66)	26.370 (1.16)	28.481 (1.22)
Bi-CGSTAB(2)	25.188 (1.79)	18.325 (1.17)	20.178 (1.22)

No caso 3 o Bi-CGSTAB com ILU(0) apresentou os piores resultados para as ordenações vertical e horizontal. Melhores resultados para todos os métodos foram obtidos com a ordenação vertical. Observe que o melhor resultado em termos de tempo de CPU foi obtido para o GMRES com ILU(2) e ordenação vertical. O mesmo não ocorre para o Bi-CGSTAB. O maior custo computacional dos *solver's* está na resolução do sistema preconditionado e produto matriz-vetor.

O enchimento da matriz de preconditionamento para uma ILU(2) é maior que o enchimento da matriz com ILU(1). Desta forma, o custo de resolver o sistema aproximado fica mais comprometido com o aumento do nível da ILU. Como no Bi-CGSTAB, são necessárias duas operações deste tipo (ver. Tab. 1), não ocorre uma diminuição do tempo de CPU, com o aumento do nível da ILU de 1 para 2, embora ocorra uma diminuição do número de iterações.

CONCLUSÕES

Os resultados apresentados em termos de tempo de CPU e número de iterações no *solver* mostraram que o GMRES é ligeiramente superior ao ORTHOMIN, apesar do número de iterações em ambos os métodos serem semelhantes. Isto ocorre, em virtude do número de operações do ORTHOMIN ser maior. Poderia-se tentar realizar o produto Mq^{n+1} em vez de realizá-lo por acumulação, como foi realizado neste trabalho, para verificar se ocorreria uma queda no tempo de CPU. Para os casos 2 e 3 o GMRES apresentou melhores resultados em termos de tempo de CPU, entretanto para o caso 1 o Bi-CGSTAB foi mais robusto. Em todos os problemas testados, o Bi-CGSTAB foi o método que apresentou o menor número de iterações para uma dada ordenação e nível de CPU. Uma vantagem observada no Bi-CGSTAB é que o mesmo não requer nenhum parâmetro de iteração a ser definido pelo usuário, enquanto GMRES e ORTHOMIN requerem alguma experiência do usuário ou uma série de testes na tentativa de obter a dimensão da base e número de recomeços ótimos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- # Behie, A. e Vinsome, P. K. W.: "Block Iterative Methods for Fully Implicit Reservoir Simulation, Soc. Pet. Eng. J., 22, 1982.
- # Maliska Jr., C. R.: "Um Robusto Gerador de Diagramas de Voronoi para Discretização de Domínios Irregulares", XIV CILAMCE - São Paulo, SP, Dezembro, 1993.
- # Marcondes, F., Zambaldi, M. C e Maliska, C. R.: "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas de Voronoi", *1º Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 335-338, São Paulo, SP, Dezembro, 1994.
- # Marcondes, F., Zambaldi, M. C e Maliska, C. R.: "Comparação de Métodos Estacionários e GMRES em Simulação de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas não Estruturadas de Voronoi", submetido para *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, 1995.
- # Palagi, C.: "Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs", PhD dissertation, Stanford University, Stanford (May, 1992).
- # Saad, Y e Schultz, M. H.: "GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems, *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, 7, pp.857-869, 1986.
- # Sonneveld, P.: "CGS: A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, 10, pp. 36-52, 1989.
- # Van der Vost, H. A.: "Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, 13, pp. 631-644, 1992.

ABSTRACT

An investigation about the solution of linear systems arising from the numerical simulation of petroleum reservoirs, using Voronoi grids, is performed in this work. For comparisons purposes three non-stationary methods are tested (GMRES, ORTHOMIN and Bi-CGSTAB). The results are presented in terms of normalized CPU time and iterations number.

A 3D Numerical Method with Boundary-Conforming Discretization for Petroleum Reservoir Simulation

The simulation of petroleum reservoirs requires the solution of the flow of water, oil and gas in a porous media. Besides the normal difficulties in solving coupled set of partial differential equations, the irregular shape of the reservoir and the presence of irregular internal geological faults, are of special concern when constructing the simulator. This paper reports a numerical method using nonorthogonal boundary-conforming discretization and the finite-volume concept for deriving the algebraic equations. The boundary conditions and the faults are considered through the specification, in the input data, of fault coefficients. This allows the construction of only one type of discretized equation, simplifying enormously the routine for calculating the coefficients. The IMPES scheme is used. The method was applied with success for some 3D petroleum reservoir simulations with several injection and production wells.

C.R. Maliska, A.F.C. Silva, A.R. Cunha, M.A. Livramento, Mechanical Engineering Department, Federal University of Santa Catarina, P.O. Box, 476, 88040-900-Florianópolis - SC - Brazil.

95

Monte Carlo Simulation of Crack Detection in Steel Pipes

A mathematical model is used for the simulation of crack detection by magnetic flux leakage in steel pipes. It is based on the solution of a nonlinear partial differential equation that takes into account the geometry of the pipe and the detector, and the saturation of the induction flux density as a function of the magnetic field in the ferromagnetic material. The model is used to calculate a signal strength that is strongly correlated to the crack depth, but also depends on several parameters such as crack width, pipe wall thickness, applied field strength, distance between pipe and detector, etc.

A Monte Carlo simulation, in which these parameters are allowed to vary with normal distributions around some typical average values, is used to evaluate the signal threshold required to ensure the desired confidence level for the detection of cracks deeper than any given value. The occurrence of false alarms, i.e., of smaller cracks that give rise to signals above the established threshold, is also simulated.

Eduardo Altschuler, FUDETEC, L. Alem 1067, 1001 Buenos Aires, Argentina.

Jonás Paik, TECHINT, L. Alem 1067, 1001 Buenos Aires, Argentina.

Alberto Pignotti, FUDETEC, L. Alem 1067, 1001 Buenos Aires, Argentina.

Simulation of Heat Conduction in Liquid Helium

We consider the modelling of the process of heat conduction in liquid Helium, both in phases I (normal fluid) and II (super fluid). The phase transition is characterized by a specific heat dependence on temperature with a delta function at the critical temperature (λ - point), and the conduction in Helium II is modelled through a heat flux dependence on temperature gradient known as the Gorter-Mellink law. All together these formulations lead to a highly non linear free-boundary problem. Computational simulations of one and two dimensional cases are presented.

M.A. Raupp, University of São Paulo, Dept. of Applied Mathematics, P.O. Box 20.570 - 01452-990, São Paulo, Brasil.

J.W. Cardenas, University of São Paulo, Dept. of Applied Mathematics, P.O. Box 20570 - 01452-990, São Paulo, Brasil.

Asymptotic-Modal Solutions of the Sivahinsky-Type Equations

The solution of the differential or integro-differential equations describing the behavior of many physical phenomena, some combustion problems among them, is, in general, a difficult task, often accomplished either by Numerical or Perturbation methods. These latter are limited by the increasing complexity of the non-homogeneous equations that must be solved at each approximating step. In the special case when the solutions sought are periodic and the non-linearities are quadratic, that complexity can be circumvented by using suitable combinations of power-series and Fourier-series expansions. It is then possible to reduce the aforementioned equations to sequences of linear systems of algebraic equations that can be solved iteratively, thus obtaining any desired degree of accuracy. The purpose of the present work is to give an overview of the method and physical conclusions obtained when applied to the Clavin-, Kuramoto- und Michelson-Sivahinsky equations.

Leon Sinay, INPE/LCP, Rod. Pts. Dutra, km 40, 12630-000 Cachoeira Paulista-SP, Brazil.

Approximation of Quasi-Geostrophic States and Global Attractor Estimates

We discuss the atmospheric Lorenz Model. In the region where divergence is stronger than vorticity, we formulate a second-order approximation for the velocity and a first-order one for the vorticity. This leads to better approximations for the quasi-geostrophic states where gravity waves are damped. The AIM technique and the non-linear Galerkin method is applied for obtaining first estimates of the global attractor for appropriate initial data.

Jose Walter Cardenas Sotil, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Ingenieria, Lima, Peru.

Critical-Point, a Software for Portfolio Optimization

Critical-Point is a tool for portfolio optimization in the context of mean-variance analysis and linear equality and inequality constraints for bounded real variables. Critical-Point solver for Parametric Quadratic Programming (PQP) uses stable sparse matrix factorizations and rank-1 updates, specially adapted to block structured matrices. These linear algebra computational procedures, and additional stabilization techniques allow us to solve large models, with hundreds of assets and constraints, in personal computers. Critical-Point user interface gives graphical representation and permits direct manipulation of portfolios in the efficient frontier, critical points, tangent lines, no-risk assets, and several simultaneous parametrizations for the standard Markowitz model, and for many related variations like the models of Tobin, Brennan, Choen and Pogue, general index models, CAPM, APT, etc. A compiler provides the automatic translation of the model description from a high level intuitive language, with complete set (sectors) and vector (associative array) algebras, to matrix form.

J.M. Stern, University of São Paulo, Dept. of Computer Science, P.O. Box 20.570 - 01452-990, São Paulo, Brasil.