

## SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR E MECÂNICA DOS FLUIDOS EM COORDENADAS GENERALIZADAS

Δ3CM

ABEnS

CLÓVIS RAIMUNDO MALISKA

Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC



PUC/RJ

### RESUMO

*O uso de coordenadas generalizadas coincidentes com as fronteiras do domínio de cálculo apresenta-se, atualmente, como uma poderosa ferramenta na solução numérica de problemas de transporte de quantidade de movimento, massa e calor. A grande atratividade de da metodologia é a sua generalidade, sendo possível tratar problemas em geometrias arbitrarias com a utilização de um programa computacional único escrito em um domínio retangular fixo. Neste trabalho as características fundamentais da técnica são ressaltadas, juntamente com a indicação dos tópicos que atualmente recebem mais atenção dos pesquisadores.*

### INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de técnicas numéricas para a solução de problemas mais complexos da engenharia sempre foi um objetivo perseguido pelos analistas numéricos. A falta de equipamentos de cálculo não permitiu, entretanto, que a capacidade de obtenção das soluções acompanhasse a necessidade imposta pelo desenvolvimento tecnológico.

Com o advento dos grandes computadores, cujo desenvolvimento foi, obviamente, impulsionado pela necessidade tecnológica, as técnicas numéricas experimentaram um crescimento extraordinário. Fenômenos físicos que hoje podem ser simulados em computador (experimentação numérica) requeriam no passado exaustivos e custosos experimentos em laboratório. Uma adequada associação destes dois procedimentos oferece, atualmente, a possibilidade da realização de grandes projetos com custos significativamente reduzidos. Com o aperfeiçoamento das técnicas numéricas as mesmas desempenharão um papel cada vez mais importante na solução de importantes problemas da engenharia.

Relativamente às técnicas numéricas de solução, historicamente, o método das diferenças finitas foi sempre associado à solução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor, enquanto que o método dos elementos finitos associado à solução de problemas elastostáticos. Esta divisão clara, provavelmente, se deveu ao fato de que a aplicação do método dos elementos finitos pressupunha a existência de um princípio variacional para o operador em questão, característica não exibida pelas equações Navier-Stokes completas. A grande vantagem desta técnica sempre foi a possibilidade do tratamento de geometrias arbitrarias. Entretanto, o tratamento de problemas envolvendo equações não lineares para sistemas em movimentos e acopladas, não mereceu atenção especial dos pesquisadores desta técnica. Por outro lado, os analistas numéricos envolvidos com o método das diferenças finitas sempre dedicaram especial atenção ao modelamento dos termos convectivos (não lineares) e ao tratamento do forte acoplamento entre as equações. A questão da geometria arbitrária, entretanto, ficou adormecida de tal maneira que, ainda hoje, associa-se, erroneamente, ao método das diferenças finitas a necessidade das fronteiras do domínio de cálculo serem coincidentes com um sistema de coordenadas ortogonal, como por exemplo cartesiano, cilíndrico, esférico, etc.

Com a necessidade da solução de problemas complexos de transferência de calor e mecânica dos fluidos definidos em geometrias irregulares, o método dos elementos finitos está recebendo grande atenção dos pesquisadores, procurando-se remover as dificuldades

com relação as não linearidades, acoplamento, difusão numérica, etc. [1]. Uma característica importante, e não contemplada pelo método dos elementos finitos tradicional, é a garantia da conservação, a nível de volumes elementares, das grandezas físicas em questão. Recentes desenvolvimentos, como o método dos volumes finitos baseados no volume de controle, removem esta dificuldade [6] [7].

Com relação ao método das diferenças finitas esforços foram iniciados no começo da década de 70 para remover a dificuldade no tratamento de geometrias complexas. As referências [2] e [3] foram pioneiras na indicação do caminho a ser seguido nos desenvolvimentos futuros. Em 1974, com os desenvolvimentos avançados em [4] [5], deu-se início ao que se constituiu em um dos maiores avanços observados no desenvolvimento de metodologias numéricas para a solução de problemas de campo, introduzindo uma metodologia básica, utilizando coordenadas generalizadas, da qual hoje derivam os mais variados modelos numéricos existentes.

Com este extraordinário avanço, hoje, praticamente todos os sofisticados programas computacionais para a solução de problemas aerodinâmicos da área aeroespacial utilizam coordenadas não ortogonais coincidentes com a geometria. Além desta área, na qual mais se difundiu o uso deste tipo de discretização, a metodologia é hoje utilizada na solução dos mais diversos problemas da engenharia que envolvem a solução de equações e de sistemas de equações diferenciais parciais lineares e não lineares. O grande atrativo da metodologia é o fato da solução ser obtida em um domínio computacional fixo, independente da forma da geometria física do problema, podendo ainda as fronteiras do domínio apresentarem variação com o tempo sem alterar o domínio computacional. Com isto o programa computacional que resolve o problema físico torna-se geral, sendo as informações da geometria transferidas ao mesmo através das métricas da transformação. As coordenadas dos pontos que definem a geometria arbitrária são dados de entrada para o programa computacional que faz a geração do sistema de coordenadas coincidentes com a fronteira.

### DESCRIÇÃO DA METODOLOGIA

Antes da discussão de questões específicas da metodologia é didático apresentar a seqüência das operações principais que a caracterizam. O objetivo é a solução de um sistema de equações diferenciais parciais, com as respectivas condições de contorno, escrito, por exemplo, no sistema de coordenadas cartesiano e definido na geometria mostrada na Fig. 1.

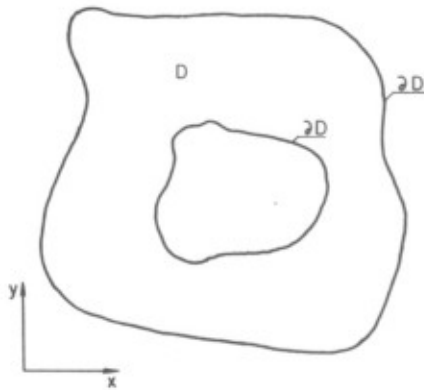


Fig. 1 - Geometria arbitrária

Para simplicidade das figuras as discussões ao longo deste trabalho se referem a problemas bi-dimensionais. A essência das conclusões é válida, entretanto, para problemas tri-dimensionais. A solução destes últimos é obtida, obviamente, acompanhada de maior complexidade de programação e tempo de computação.

A solução do problema acima proposto usando a discretização cartesiana traria problemas com relação a interpolação das condições de contorno, uma vez que não teríamos as fronteiras dos volumes elementares sendo coincidentes com a fronteira da região, conforme mostra a Fig. 2. Além disto o programa computacional ficaria extremamente dependente da geometria, o que é indesejável caso se procure o desenvolvimento de uma metodologia geral.

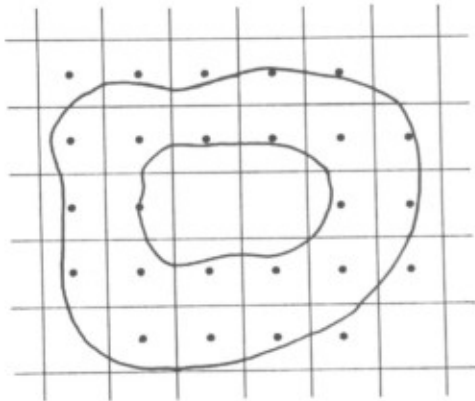


Fig. 2 - Discretização cartesiana de uma geometria arbitrária.

Seguindo a opção da utilização de um sistema de coordenadas adaptáveis à fronteira, como o mostrado na Fig. 3, são as seguintes as etapas principais da metodologia:

- 1) Geração do sistema de coordenadas generalizadas
- 2) Transformação do sistema de equações governantes para o sistema  $\xi-\eta$
- 3) Obtenção das equações aproximadas para os volumes elementares
- 4) Solução dos sistemas de equações algébricas lineares

Basicamente, a solução numérica das equações de transporte utilizando coordenadas generalizadas envolve dois algoritmos principais; um para a geração do sistema de coordenadas e outro para a solução do problema físico propriamente dito. Os algoritmos podem ser completamente independentes um do outro, como é o caso em que a malha utilizada é fixa durante a solução do problema ou, com realimentação mútua, COMO NO CASO

das malhas adaptativas, que mudam ao longo da obtenção da solução com o objetivo de se obter maior resolução nas regiões onde os gradientes são elevados. Dentro dos objetivos de nosso trabalho destacaremos algumas questões importantes relacionadas aos algoritmos acima mencionados. Com relação as linhas coordenadas devemos considerar:

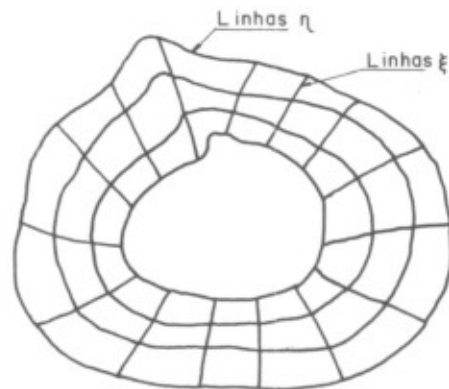


Fig. 3 - Sistema de coordenadas generalizadas.

- a) Os métodos de geração do sistema coordenado.
- b) A concentração das linhas coordenadas - malhas adaptativas.
- c) A forma das malhas - ortogonal, quasi-ortogonal e não ortogonal.

Relativamente ao algoritmo para a solução do problema físico outras questões devem ser consideradas. Dentre elas podemos destacar:

- a) A transformação das equações de conservação.
- b) O tratamento do acoplamento entre a pressão e a velocidade para escoamentos incompressíveis.
- c) A obtenção das funções de interpolação entre os pontos discretos.
- d) A localização das variáveis dependentes na malha.
- e) A sequência de solução das equações diferenciais.
- f) A solução do sistema de equações linearizadas.

A construção de um algoritmo estável e de boas características de convergência requer um exame cuidadoso de cada item, com o objetivo de minimização do tempo de computação. Alguns tópicos dos acima listados serão discutidos em conexão com o uso de coordenadas generalizadas.

#### GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

Nesta secção são descritas as peculiaridades relativas a geração do sistema de coordenadas coincidente com a fronteira. A maneira mais simples de geração é, obviamente, a manual, onde as coordenadas das intersecções das linhas coordenadas podem ser obtidas com o uso de uma mesa digitalizadora. Logicamente, não é este o método que se procura, primeiro, pelo excessivo tempo necessário para obtenção da discretização e, segundo, pela falta de possibilidade de automatização inerente ao método. O desafio é, portanto, a obtenção de métodos automáticos cujo tempo necessário para a geração da malha seja bastante pequeno comparado com o tempo necessário para a solução do sistema de equações diferenciais parciais. Além disto, o método deve permitir a concentração de linhas coordenadas em regiões predeterminadas do domínio. Características mais sofisticadas que podem ser exibidas pelos métodos podem ser ainda o controle no erro das aproximações devido ao espaçamento não uniforme das malhas, o controle para evitar a geração de malhas excessivamente distorcidas e a possibilidade de interagir com o problema físico para a geração de malhas adaptativas.

Basicamente, o sistema de coordenadas pode ser

obtido através de:

- Métodos algébricos
  - Mapeamento conforme
  - Solução de sistemas de equações diferenciais
- Conforme a Fig. 4, a obtenção das linhas coordenadas significa determinar a seguinte transformação

$$\xi = \xi(x, y) \quad (1)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (2)$$

que relacionam as coordenadas nos planos físico e transformado. Ou seja, conhecida a fronteira do domínio no plano físico o método de geração deve determinar a intersecção das linhas coordenadas, obtendo-se então a malha sobre a qual será resolvido o problema. Uma discussão detalhada dos métodos algébricos e daqueles que usam mapeamento conforme podem ser encontrada em [8] e [9]. Neste trabalho apenas os métodos que utilizam equações diferenciais elípticas são considerados, por representarem a grande maioria dos métodos atualmente existentes.

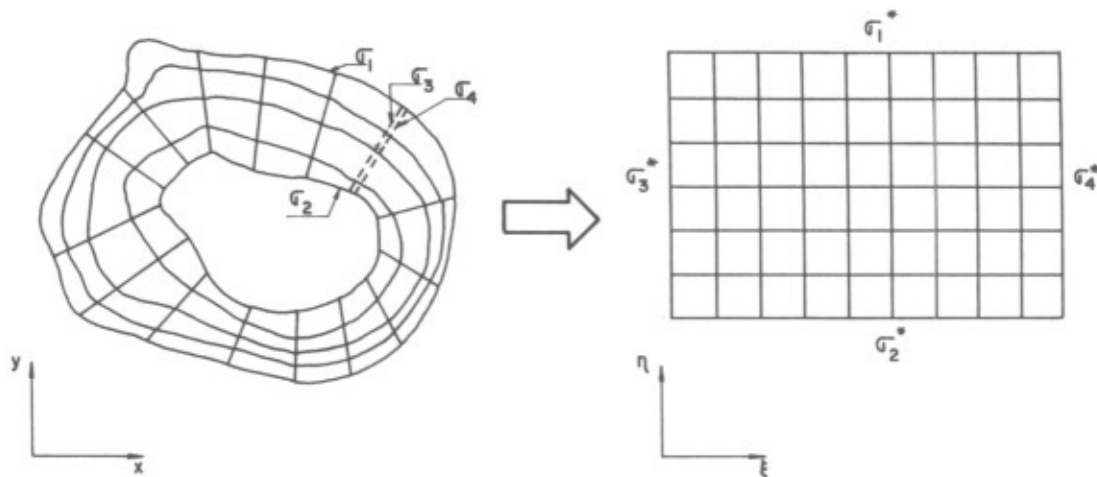
A motivação principal para a utilização de equações diferenciais elípticas na geração de coordenadas vem da física. Para tanto, considere-se o seguinte problema de transferência de calor por condução, definido na geometria mostrada nas Fig. 5a e 5b, respectivamente,

$$\nabla^2 T^1 = 0 \quad (3)$$

$$\nabla^2 T^2 = 0 \quad (4)$$

com as condições de contorno mostradas. A solução do problema dado pela Eq. (3) nos fornece as isoterms mostradas na Fig. 5a, enquanto que a solução da Eq. (4) fornece as isoterms mostradas na Fig. 5b. A superposição das duas soluções nos fornece uma malha sobre a qual qualquer outro problema físico pode ser resolvido.

Portanto, o sistema dado pelas Eqs. (3) e (4) é adequado para a geração de coordenadas. Se chamarmos  $T^1$  de  $\xi$  e  $T^2$  de  $\eta$  teremos o bastante conhecido sistema de equações elípticas [4] para a geração de sistemas coordenados



EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO ESCRITAS NO SISTEMA  $x - y$   $\Rightarrow$  EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO ESCRITAS NO SISTEMA  $\xi - \eta$

$\left[ \begin{array}{l} \text{EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO} \\ \text{ESCRITAS NO SISTEMA } \xi - \eta \end{array} \right. + \text{APROXIMAÇÕES} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{EQUAÇÕES APROXIMADAS} \\ \text{PARA OS VOLUMES} \\ \text{ELEMENTARES} \\ \text{(SISTEMAS DE EQS.} \\ \text{ALGÉBRICAS)} \end{array} \right.$

SOLUÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS  $\Rightarrow$  RESULTADOS

Fig. 4 - Plano físico e transformado

$$\nabla^2 \xi = 0 \quad (5)$$

$$\nabla^2 \eta = 0 \quad (6)$$

Caso seja necessário a concentração de linhas coordenadas, por exemplo, junto à parede DC, basta que na Eq. (4) seja adicionada uma geração de calor nos locais onde deseja-se que as isothermas  $T^2$  (ou linha coordenada  $\eta$ ) fiquem mais próximas. O mesmo vale para as isothermas  $T^1$  quando se deseja concentrá-las, por exemplo, para perto de AD. As Eqs. (5) e (6) tomam, então, a seguinte forma

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta) \quad (7)$$

$$\nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta) \quad (8)$$

onde P e Q são escolhidas de tal forma a produzir a concentração de coordenadas como desejado. O uso de P e Q iguais a zero, com condições de contorno de Neumann nos segmentos AD e BC, produz um adensamento de linhas coordenadas perto das regiões convexas da fronteira e uma menor concentração nas regiões côncavas. Valores negativos de P e Q concentram as linhas na direção daquelas de menor valor. Analisando novamente o problema como sendo um problema de condução de calor com geração térmica as afirmativas acima são facilmente explicadas. Detalhes referentes as funções mais utilizadas para produzir concentração de linhas coordenadas são encontradas em [8] [9].

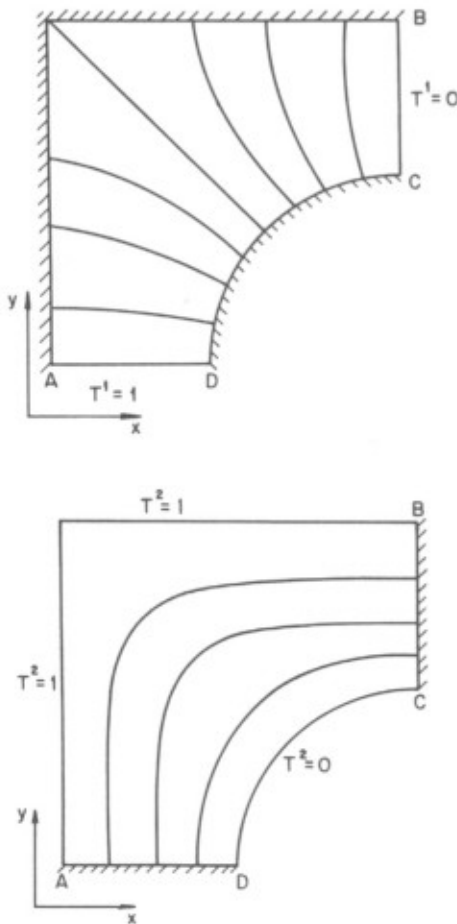


Fig. 5 - Geração do sistema de coordenadas.

A solução do sistema dado pelas Eqs. (7) e (8) deve ser obtida no sistema de coordenadas no qual o laplaciano está expresso. Normalmente este sistema é o cartesiano. Como a geometria é arbitrária (esta é a razão pela qual se deseja obter um sistema coincidente com a geometria) estamos de frente a dificuldade que estamos querendo evitar, ou seja, obter a solução de equações diferenciais evitando as interpolações de fronteira. A alternativa é transformar o sistema de equações do plano físico (x,y) para o plano computacional ( $\xi, \eta$ ). Esta transformação tornará as variáveis  $\xi$  e  $\eta$  independentes e x e y dependentes. As condições de contorno, que são aplicadas às variáveis dependentes, serão agora os valores de x e y que definem a geometria e, ao mesmo tempo, especificam as distribuições das linhas coordenadas ao longo das fronteiras. As equações transformadas são

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2}(P x_{\xi} + Q x_{\eta}) = 0 \quad (9)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2}(P y_{\xi} + Q y_{\eta}) = 0 \quad (10)$$

com as seguintes condições de contorno

$$x = f_1(\xi, \eta_1) \quad \text{em } \sigma_1^* \quad (11)$$

$$y = f_2(\xi, \eta_1) \quad \text{em } \sigma_1^*$$

$$x = g_1(\xi, \eta_2) \quad \text{em } \sigma_2^* \quad (12)$$

$$y = g_2(\xi, \eta_2) \quad \text{em } \sigma_2^*$$

As funções  $f_1, f_2, g_1$  e  $g_2$  são determinadas pela forma do domínio físico e pela distribuição desejada das linhas ao longo das fronteiras  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . No caso de um domínio duplamente conexo, conforme o mostrado na Fig. 2, não existe necessidade de especificar os valores de x e y ao longo de  $\sigma_3$  e  $\sigma_4$  por se tratar de uma condição de contorno do tipo repetitiva. Para o domínio simplesmente conexo a especificação de x e y em todas as fronteiras é necessário.

Utilizando as equações transformadas todo o trabalho computacional é realizado no plano transformado, tanto para gerar o sistema de coordenadas bem como para resolver o problema físico de interesse. O programa computacional assim desenvolvido é independente da geometria no plano físico. A solução das Eqs. (9) e (10), agora acopladas através dos coeficientes, é obtida numericamente. A discretização é realizada no plano computacional com um procedimento de solução iterativo. Os campos iniciais de x e y são de fundamental importância na convergência e no tempo de computação.

As Figs. 6, 7, 8 e 9 mostram exemplos de sistemas de coordenadas geradas com o uso das Eqs. (9) e (10). É importante comparar as Figs. 7 e 9 onde nota-se que a última é obtida com P e Q iguais a zero. A Fig. 6 também foi gerada com P e Q iguais a zero. Daí nota-se que o uso das equações de Laplace para geração das coordenadas não é suficiente para se obter boa discretização do domínio. A Fig. 10 mostra a malha obtida para um domínio duplamente conexo com o respectivo plano transformado na Fig. 11. Os segmentos AH e BC são coincidentes e portanto não existe necessidade de aplicar condições de contorno. O mesmo acontece ao longo de ED e FG. Para a malha mostrada os valores de x e y sobre este segmento foram fornecidos ao programa. Os valores de x e y ao longo de AB, CD, EF e GH definem a geometria no plano físico. Inúmeros outros arranjos podem ser criados para esta geometria. A adequação de cada sistema deve levar em consideração o problema físico que se pretende resolver.

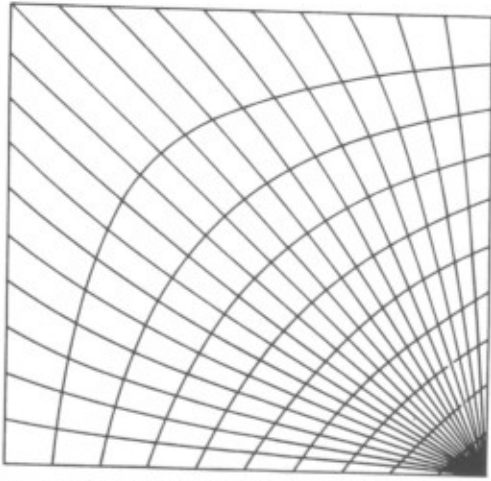


Fig. 6 - Coordenadas generalizadas com polo.

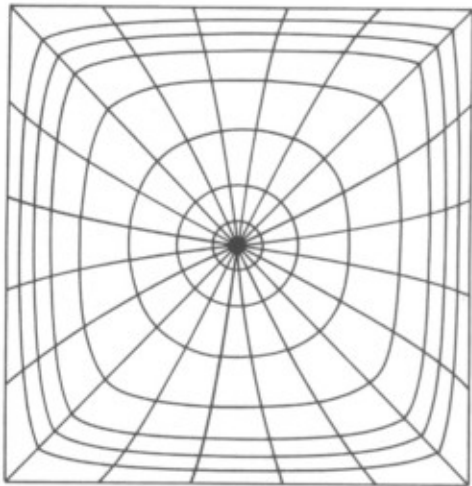


Fig. 7 - Coordenadas generalizadas com polo.

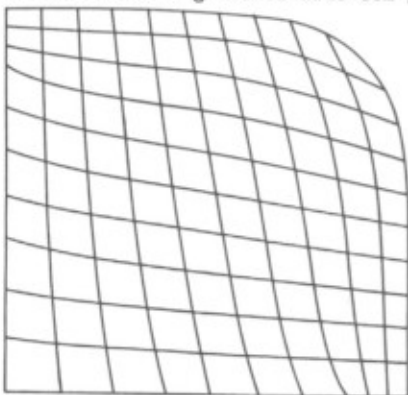


Fig. 8 - Coordenadas generalizadas sem polo.

Como um exemplo final a Fig. 12 mostra a discretização para resolver o problema dos gases na câmara de um motor rotativo, onde a geometria da câmara varia com o tempo [10]. Utilizando-se uma transformação do tipo

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \tau) \\ y &= y(\xi, \eta, \tau) \\ t &= \tau \end{aligned} \quad (13)$$

o plano de cálculo permanece inalterado.

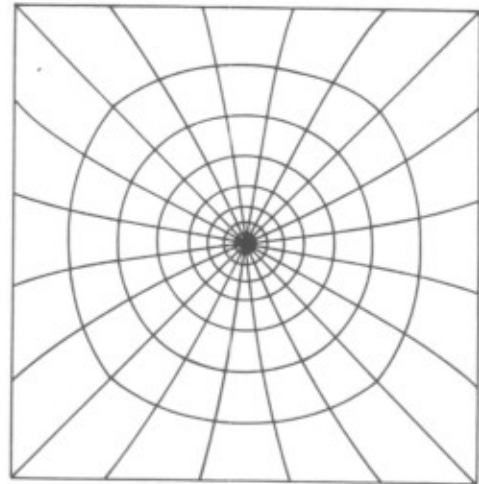


Fig. 9 - Coordenadas generalizadas sem atração.

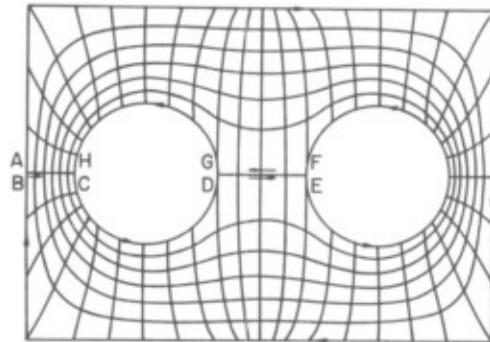


Fig. 10 - Discretização para uma geometria multiplamente conexa.

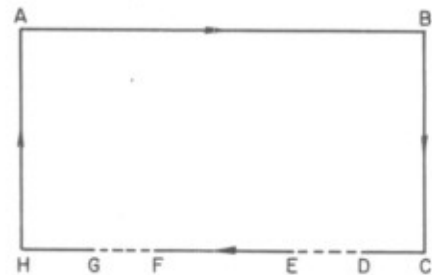


Fig. 11 - Plano transformado ref. a Fig.10.

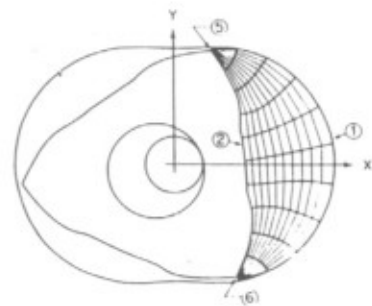


Fig. 12 - Discretização para o problema do escoamento em um motor rotativo.

Existem outros métodos para a geração de coordenadas que utilizam sistemas de equações diferenciais parabólicas e hiperbólicas. Uma discussão sobre o assunto pode ser encontrada em [9] onde também

um grande número de referências é citado.

Obtido o novo sistema de coordenadas é necessário agora transformar as equações de conservação do plano físico  $(x,y)$  para o plano computacional  $(\xi,\eta)$  onde as mesmas serão resolvidas numericamente. Este assunto é agora discutido.

#### TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

A equação abaixo, escrita no sistema de coordenadas cartesianas representa a conservação da massa, quantidade de movimento, energia, etc., em uma forma conservativa, para um fluido newtoniano e escoamento incompressível

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} + P^\phi = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} + S^\phi \quad (14)$$

onde

$$q = \rho\phi, E = \rho u\phi, F = \rho v\phi, G = \rho w\phi,$$

(15)

$$R = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}, S = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}, T = \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

A Eq. (14) representa a conservação da massa quando  $\phi = 1$  e  $P^\phi$  e  $S^\phi$  iguais a zero. As equações de conservação da quantidade de movimento nas três direções são obtidas quando  $\phi$  for feito igual a  $u, v$  ou  $w$  com os termos  $P^\phi$  e  $S^\phi$  apropriados e a equação da energia é recuperada quando  $\phi$  for igual a  $T$  com  $P^\phi$  igual a zero e  $S^\phi$  apropriado.  $\Gamma^\phi$  é o coeficiente de transporte e, para as equações do movimento é igual a viscosidade absoluta se o escoamento for laminar e igual a viscosidade efetiva se o escoamento for turbulento. Para a equação da energia  $\Gamma^\phi$  é igual a condutibilidade térmica dividida pelo calor específico. Com base na seguinte transformação de coordenadas

$$\xi = \xi(x,y,z)$$

$$\eta = \eta(x,y,z) \quad (16)$$

$$\Gamma = \Gamma(x,y,z)$$

a Eq. (14) toma a seguinte forma no sistema  $(\xi, \eta, \Gamma)$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \Gamma} + P^\phi = \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \eta} + \frac{\partial T}{\partial \Gamma} + S^\phi \quad (17)$$

onde

$$E = \frac{1}{J} [\xi_x E + \xi_y F + \xi_z G]$$

$$F = \frac{1}{J} [\eta_x E + \eta_y F + \eta_z G]$$

$$G = \frac{1}{J} [\Gamma_x E + \Gamma_y F + \Gamma_z G]$$

$$R = \frac{1}{J} [\xi_x R + \xi_y S + \xi_z T]$$

$$S = \frac{1}{J} [\eta_x R + \eta_y S + \eta_z T]$$

$$\hat{T} = \frac{1}{J} [\Gamma_x R + \Gamma_y S + \Gamma_z T]$$

$$\hat{q} = \frac{q}{J} \quad (18)$$

$$S^\phi = \frac{S^\phi}{J}$$

$$P^\phi = \frac{P^\phi}{J}$$

A Eq. (17) é obtida utilizando-se a regra da cadeia e, com alguns algebrismos, chega-se a forma conservativa no plano transformado [12][13]. A matriz Jacobiana da transformação é dada por

$$J = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \Gamma_x & \Gamma_y & \Gamma_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

cujos elementos da matriz são as métricas, e o determinante, o Jacobiano da transformação. Estas grandezas são necessárias nas equações transformadas. A matriz Jacobiana da transformação inversa é dada por

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\Gamma \\ y_\xi & y_\eta & y_\Gamma \\ z_\xi & z_\eta & z_\Gamma \end{bmatrix} \quad (20)$$

O Jacobiano  $J$ , da transformação, ou seja, o determinante da matriz dada por (19), está relacionado com o determinante  $(J^{-1})$  da matriz dada por

$$J = \frac{1}{J^{-1}} \quad (21)$$

É importante lembrar que a solução do sistema de equações dado pelas Eqs. (9) e (10) nos fornece os valores de  $x$  e  $y$  (e  $z$  caso seja tridimensional) e, portanto, nos permite calcular diretamente os elementos da matriz dada por (20). O Jacobiano é então determinado usando a Eq. (21).

Substituindo-se na Eq. (17) a variável dependente  $\phi$  pelas variáveis envolvidas é obtido o sistema de equações diferenciais no plano transformado. Para exemplificar considere-se um escoamento bidimensional incompressível com propriedades constantes. A Eq. (17) para esta situação resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho\phi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V\phi) + \frac{P^\phi}{J} =$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (C_{13} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_{42} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \xi} (C_{23} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_{54} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + S^\phi$$

onde

$$U = y_\eta u - x_\eta v \quad (23)$$

$$V = x_\xi v - y_\xi u \quad (24)$$

são as velocidades contravariantes sem normalização métrica. A velocidade  $U$  é normal às linhas de  $\xi$  constante e  $V$  normal às linhas de  $\eta$  constante, como pode ser visto nos termos convectivos da Eq. (22), onde  $\rho U$  e  $\rho V$  representam a massa por unidade de área que atravessam as fronteiras delimitadas por linhas  $\xi$  e  $\eta$  respectivamente, conforme Fig. 13. Os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4$  e  $C_5$  são os coeficientes de transporte transformados. Detalhes podem ser encontrados em [14].

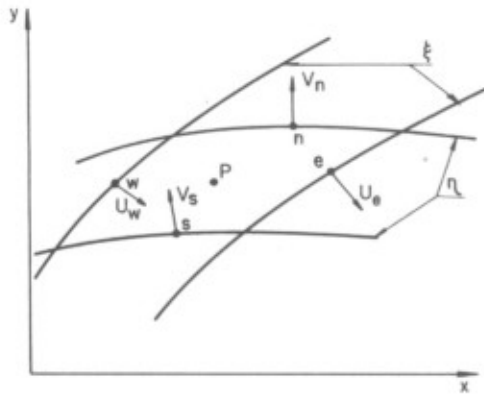


Fig. 13 - Volume elementar para a conservação da massa.

É importante observar que a Eq. (22) tem forma semelhante a Eq. (14), o que torna o procedimento da aproximação das equações em volumes finitos bastante semelhante para os dois sistemas coordenados. Dois detalhes importantes merecem destaque. Eles são relacionados ao gradiente de pressões transformado e as derivadas cruzadas dos termos difusivos, sublinhadas na Eq. (22). Estes assuntos serão discutidos posteriormente.

#### EQUAÇÕES APROXIMADAS

Na obtenção das equações aproximadas residem aspectos que serão fundamentais na estabilidade do algoritmo desenvolvido. Um deles diz respeito a localização relativa das variáveis dependentes na malha. A localização deve ser tal que seja possível computar os fluxos de massa, quantidade de movimento e energia, através das faces dos volumes elementares, sem a necessidade de interpolação das componentes do vetor velocidade. Ou seja, estas componentes devem estar localizadas onde elas são requeridas para a realização dos balanços [15]. Além disto, pressões e velocidades devem estar relativamente localizados para que a equação do movimento quando discretizada envolva o gradiente de pressão "gerador" da velocidade em questão [16].

Estes requisitos recomendam que o arranjo das variáveis na malha seja conforme mostrado na Fig. 14. Observa-se, portanto, que as componentes contravariantes do vetor velocidade devem ser localizadas no meio das faces de um volume elementar para a pressão. Uma discussão detalhada deste assunto é encontrada em [14] e [17], onde as implicações da não observação da recomendação acima são analisadas.

Um outro aspecto importante na obtenção das equações aproximadas diz respeito a satisfação dos princípios de conservação a nível de volumes elementares. É imperativo que os princípios de conservação da massa, quantidade de movimento, energia, etc. sejam satisfeitos não apenas globalmente, via condições de contorno, mas também localmente, a nível dos volumes finitos. Isto é conseguido obtendo-se as equações aproximadas através da realização de balanços nos volumes elementares e não por simples representação dos termos da equação diferencial por suas respectivas aproximações em diferenças finitas. Diferenças finitas centrais eram normalmente utilizadas com o objetivo de se obter aproximações de "segunda ordem". Este procedimento para obter as equações aproximadas é

puramente matemático e não introduz as características físicas específicas do fenômeno que se pretende modelar. Sabe-se, por exemplo, que em um problema onde



Fig. 14 - Arranjo das variáveis na malha.

a convecção é dominante a aproximação dos termos convectivos por diferenças centrais causa oscilações espaciais na solução. É lógico que reduzindo-se suficientemente o tamanho da malha as oscilações desaparecerão. Isto é, entretanto, muitas vezes proibitivo.

Com a realização dos balanços as condições de contorno ficam automaticamente satisfeitas. O nome volumes finitos que agora surge com frequência na literatura tem origem no método de obtenção das equações aproximadas.

Um terceiro aspecto relevante é a avaliação do valor e do valor da derivada da propriedade nas interfaces do volume do controle que a mesma representa. Por exemplo, a integração do termo convectivo e parte do difusivo na direção  $\xi$ , sobre o volume elementar centrado em P na Fig. 14, fornece

$$\int \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) d\xi d\eta = [(\rho U \phi)_e - (\rho U \phi)_w] \Delta \eta \quad (25)$$

$$\int \frac{\partial}{\partial \xi} (C \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) d\xi d\eta = [(C \frac{\partial \phi}{\partial \xi})_e - (C \frac{\partial \phi}{\partial \xi})_w] \Delta \eta \quad (26)$$

Como podemos observar é necessário avaliar os valores de  $\phi$  bem como seus gradientes. Note-se que, de acordo com a Fig. 14, os valores de  $\phi$  são conhecidos nos centros dos volumes elementares e, portanto, funções de interpolação devem ser assumidas entre os pontos nodais. O importante é assumir funções de acordo com a física do problema em questão. De uma maneira geral,  $\phi_e$ , por exemplo, pode ser aproximado por [19]

$$\phi_e = (\frac{1}{2} + \alpha_e) \phi_P + (\frac{1}{2} - \alpha_e) \phi_E \quad (27)$$

onde  $\alpha_e$  é um coeficiente que deverá variar no domínio em função do campo de velocidades. Verifica-se que se  $\alpha_e$  igual a zero a aproximação recai no caso particular da interpolação linear entre P e E. No momento basta dizer que  $\alpha_e$  dependerá da importância do processo convectivo comparado ao difusivo [20]. Para o fluxo difusivo da propriedade na face considerada valem os mesmos argumentos, agora considerando o coeficiente  $\beta_e$  [18]. Os mesmos comentários valem para as outras três faces do volume elementar.

Antes do encerramento desta seção é necessário tecer alguns comentários relativos a solução de problemas compressíveis e incompressíveis. Atualmente

pode-se agrupar os métodos que utilizam coordenadas generalizadas em duas grandes classes: aquela dos métodos desenvolvidos para escoamentos compressíveis supersônicos e aquela dos métodos incompressíveis. Os primeiros não apresentam o agravante da necessidade do estabelecimento de uma equação adicional para a pressão, já que a equação de estado serve como equação evolutiva para esta variável. Possuem, entretanto, o desafio da captura da onda de choque que deve ser feita com precisão devido aos altos gradientes de pressão e densidade existente na região do choque.

Conforme [21] a maioria dos métodos desenvolvidos para escoamentos supersônicos não são adequados à região transônica e subsônica. Recentemente esforços estão sendo dirigidos no sentido de se utilizar volumes finitos em conjunto com a metodologia usada para escoamentos incompressíveis (derivação de uma equação adicional para pressão) para criação de métodos que apresentem bom desempenho nos três regimes de velocidade [21]. Detalhes dos métodos existentes para tratamento de problemas incompressíveis podem ser vistos em [16], [21] e [22].

#### TÓPICOS IMPORTANTES

**Malhas adaptativas.** Um dos pré-requisitos, entre outros, que deve ser observado para que se tenha confiabilidade em uma solução numérica é que a mesma seja independente do tamanho da malha empregada. A obtenção da solução independente da malha pode se tornar computacionalmente proibitiva se a solução apresentar altos gradientes das variáveis envolvidas e o algoritmo não possuir a versatilidade de concentrar as linhas coordenadas apenas nestes locais. O resultado seria o domínio sendo discretizado excessivamente em locais não necessários com conseqüente aumento nos tempos de computação.

O uso de sistemas de coordenadas que se adaptam as fronteiras, obtidos com as soluções das Eqs. (7) e (8) ou similares, resolvem parcialmente o problema quando se conhece a priori e, aproximadamente, as regiões de altos gradientes. O manuseio adequado dos termos P e Q permitem concentrar as linhas coordenadas onde desejado. Quando, entretanto, não são conhecidas as regiões onde se localizam os gradientes elevados, como por exemplo em escoamentos com formação de ondas de choque, a concentração das linhas coordenadas deve ser feita com informações obtidas da própria solução. As malhas assim obtidas são chamadas de adaptativas e é hoje, provavelmente, juntamente com a geração de malhas tridimensionais, um dos mais importantes tópicos de pesquisa associado ao uso de coordenadas generalizadas. Os benefícios advindos do uso de malhas adaptativas refletem-se em dois itens principais: a precisão da solução e a estabilidade de convergência. O tempo total de computação não aumenta, obrigatoriamente, pela necessidade de adaptação da malha uma vez que as características de convergência podem ser melhoradas e, provavelmente, menos pontos serão necessários na obtenção da solução [9].

No processo de adaptação da malha é usual a utilização da medida do gradiente das variáveis para a determinação da nova posição dos pontos coordenados. Cuidados devem ser observados para evitar que um excessivo número de linhas seja concentrado em uma determinada região, deixando outras regiões sem um suficiente número de pontos. Além disto, a nova distribuição de pontos não deve dar origem a malhas excessivamente distorcidas ou com razão de variação do espaçamento entre as linhas (uniformidade da malha) muito elevada. Em outras palavras é necessário obter uma nova malha onde a combinação dos fatores adaptatividade, ortogonalidade e uniformidade deve ser otimizada. Os métodos variacionais são, portanto uma escolha lógica. Em [23] é desenvolvido um método para geração de malhas adaptativas onde um funcional, dado pela soma de três funcionais que levam em consideração os fatores acima, é minimizado. Por exemplo para maximizar a uniformidade da malha é apropriado minimizar o funcional [9]

$$I_s = \int \frac{g_{11} + g_{22}}{\sqrt{g}} d\xi d\eta \quad (28)$$

onde  $g_{ij}$  são as componentes do tensor métrico.

A componente  $g_{12}$  do tensor métrico da transformação está relacionada a não ortogonalidade. Portanto, é coerente minimizar a integral de  $g_{12}$  sobre o plano computacional para evitar a geração de malhas excessivamente distorcidas

$$I_o = \int g_{12}^2 d\xi d\eta \quad (29)$$

Finalmente, é necessário determinar uma função a ser minimizada que realize a concentração (adaptação) da malha nas regiões de interesse. Uma possibilidade é manter constante no domínio de cálculo o produto da área (volume em 3D) da célula, multiplicado por uma função  $w$  positiva. Como a área de cálculo é dada pelo Jacobiano isto é conseguido minimizando-se o funcional

$$I_w = \int w g d\xi d\eta \quad (30)$$

A função  $w$  contém a informação do problema físico podendo ser, por exemplo, o gradiente de uma determinada variável. Para escoamentos compressíveis com ondas de choque, por exemplo, o módulo do gradiente de pressão é uma escolha natural para a função  $w$ . Considerando os três fatores acima descritos na geração da malha a integral a ser minimizada é dada por

$$I = I_s + k_o I_o + k_w I_w \quad (31)$$

onde  $k_o$  e  $k_w$  representam a importância de cada um dos fatores, ortogonalidade e adaptatividade. Um valor de  $k_o$  elevado significa que prioridade é dada para a ortogonalidade da malha em detrimento de sua adaptatividade e uniformidade. As equações de Euler para o problema variacional dado pela Eq. (31) formam o sistema de equações diferenciais para a geração do sistema de coordenadas adaptativas.

É importante observar que as equações de Euler do problema variacional dado pela Eq. (28) resultam, exatamente, nas equações de Laplace para  $\xi$  e  $\eta$ , ou seja, exatamente as Eqs. (5) e (6), também utilizadas para a geração de coordenadas. Isto significa que as coordenadas assim geradas são maximizadas relativamente a uniformidade.

Em [24] é desenvolvida uma metodologia para a geração de malhas adaptativas ortogonais onde o funcional minimizado que proporciona a concentração das linhas é dado por

$$I = \int_R w(\xi, \eta) J^2 d\xi d\eta \quad (32)$$

onde  $w$  é a função peso associada ao gradiente da variável em questão dada por

$$w(\xi, \eta) = 1 + a \frac{|\nabla u|}{|\nabla u|_{\text{Max}}} \quad (33)$$



onde  $a$  é um parâmetro que determina o grau de concentração desejado. Para  $a$  igual a zero as linhas coordenadas não serão sensibilizadas pela variação de  $u$ . Para exemplificar seja a seguinte função  $u(x,y)$  definida no domínio  $[-2,2]$  e  $[0,4]$  [24]

$$u(x,y) = [\tanh 3(x-0.3y^2+1.5)]/2 \quad (34)$$

A malha adequada para a determinação numérica de  $u(x,y)$  está mostrada na Fig. 15.

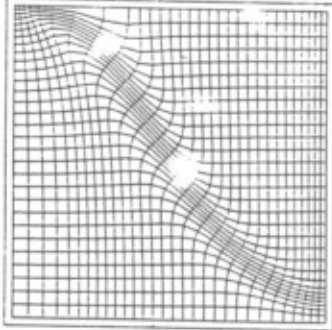


Fig. 15 - Exemplo de malha adaptativa [24]

Recentes resultados obtidos em problemas supersônicos com o uso de malhas adaptativas podem ser vistos em [25]. Detalhes referentes ao uso destas malhas podem ser encontrados também em [26], [27] e [28].

De acordo com os resultados publicados em recentes trabalhos [29] parece claro que o uso de coordenadas coincidentes com a geometria construídas fundamentadas no problema físico, é o caminho natural para se obter métodos computacionais gerais e de grande eficiência. O seguinte extrato de [9] deixa claro a idéia acima.

It has been noted by several authors that when the grid is right, most numerical solution methods work well. Oscillations associated with cell Reynolds numbers and shocks in fluid mechanics computations have been shown to be eliminated with adaptive grids. Even the numerical viscosity introduced by upwind differencing is reduced as the grid adapts to regions of large solution variation. The results obtained to date have indicated clearly that accurate numerical solution can be obtained when the grid points are properly located.

**Geração de malhas tri-dimensionais.** Na área de desenvolvimento de métodos numéricos em transferência de calor e mecânica dos fluidos, a solução das equações de Navier-Stokes completa em três dimensões é, sem dúvida, atualmente, o item que apresenta o maior desafio. Os grandes computadores hoje existentes já permitem obter soluções tri-dimensionais em configurações complexas em um tempo de computação aceitável. A discretização tri-dimensional necessária não é, entretanto, de fácil geração principalmente se as fronteiras do domínio de cálculo forem bastante irregulares. É, portanto, na solução de problemas tri-dimensionais definidos em geometrias irregulares, que o uso de coordenadas não ortogonais coincidentes com a fronteira se constitui em uma ferramenta extremamente poderosa.

A geração deste tipo de malha tem o mesmo procedimento daquele apresentado anteriormente, isto é, um sistema  $\xi, \eta, \Gamma$  pode ser gerado pela solução das seguintes equações elípticas

$$\nabla^2 \xi = P \quad (35)$$

$$\nabla^2 \eta = Q \quad (36)$$

$$\nabla^2 \Gamma = R \quad (37)$$

onde  $\nabla^2$  é o laplaciano em coordenadas cartesianas, caso se queira que o plano transformado seja um paralelepípedo. Quando a região não é excessivamente complicada a malha pode ser gerada em um único bloco. O domínio computacional é, então, também um paralelepípedo único. As variáveis de entrada para a geração da malha são as coordenadas  $(x,y,z)$  dos pontos nas 6 faces do paralelepípedo.

Quando a região a ser discretizada é bastante complexa a malha tri-dimensional pode ser gerada por blocos, onde cada bloco é um problema distinto, não sendo necessário então computadores de muito grande porte. As configurações das malhas em cada bloco podem ser independentes daquelas dos blocos vizinhos. A boa escolha dos blocos permite ainda resolver as equações com as simplificações que o problema físico permite em cada bloco. Por exemplo, o escoamento em torno de um corpo conforme mostrado na Fig. 16 pode ser resolvido considerando-se as equações elípticas no bloco 1 e parabólicas no bloco 2. Com as equações a serem resolvidas discretizadas em cada bloco a solução sobre o domínio completo pode ser obtida iterativamente sobre os blocos.

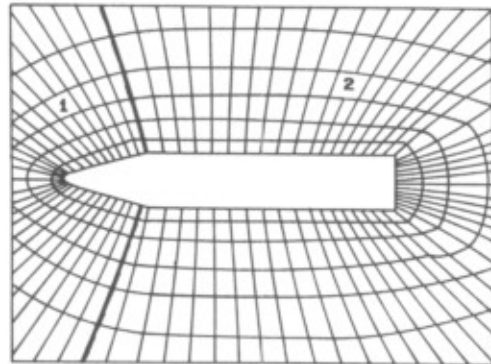


Fig. 16 - Malhas para sub-regiões.

Um exemplo de malhas obtidas em blocos pode ser visto na Fig. 17, com o correspondente domínio computacional na Fig. 18.

Um detalhe importante a ser observado durante a geração de malhas em bloco é a maneira como as informações serão transmitidas de bloco para bloco. Na utilização de volumes finitos cuidados devem ser tomados para que os fluxos das propriedades que deixam os volumes elementares de um bloco sejam os mesmos que entram no bloco vizinho. As referências [30] e [31] tratam da transferência de informações entre blocos, um assunto que merece estudos mais aprofundados. Métodos de geração destas malhas podem ser vistos em [32], [33], [34], [35] e [36].

Um aspecto importante em malhas tri-dimensionais é a sua visualização, pois isto permite que a malha seja adequadamente ajustada. A geração auxiliada por computador (GMAC), utilizando toda a potencialidade gráfica hoje disponível é, sem dúvida, o caminho que será seguido para a geração eficiente deste tipo de malha. As referências [34] e [11] exploram este assunto, discutindo desde a entrega da informação da geometria, passando pelo algoritmo de geração da malha, até a sua visualização. A interação com o usuário é privilegiada para que as alterações possam ser realizadas com facilidade. A obtenção de malhas não excessivamente distorcidas, principalmente nas

fronteiras, é um objetivo que deve ser também perseguido. A Fig. 19 mostra uma malha obtida utilizando GMAC [34].

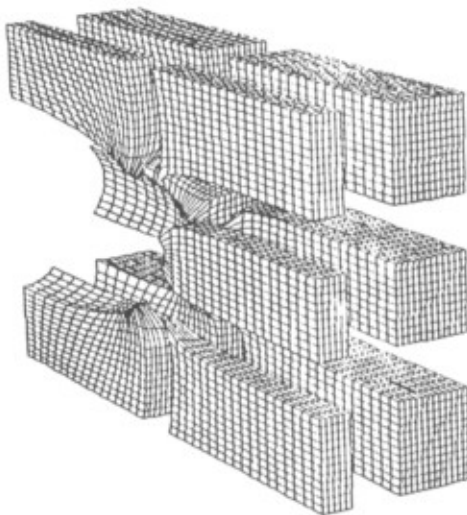
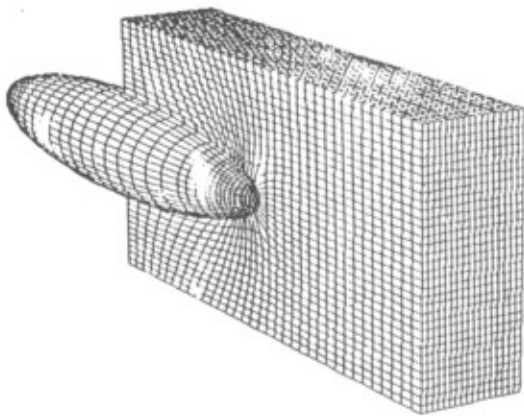


Fig. 17 - Malha tri-dimensional gerada por blocos.

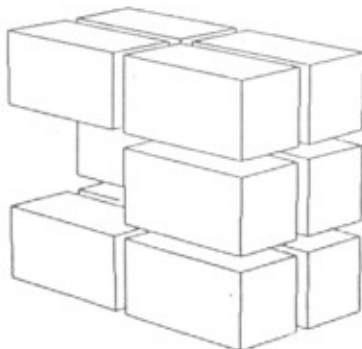


Fig. 18 - Plano transformado ref. a Fig. 17 [32]

#### CONSIDERAÇÕES GERAIS

Os assuntos até agora discutidos mostram que o uso de coordenadas coincidentes com a geometria é uma poderosa ferramenta para a solução de complexos problemas da mecânica dos fluidos. Em duas dimensões este sistema de coordenadas coincidentes poderá ser ortogonal ou não ortogonal, enquanto que para três dimensões é bastante complexa a geração de um sistema ortogonal. A utilização de uma discretização não ortogonal origina os termos sublinhados na Eq. (22), que também devem ser aproximados. Se os mesmos forem

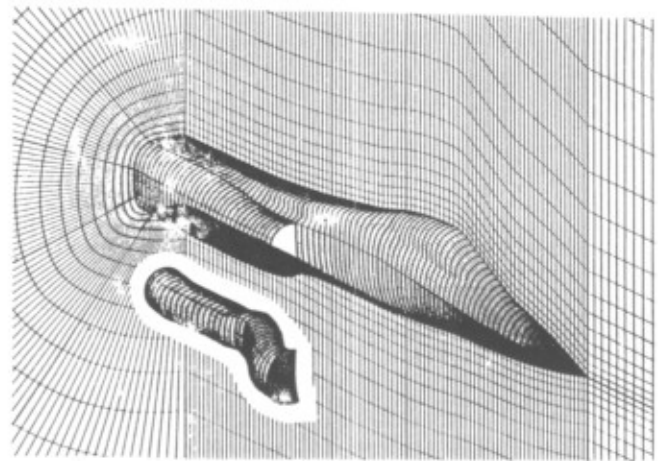


Fig. 19 - Exemplo de uma malha tri-dimensional obtida por GMAC [34]

bem aproximados os erros causados serão pequenos, caso contrário, serão elevados, semelhantemente ao que acontece com qualquer outro termo da equação diferencial parcial. É lógico que se os mesmos não existissem (grades ortogonais) não se possuiria a fonte de um possível erro de aproximação. Sua existência, por outro lado, não significa, obrigatoriamente, a introdução de um erro. Na opinião do autor não se pode afirmar que uma malha ortogonal origine, necessariamente, melhores resultados do que uma não ortogonal para o mesmo problema. O mais importante é a utilização uma malha adequada ao problema em questão.

Considere-se, como exemplo, a convecção natural em uma cavidade quadrada com as paredes horizontais isoladas sendo resolvida em uma malha ortogonal cartesiana e em uma malha não ortogonal do tipo mostrado na Fig. 7. Sabe-se que os efeitos da difusão numérica são elevados [37] [38] quando o vetor velocidade é oblíquo em relação aos eixos coordenados. A grade não ortogonal está claramente mais alinhada com o vetor velocidade do que a grade cartesiana. Será que os erros de aproximação dos termos não ortogonais, adicionados ao possível erro de difusão numérica pelo fato da malha não ser absolutamente alinhada, são maiores ou menores do que os erros causados pela difusão numérica na grade cartesiana?

É importante também lembrar que para geometrias bi-dimensionais é sempre possível gerar um sistema coordenado quasi-ortogonal adequado ao problema físico com pouco esforço [39]. Conforme relatado em [9] malhas que não se desviem exageradamente da ortogonalidade não apresentam problemas. Muito mais grave é a não uniformidade da malha (razão de variação do espaçamento entre as linhas coordenadas) acentuada. Este problema é, entretanto, comum a qualquer sistema de coordenadas, ortogonal ou não. Com base nisto, o que é significativo é a adequação da malha procurando alinhar o vetor velocidade com as linhas coordenadas.

É importante repetir que se for possível utilizar uma malha fisicamente consistente, respeitando a ortogonalidade e com a devida concentração de linhas coordenadas nas regiões de altos gradientes, esta deve ser a opção preferida. Os requisitos são, infelizmente, conflitantes pois a concentração de linhas coordenadas observando a geometria irregular e a ortogonalidade pode não ser uma tarefa fácil. O problema pode ser mais facilmente resolvido relaxando-se a condição de ortogonalidade mas, ao mesmo tempo, não permitindo excessiva distorção das malhas, principalmente nas fronteiras. Esta condição confere características de generalidade ao modelo numérico. Para que estas características estejam incorporadas é, logicamente, necessário que o método desenvolvido admita grades ortogonais bem como não ortogonais, onde o uso das primeiras constitui-se, então, em um caso particular para a metodologia [14].

Outro detalhe que deve ser discutido diz respeito ao tipo de conexão entre o volume P e seus vizinhos. A aproximação, já comentada, dos termos sublinhados na

Eq. (22) dão origem a um esquema numérico de nove pontos.

Uma recomendação é importante relativamente ao esquema de nove pontos, e ela refere-se ao método de solução do sistema linear de equações. Caso um método linha por linha seja utilizado é fundamental que os elementos dominantes estejam na linha de solução e não fora dela. Por exemplo se a linha que está sendo resolvida é uma linha de  $\eta$  constante os elementos em E e W devem dominar. O mesmo deve acontecer com os elementos N e S quando a solução varre uma linha  $\xi$ . Um problema detectado com alguns modelos generalizados de nove pontos é o fato de que quando a malha torna-se ortogonal o acoplamento entre o ponto P e seus vizinhos paralelos desaparecem ficando um forte acoplamento com os elementos das diagonais. Neste caso um método de solução linha por linha não pode ser empregado. A causa deste problema é a concepção errônea do algoritmo com relação a posição relativa das variáveis na malha [14]. Recomenda-se, portanto, que o modelo reduza-se a um de cinco pontos quando a malha utilizada é ortogonal, pois este permite que qualquer método convencional de solução de sistemas lineares possa ser utilizado sem problemas [14].

O autor e seus colegas utilizando um método generalizado desenvolvido em [17] resolveram problemas de convecção forçada e natural em dutos de secção transversal de forma arbitrária, convecção natural em cavidades bi-dimensionais simples e duplamente conexas de diversas formas, escoamentos confluentes com transferência de calor, região de entrada térmica e hidrodinâmica simultânea, condução bi-dimensional anisotrópica e heterogênea em geometrias arbitrárias, etc. Em todos estes problemas métodos de solução linha por linha ou ponto por ponto foram empregados. Ainda com relação a este assunto, é conveniente lembrar que em qualquer método numérico que, no processo de solução, não manter o vetor velocidade alinhado às coordenadas, a única maneira de evitar a difusão numérica é com a utilização de um esquema que envolve nove pontos [38]. Sob este aspecto os métodos generalizados já possuem uma estrutura onde facilmente podem ser incluídos métodos de minimização da difusão numérica.

#### CONCLUSÕES

Os assuntos discutidos neste trabalho demonstram que com o crescente desenvolvimento de métodos para a geração de malhas adequadas ao fenômeno físico, associados à construção de algoritmos mais robustos e, conseqüentemente, menos exigentes com relação a qualidade da malha, é possível desenvolver modelos numéricos bastante potentes para a solução dos mais diversos problemas. Uma característica importante é a possibilidade de explorar cada vez mais a generalidade da metodologia.

Com o também bastante acelerado progresso que se observa no uso de elementos finitos para a solução de problemas da mecânica dos fluidos, onde diversas dificuldades estão sendo paulatinamente resolvidas, parece-nos que esta metodologia e o método dos volumes finitos em coordenadas generalizadas terão um ponto de convergência em um futuro bastante breve. Isto é, ambas as técnicas apresentarão a generalidade e a potencialidade requerida.

Conforme já mencionado, as áreas onde os estudos mais se concentrarão no futuro são; geração de malhas tri-dimensionais, coordenadas adaptativas e estudos visando quantificar com precisão os erros causados pelo uso de malhas excessivamente distorcidas.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Donea, J., Recent advances in computational methods for steady and transient transport problems. Nuclear Engineering and Design, 80, pp. 141-162 (1984).
- [2] Winslow, A.M., Numerical solution of the quasi-linear Poisson equation in nonuniform triangle mesh. J. Comp. Phys., 2, pp. 149-172 (1967).
- [3] Chu, W.H., Development of a general finite difference approximation for a general domain, Part I: machine transformation, J. Comp. Phys., 8, pp. 392-408 (1971).
- [4] Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W., Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies, J. Comp. Phys., 15, pp. 299-319 (1974).
- [5] Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W., Boundary fitted curvilinear coordinate system for solution of partial differential equations on fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies. NASA Langley Research Center CR-2729, 1976
- [6] Baliga, B.R. and Patankar, S.V., A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer. Num. Heat Transfer, 6, pp. 245-261 (1983).
- [7] Schneider, G.E. and Zedan, M., Control volume based finite-element formulation of the heat conduction equation. AIAA paper 82-0909 (1982).
- [8] Thompson, J.F. and Warsi, Z.U.A., Boundary fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations. J. Comp. Phys., 47, pp. 1-108 (1982).
- [9] Thompson, J.F., Grid generation techniques in computational fluid dynamics. AIAA Journal, 22, N. 11, pp. 1505-1523 (1984).
- [10] Yang, S.-L. and Shih, T.I.-P., An algebraic grid generation technique for time-varying two-dimensional spatial domains. Int. J. for Num. Meth. in Fluids, 6, pp. 291-304 (1986).
- [11] Camarero, R. and Ozell, B., Computer aided grid design. in Num. Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, pp. 15-34, J. Hauser and C. Taylor, Eds., Pineridge Press (1986).
- [12] Viviand, H., Conservative forms of gas dynamic equations. La Recherche Aérospatiale, pp. 65-68 (1974).
- [13] Vinokur, M., Conservation equations of gas-dynamics in curvilinear systems. J. Comp. Phys., 14, pp. 105-125 (1974).
- [14] Maliska, C.R. and Raithby, G.D., A method for computing three-dimensional flows using non-orthogonal boundary-fitted coordinates, Int. J. for Num. Meth. in Fluids, 4, pp. 519-537 (1984).
- [15] Amsden, A.A. and Harlow, F.H., The SMAC method: a numerical technique for calculating incompressible fluid flow. Los Alamos Scientific Laboratory, LA-4370, 1970.
- [16] Patankar, S.V., Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere Publishing Corporation (1980).
- [17] Maliska, C.R., A solution method for three-dimensional parabolic fluid flow problems in nonorthogonal coordinates. Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canadá (1981).
- [18] Maliska, C.R., Volumes finitos para a solução de problemas que envolvem escoamento de fluidos. Mini-Curso - 8º Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 78 p, 1985.
- [19] Raithby, G.D. and Torrance, K.E., Upstream-weighted differencing schemes and their application to

elliptic problems involving fluid flow. Computer and Fluids, 2, pp. 191-296 (1974).

Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 319-328, Pineridge Press (1986).

- [20] Spalding, D.B., A novel finite-difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives, Int. J. Num. Meth. Eng., 4, pp. 551 (1972).
- [21] Van Doormaal, J.P., Numerical methods for the solution of incompressible and compressible fluid flows. Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada (1985).
- [22] Raithby, G.D. and Schneider, G.E., Numerical solution of problems in incompressible fluid flow: treatment of the velocity-pressure coupling. Num. Heat Transfer, 2, pp. 417-440 (1979).
- [23] Brackbill, J. and Saltzman, J., Adaptive zoning for singular problems in two-dimensions. J. Comp. Phys., 46, pp. 342-368 (1982).
- [24] Arina, E., Orthogonal grids with adaptive control. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 113-124, Pineridge Press (1986).
- [25] Venkatapathy, E., Palmer, G., Deiwert, G.S. and Lombard, C.K., An efficient adaptive patched grid gas dynamic solver for complex flows. AIAA paper 86-1288 (1986).
- [26] Thompson, J.F., Dynamically-adaptive grids in the numerical solution of partial differential equations. IFIP conference on PDE software, Soderkoping, Sweden, 1983.
- [27] Anderson, D.A., Constructing adaptive grids with Poisson grid generators. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 125-136, Pineridge Press (1986).
- [28] Eiseman, P.R., The creation of local clusters in arbitrarily given grids. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 137-152, Pineridge Press (1986).
- [29] Hauser, J. and Taylor, C., Eds, Numerical grid generation in computational fluid dynamics. Proceedings of the First International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, Landshut, West Germany, July (1986).
- [30] Mastin, C.W., Interface procedures for overlapping grids. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 227-245, Pineridge Press (1986).
- [31] Thompson, J.F., Composite grid generation for general 3D regions Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 271-290, Pineridge Press (1986).
- [32] Coleman, R.M. and Brabanski, M.L., Numerical grid generation for three-dimensional geometries using segmented computational regions. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 197-216, Pineridge Press (1986).
- [33] Boerstel, J.W., Problem and solution formulations for the generation of 3D block-structured grids. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 293-304, Pineridge Press (1986).
- [34] Seibert, W., An approach to the interactive generation of block-structured volume grids using computer graphics devices. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 319-328, Pineridge Press (1986).
- [35] Shaw, J., Forsey, C.R., Weatherill, N.P. and Rose, K.E., A block structured mesh generation technique for aerodynamic geometries. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 329-349, Pineridge Press (1986).
- [36] Sorenson, R.L., Elliptic generation of composite three-dimensional grids about realistic aircraft. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 353-371, Pineridge Press (1986).
- [37] Militzer, J. Dual plane parallel turbulent jets: the measurement and prediction of the mean velocity field. Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1977.
- [38] Raithby, G.D., Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. Comp Meth Applied Mech. Eng., 9, pp. 153-164.
- [39] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., Local effects of highly nonorthogonal grids in the solution of heat transfer problems in cusped corners. Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, J. Hauser and C. Taylor, Eds., pp. 679-690, Pineridge Press (1986).

#### ABSTRACT

The use of boundary fitted coordinates has become an efficient and powerful tool for the solution of fluid flow and heat transfer problems. The great attractiveness is the generality of the methodology, being possible to deal with arbitrary geometries using a unique computer code written for a fixed rectangular domain.

In this work the fundamental aspects of the methodology are addressed pointing out the topics which are nowadays receiving special attention of the numerical analysts.