

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO UTILIZANDO MALHAS DE VORONOI

FRANCISCO MARCONDES-Depto. Eng. Mecânica, UFPB-Campina Grande, PB
MÁRIO C. ZAMBALDI-Depto. Matemática, UFSC-Florianópolis, SC
CLOVIS R. MALISKA-Depto. Eng. Mecânica, UFSC-Florianópolis, SC

RESUMO

As técnicas numéricas largamente utilizadas em simulação de reservatórios de petróleo empregam, em geral, malhas cartesianas. Recentemente, esforços estão sendo realizados no sentido de desenvolver novas ferramentas as quais utilizem coordenadas generalizadas e malhas não estruturadas. O presente trabalho emprega malhas não estruturadas geradas de acordo com o princípio de Voronoi. A idéia global é desenvolver metodologias eficientes usando métodos adequados para a solução do sistema linear obtido do esquema numérico com malhas não estruturadas.

INTRODUÇÃO

A simulação numérica de reservatórios de petróleo é uma das principais ferramentas disponíveis ao engenheiro de petróleo para prever questões vitais de uma determinada bacia petrolífera, uma vez que por questões de localização da bacia, das dificuldades de escala e complexidade do problema real, é bastante improvável que respostas como vida útil do reservatório, capacidade de produção, etc., possam ser respondidas unicamente através de experimentos em laboratório.

As técnicas numéricas disponíveis dividem-se fundamentalmente em métodos baseados em balanços de componentes (volumes finitos), método das diferenças finitas e método de elementos finitos. Qualquer que seja a técnica numérica empregada é preciso que seja realizada uma discretização do domínio de cálculo. A discretização mais utilizada em simulação de reservatórios utilizando o método das diferenças finitas é a cartesiana, por facilitar a discretização dos termos de fluxo e gerar sistemas lineares mais simplificados (Yanosik e McCracken, 1979; Rubin e Blunt, 1991; Pinto, 1991). Entretanto, existem algumas dificuldades relacionadas com a sua utilização. Os resultados obtidos com malhas cartesianas utilizando esquemas de primeira ordem nas permeabilidades relativas dependem da orientação da malha em relação aos poços injetores e produtores. Outra dificuldade no uso de malhas cartesianas é a difícil representação de reservatórios com fronteiras arbitrárias e falhas geológicas.

O uso de malhas coincidentes com a fronteira contorna a dificuldade da representação de reservatórios com fronteiras complexas e permite também maior flexibilidade na representação de falhas geológicas ao longo do reservatório. Os primeiros trabalhos nesta linha utilizam coordenadas curvilíneas ortogonais (Fleming, 1987; Sharpe, 1993) que dá origem também à esquemas de esquemas de cinco pontos. A ortogonalidade é uma restrição à flexibilidade da malha e uma forma de eliminar esta limitação é trabalhar com coordenadas curvilíneas não ortogonais (Maliska et al., 1991; Maliska et al., 1993). Neste caso, o esquema numérico para o caso 2D passa a ser de 9 pontos, mas este fato deve-se unicamente aos termos cruzados do tensor métrico e não a uma melhor aproximação dos fluxos de massa nas fronteiras do volume de controle.

Pedroza e Aziz (1986) propuseram o uso de malhas híbridas, com uma combinação de malhas cilíndricas e cartesianas. A geometria cilíndrica é usada em volta de poços verticais e a cartesiana no restante do reservatório. Mais recentemente, Deimbacher e Heinemann (1993), Chien e Northrup (1993)

propuseram o uso de refinamento local dinâmico com a malha dentro dos subdomínios podendo ter geometrias diferentes da malha cartesiana global (restante do domínio).

Palagi (1992) propôs a utilização de malhas de Voronoi híbridas na solução de problemas de reservatório. A malha gerada utilizando o princípio de Voronoi dá origem a volumes de controle cujas faces são sempre ortogonais às retas que unem o ponto gerador do volume de controle em questão aos pontos dos volumes vizinhos. Isso, por sua vez, facilita a realização de balanços de massa, energia, etc. Obviamente que todos os tipos de malhas localmente ortogonais podem ser vistas como casos particulares de malhas de Voronoi (cartesianas, cilíndricas, coordenadas generalizadas ortogonais, etc). Como as diversas grades utilizadas em simulação de reservatório são casos especiais de malhas de Voronoi, Palagi (1992) propôs a combinação de módulos (cartesianos, cilíndricos, hexagonais ou irregulares) para a discretização do domínio. Observa-se, portanto, a tendência à generalização dos métodos em engenharia de petróleo.

Malhas não estruturadas tem uma grande vantagem sobre malhas estruturadas porque na maioria dos casos os problemas que se deseja resolver ocorrem em geometrias complexas. Trabalhando-se com malhas estruturadas nem sempre é possível resolver um determinado tipo de problema sem que se tenha que fazer uso de vários domínios, mesmo trabalhando-se com coordenadas generalizadas. Em malhas não estruturadas este problema não existe, e é também muito mais fácil a realização de refinamento local da malha. Entretanto, a matriz jacobiana além de ser esparsa, geralmente não tem nenhuma lei de formação. Neste trabalho apresenta-se resultados obtidos para o escoamento imiscível óleo/água em geometrias 2D, utilizando as grades de Voronoi híbridas. O programa utilizado para a geração dos diagramas de Voronoi foi desenvolvido por Maliska Jr (1993). A metodologia implementada é totalmente implícita e o sistema linear resultante é resolvido pelo método GMRES aplicado ao sistema preconditionado por um esquema de fatoração incompleta. Este trabalho faz parte de uma linha pesquisa cujo objetivo é a utilização de malhas não estruturadas aliada a solução eficiente dos sistemas lineares oriundos de seu emprego.

FORMULAÇÃO

Assumindo que exista somente duas fases imiscíveis no reservatório (óleo (o) e água (w)) e desprezando os efeitos de pressão capilar e gravitacional pode-se escrever a equação de conservação volumétrica para a fase p como,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_p}{B_p} \right) = \nabla \cdot [\lambda_p \nabla P] + q_p \quad (1)$$

onde ϕ é a porosidade e B_p é o fator de formação volumétrica da fase p . S_p é a saturação da fase p , P é a pressão dos fluidos presentes no reservatório e q_p é a vazão volumétrica nas condições de estocagem da fase p por unidade de volume do reservatório, positivo, para injeção e negativo para produção. λ_p é a mobilidade da fase p , definida por,

$$\lambda_p = K \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \quad (2)$$

onde K é a permeabilidade absoluta do meio, K_{rp} a permeabilidade relativa e μ_p a viscosidade, respectivamente, da fase p .

A Eq. (1) é válida para os duas fases presentes no reservatório. Escrevendo a mesma para as fases óleo e água constata-se que existem três incógnitas (S_w , S_o e P) e apenas duas equações. A equação para o fechamento do problema vem da restrição volumétrica.

$$S_w + S_o = 1 \quad (3)$$

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

A Fig. 1 apresenta um volume de controle de Voronoi. O ponto i é o ponto gerador e os pontos j 's seus vizinhos. Para cada ponto j é possível alinhar um sistema cartesiano local x' - y' de tal forma que o eixo x' (linha que une o ponto i ao ponto j) seja perpendicular a face do volume de controle e o eixo y' paralelo a esta face.

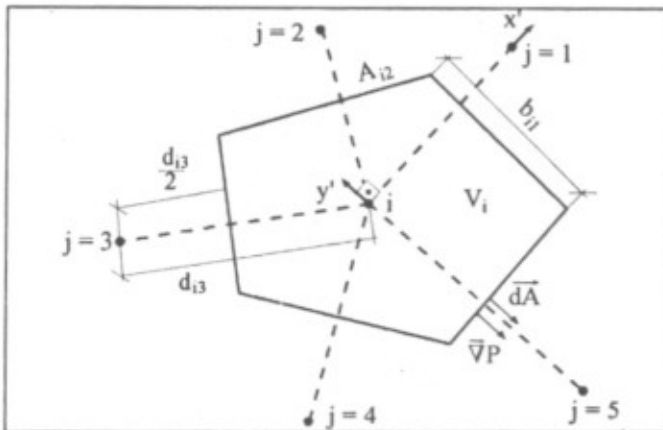


Fig. 1 - Volume de controle de Voronoi

A Eq. (1) será integrada no volume de controle e no tempo,

$$\iint_{V_i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_p}{B_p} \right) dV dt = \iint_{V_i} \nabla \cdot [\lambda_p \nabla P] dV dt + \iint_{V_i} q_p dV dt \quad (4)$$

Para a integração da Eq. (4) é assumido que o fluxo convectivo através de cada face ij do volume de controle i é constante. Uma vez que o sistema cartesiano local x' - y' é perpendicular a cada face do volume de controle, o cálculo do primeiro termo no lado direito da Eq. (4) é bastante facilitado. Para cada face ij , o gradiente irá depender unicamente dos valores de P nestes pontos. Fazendo uso do teorema da divergência, realizando

as integrações da Eq. (4) e representando $t + \Delta t$ por $n + 1$, tem-se

$$\left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n = \sum_{j=1}^{N_i} T_{ij} \lambda_{p,ij} (P_{pj}^{n+1} - P_i^{n+1}) + \bar{q}_p^{n+1} \quad (5)$$

Da Eq. (5) pode-se ver que tem-se uma metodologia totalmente implícita uma vez que na Eq. (5) existem termos (mobilidades e fator volumétrico, por exemplo que dependem das incógnitas do problema (S_p e P)). \bar{q}_p é a vazão volumétrica da fase p nas condições de estocagem e N_i , o número de vizinhos do volume i . O termo T_{ij} na Eq. (6) é conhecido como fator de transmissibilidade, e é o produto de fatores geométricos e da permeabilidade absoluta, dado por

$$T_{ij} = \left(\frac{b h f_c K}{d} \right)_{ij} \quad (6)$$

onde h e b são a altura e largura da face ij , respectivamente. f_c é uma correção a ser aplicada para as malhas radiais em volta de poços verticais, de modo a tornar o esquema de discretização cilíndrico em volta do poço.

O sistema de equações é resolvido iterativamente usando o método de Newton. A forma residual da equação de conservação do componente p para o volume i é

$$R_{pj} = \sum_{j=1}^{N_i} T_{ij} \left(\frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \right)_{ij} (P_j^{n+1} - P_i^{n+1}) + \bar{q}_{pj}^{n+1} - \left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} + \left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n; p = o, w \quad (7)$$

Expandindo o residuo em série de Taylor, tem-se

$$R_{pj}^{n+1} = R_{pj}^v + \sum_{vX} \left(\frac{\partial R_{pj}}{\partial X} \right)^v \Delta X \quad (8)$$

onde v é o nível iterativo e X representa as incógnitas (P e S_w). Assumindo-se que o residuo na iteração $v + 1$ é zero, tem-se

$$\sum_{vX} \left(\frac{\partial R_{pj}}{\partial X} \right)^v \Delta X^{v+1} = -R_{pj}^v; p = o, w \quad (9)$$

As incógnitas (P e S_w) são calculados após cada iteração newtoniana, como

$$X^{v+1} = X^v + \Delta X^{v+1} \quad (10)$$

e a solução é aceita quando todas as tolerâncias são satisfeitas, de acordo com

$$\begin{aligned} \Delta P_{o,max}^{v+1} &\leq \Delta P_{o,max}^* \\ \Delta S_{w,max}^{v+1} &\leq \Delta S_{w,max}^* \end{aligned} \quad (11)$$

SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

Para resolução do sistema de linear, usou-se o método GMRES (Generalized Minimal Residual Algorithm), introduzido por Saad e Schultz (1986), e faz parte de uma classe de métodos (ORTHOMIN, ORTHODIR, ORTHORES, GCR) obtidos por generalização do método dos Gradientes Conjugados clássico. Para simplificar a notação, considere que o sistema linear newtoniano seja dado por

$$Jx = f \quad (12)$$

onde J representa a matriz jacobiana, x o vetor solução e f a função residuo. Para resolver o sistema dado pela Eq. (12), busca-se a solução aproximada x_k da forma $x_k = x_p + z_k$, onde x_p é a aproximação inicial e z_k pertence ao subespaço de Krylov: $K_k = \{ r_p, J r_p, \dots, J^{k-1} r_p \}$, com $r_p = f - Jx_p$. O método consiste em gerar uma base ortogonal de K_k e minimizar a norma do residuo neste subespaço.

O processo de ortogonalização não pode ser completo quando considera-se sistemas de grande dimensão. Neste sentido, a cada m iterações o processo deve ter um novo recomeço, dando origem a versão GMRES(m), onde m é um número inteiro.

Uma característica básica dos métodos iterativos é a utilização de preconditionadores, que são empregados para acelerar a convergência do método. A maioria dos preconditionadores usados em esquemas numéricos são aqueles baseados em fatoração LU incompleta (Behie e Vinsome, 1982; Behie e Forsyth, 1984). Neste trabalho usa-se como preconditionador a fatoração incompleta dada pela fatoração da matriz jacobiana simplificada. Isto é feito selecionando um certo número de diagonais principais. Designa-se a matriz de preconditionamento por M .

Algoritmo GMRES. Dado o vetor aproximação inicial x_p e a matriz de preconditionamento M , faça

passo 1 - Inicialização

$$r_p = M^{-1}(f - Jx_p) \text{ e } v_1 = r_p / |r_p|$$

Passo 2 - Ortogonalização

para $j=1, \dots, m$

$$w_j = M J v_j$$

$$u_{ij} = (w_j, v_i), \quad i=1, \dots, j$$

$$w_j = w_j - \sum_{i=1}^j u_{ij} v_i$$

$$u_{j+1,j} = |w_j|$$

$$v_{j+1} = w_j / u_{j+1,j}$$

Passo 3 - Solução corrente

$$x_m = x_p + V_m y_m, \text{ onde } y_m = \min | \beta e_1 - U_m y | \text{ e } \beta = |r_p|$$

Passo 4 - recomeço

$$r_m = M^{-1}(f - Jx_m)$$

$$\text{se } |r_m| < \text{TOL pare}$$

senão

$$x_p = x_m \text{ e } v_1 = r_m / |r_m| \text{ vá para passo 2}$$

O passo 2 do algoritmo é crítico, pois aí está envolvido o maior esforço computacional. Também, para obter melhor estabilidade numérica e uma taxa de convergência mais rápida, foi usado esquema de Gram-Schmidt modificado. No algoritmo acima, e_1 é o vetor canônico de $n+1$ componentes, TOL é tolerância, $V_m = [v_1, \dots, v_m]$ e U_m é uma matriz de ordem $(m+1) \times m$ do tipo Hessenberg, obtida pelos elementos u_{ij} gerados no algoritmo.

RESULTADOS

Com o intuito de validar a metodologia utilizada são apresentados alguns resultados obtidos para a configuração de cinco poços e comparados com aqueles obtidos por Palagi (1992). A Fig. 2 apresenta uma malha hexagonal híbrida com 445 volumes, bastante similar à utilizada por Palagi, (1992).

Os dados físicos e geométricos para a geração dos resultados que são apresentados a seguir para a malha da Fig. 2 são listados na Tab. 1. Foram simulados dois casos para o problema proposto por Palagi (1992). As curvas de permeabilidade relativa para o escoamento são dadas pela Eq. (13). A Fig. 3 apresenta os resultados obtidos para duas razões de mobilidades 10 e 50, respectivamente. Pode-se observar que os resultados obtidos estão coerentes com aqueles de Palagi (1992).

$$\begin{aligned} K_{rw} &= S_w^2 \\ K_{ro} &= (1 - S_w)^2 \\ M &= \mu_o / \mu_w \end{aligned} \quad (13)$$

Tab. 1 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 1

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$K=12,5 \times 10^{15} \text{ m}^2$ $h=6,09 \text{ m}$ $A=1,6 \times 10^5 \text{ m}^2$ $\phi=0,08$	$S_i=0$ $P_i=6,893 \times 10^5 \text{ Pa}$	$\mu_o=10^{-3} \text{ Pa.s}$ $\mu_w=1/M \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$ $ \bar{q}_p = \bar{q}_i =1,110^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $c_o=c_w=1,45 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$

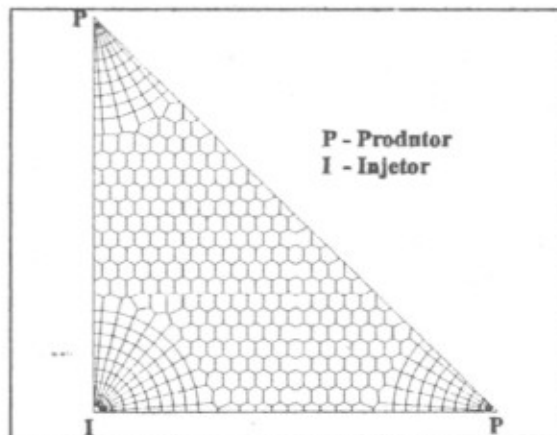


Fig. 2 - Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes

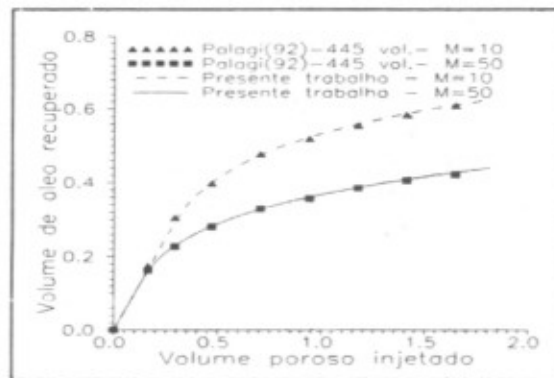


Fig. 3 - Malha hexagonal-híbrida - M=10, M=50

Para demonstrar o potencial da metodologia empregada na representação de geometrias complexas são agora apresentados resultados obtidos para uma configuração mais próxima daquelas encontradas em recuperação de petróleo. A configuração é composta de 8 (oito) poços, sendo que 6 (seis) são poços produtores e 2 (dois) injetores. Os resultados que serão apresentados a seguir foram reproduzidos com duas malhas hexagonais híbridas, com 804 e 1024 volumes, respectivamente. A malha mais refinada tem 16 volumes ao longo do ângulo de abertura de cada poço e 12 a mais grosseira. A Fig. 4 mostra a malha mais refinada. Os dados físicos e geométricos estão listados na Tab. 2 e as curvas de permeabilidade relativa e viscosidades são dados na Eq. (14), todos no SI.

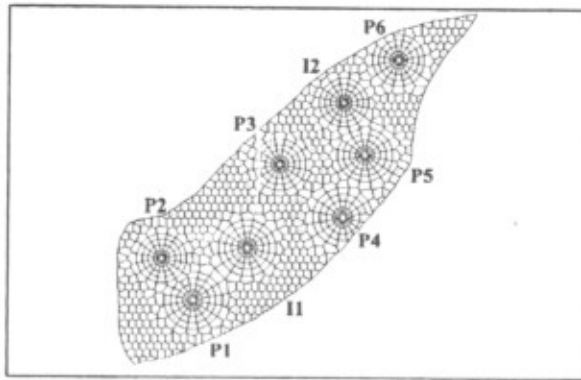


Fig. 4 - Malha hexagonal híbrida com 1026 volumes

$$\begin{aligned}
 K_{rw} &= (S - 0.2)(-250S^2 + 32S - 55) \\
 K_{fo} &= 1 - k_{rw} \\
 \mu_w &= 10^{-3}(1 + 1.45^{-12}(P - 1.37 \cdot 10^7)) \\
 \mu_o &= 1.1163 \cdot 10^{-2}(1 + 1.45^{-12}(P - 1.37 \cdot 10^7))
 \end{aligned}
 \quad (14)$$

Tab. 2 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 2

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$K=3 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ $h = 15 \text{ m}$ $A = 1,82 \times 10^6 \text{ m}^2$ $\phi = 0,30$	$S_i = 0,3$ $P_i = 2,413 \times 10^7 \text{ Pa}$	$\bar{q}_{p1} = \bar{q}_{p3} = -9,210^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p2} = -1,110^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p4} = -5,5210^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p5} = \bar{q}_{p6} = -7,3610^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i1} = 2,9410^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i2} = 2,02410^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $c_o = c_w = 7,25 \times 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$

A Fig. 5 apresenta as curvas de volume de óleo recuperado no poços 1, 3 e 5. Pode-se observar que os resultados obtidos são independentes das malhas utilizadas e que o volume de óleo recuperado é muito inferior com aqueles apresentados na Fig. 3 para a configuração de cinco poços.

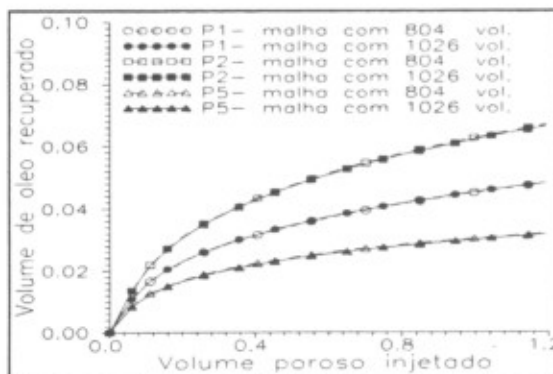


Fig. 5 - Malha hexagonal-híbrida com 1026 volumes

CONCLUSÕES

Os resultados obtidos mostram a potencialidade da metodologia e sugerem que mais investigação seja realizada no sentido de tornar os sistemas lineares oriundos da utilização deste tipo de discretização mais facilmente resolvíveis. O uso de malhas de Voronoi, em função de suas características geométricas contribui também para diminuir a difusão numérica sem a utilização de esquemas de interpolação complexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- # Behie, G. A. e Forsyth, Jr., P. A.: "Incomplete Factorization Methods for Fully Implicit Simulation of Enhanced Oil Recovery", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 5, Nº 3, Sept. 1984.
- # Behie, A. e Vinsome, P. K. W.: "Block Iterative Methods for Fully Implicit Reservoir Simulation", *Soc. Pet. Eng. J.*, 22, 1982.
- # Chien, M. C. H. e Northrup, E. J.: "Vetorization and Parallel Processing of Local Grid Refinement and Adaptive Implicit Schemes in a General Purpose Reservoir Simulation", *SPE 25258, 12th Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, Feb. 28-Mar. 3, 1983.
- # Deimbacher, F. X. e Heinemann, Z. E.: "Time-Dependent Incorporation of Locally Irregular Grids in Large Reservoir Simulation Models", *SPE 25260, 12th Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, Feb. 28 - Mar. 3, 1993.
- # Fleming, G. C.: "Modeling the Performance of Fractured Wells in Pattern Floods Using Orthogonal, Curvilinear Grids", *SPE 16973, SPE Annual Technical Conference and Exhibition*, Dallas, Sep. 27-30, 1987.
- # Maliska, Jr., C. R.: "Um Robusto Gerador de Diagramas de Voronoi para Discretização de Domínios Irregulares", XIV CILAMCE - São Paulo, SP, Dezembro, 1993.
- # Maliska, C. R., Silva, A. F. C., Cunha, A. R. e Livramento M. A.: "Desenvolvimento de um Simulador 3D Black-Oil em Coordenadas Curvilíneas Generalizadas", Relatório preparado para o CENPES/PETROBRÁS S.A., parte II, Dezembro, 1993.
- # Maliska, C. R., Silva, A.F.C., Marcondes, F., Lopes, M.N.C. e Cunha, A. R.: "Solução Numérica do Problema Monofásico com Traçador", Relatório preparado para o CENPES/PETROBRÁS S. A., Parte I, Setembro, 1991.
- # Palagi, C.: "Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs", PhD dissertation, Stanford University, Stanford (May, 1992).
- # Pedrosa, O. A. e Aziz, K.: "Use of a Hybrid Grid in Reservoir Simulation", *SPERE* (Nov. 1986), 611-621.
- # Pinto, A. C. C.: "Esquemas de Alta Resolução Para Controle de Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios", São Paulo, UNICAMP, nov. 1991, 206 p. Dissertação de Mestrado.
- # Rubin, B. e Blunt, M. J.: "High-Order Implicit Flux Limiting Schemes for Black-Oil Simulating", *SPE 21222, 11th SPE Symposium on Reservoir Simulation*, Anaheim, Feb. 17-20, 1991.
- # Saad, Y. e Schultz, M. H.: "GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Compt.*, Vol. 7, Nº 3, July, 1986.
- # Sharpe, H. N.: "Validação of an Adaptive, Orthogonal, Curvilinear Gridding Procedure for Reservoir Simulation", *SPE 25262, 12th SPE Symposium on Reservoir Simulation*, New Orleans, February 28- March 3, 1993.
- # Yanosik, J. L., e McCracken, T. A.: "A Nine-Point Finite-Difference Reservoir Simulator for Realistic Prediction of Unfavorable Mobility Ratio Displacements", *Soc. Pet. Eng. J.*, 18 (1979), pp. 253-262.

ABSTRACT

The numerical techniques widely used in petroleum reservoir simulation employ, in general, cartesian grids. Recently, efforts are being done in order to develop new tools which use curvilinear boundary-fitted and unstructured grids. The present work uses unstructured meshes generated following the Voronoi definition. The global idea is to develop efficient methodologies using suitable methods for the solution of the linear-system obtained with unstructured grids.