

- 2 Spalding, D.B., A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives, Int. Journal Num. Meth. Eng., 4, pp. 551-559, 1972.
- 3 Raithby, G.D. and Torrance, K.E., Upstream-Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computers and Fluids, 2, pp. 191-206, 1974.
- 4 Raithby, G.D., Prediction of Dispersion by Surface Discharge, Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario Canada, 1976.
- 5 Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Cooperation, Washington, DC., USA, 1980.
- 6 Raithby, G.D., Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, Comp. Meth. Applied Mech. Eng., 9, pp. 153-164, 1976.
- 7 Leonard, B.P., A Survey of Finite Differences of Opinion on Numerical Muddling of the Incomprehensible Defective Confusion Equation, in T.J.R. Hughes (ed.), Proc. Symp. Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, ASME Winter Ann. Mtg., New York, pp. 1-17, 1979.
- 8 Leonard, B.P., A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 19, pp. 59-98, 1979.
- 9 Hassan, Y.A., Rice, J.G. and Kim, J.H., A Stable Mass-Flow-Weighted Two-Dimensional Skew Upwind Scheme, Numer. Heat Transfer, 6, N^o 4, pp. 395-408, 1983.
- 10 Hughes, T.J.R., and Brooks, A., A Multi-Dimensional Upwind Scheme with No Crosswind Diffusion, in T.J. Hughes (ed.), Proc. Symposium Finite Element Methods for Convection Dominate Flows, ASME Winter Ann. Mtg., New York, pp. 19-35, 1979.
- 11 Ballga, B.R., Pham, T.T. and Patankar, S.V., Solution of Some Two-Dimensional Incompressible Fluid Flow and Heat Transfer Problems, Using a Control Volume Finite Element Method, Numer. Heat Transfer, 6, N^o 3, pp. 263-282, 1983.
- 12 Patel, M.K., Markatos, N.C. and Cross, M., Method of Reducing False-Diffusion Errors in Convection-Diffusion Problems, Technical Note, Appl. Math. Modelling, 9, pp. 302-306, 1985.
- 13 Peric, M. Kessler, R. Scheuerer, G., Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids, Submitted to Computers and Fluids, # 87-114, 1987.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONVECÇÃO FORÇADA EM UMA CAVIDADE
COM ENTRADA E SAÍDA DE MASSA

S.M.A.G. Ulson de Souza*, A.A. Ulson de Souza*, C.R. Maliska*

* UFSC, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil

RESUMO

Neste trabalho é apresentada a solução obtida pela utilização do método de volumes finitos do problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada, com a imposição de um termo fonte na equação da conservação de quantidade de movimento, com entrada e saída de massa. Na literatura, é apresentada a solução analítica deste problema sendo utilizada para confrontação com os resultados numéricos obtidos.

1. INTRODUÇÃO

A maioria dos métodos numéricos pode ser derivada do método de resíduos ponderados. O método de diferenças finitas [1,2] resulta quando a função peso escolhida é a função delta, centrada no ponto P. O método clássico de elementos finitos de Galerkin [3,4,5] utiliza, como função peso, as funções tentativas do problema. O método de volumes finitos [1,2,6,7] utiliza a função peso unitária para o volume de controle centrado em P e nula para o restante do domínio de integração. Desde que os métodos discretos mais empregados diferem somente na escolha da função peso e desde que nenhum único peso fornecerá sempre valores das variáveis mais precisos ou equações mais fáceis para solução, pode dizer-se que nenhum método discreto é inerentemente superior a outro [8].

A minimização do resíduo, no método de volumes finitos, é equivalente a satisfazer o balanço de conservação das variáveis do problema sobre cada volume de controle. Quando não ocorrer sobreposição do volume de controle com seus vizinhos, será fácil criar um conjunto de equações discretas que satisfaçam o balanço global de conservação. A garantia de que os princípios de conservação serão satisfeitos, a nível elementar e global, é que torna o método de volumes finitos atrativo. Além disto, provavelmente, o grande impulso observado no desenvolvimento de métodos numéricos, para solução de problemas que envolvem escoamento de fluidos, aconteceu quando a concepção dos algoritmos começou a ser fundamentada na fenomenologia física do problema em questão. As dificuldades associadas ao acoplamento e às não linearidades das equações foram sempre alvo dos trabalhos dos pesquisadores, o que ocasionou um grande avanço na área.

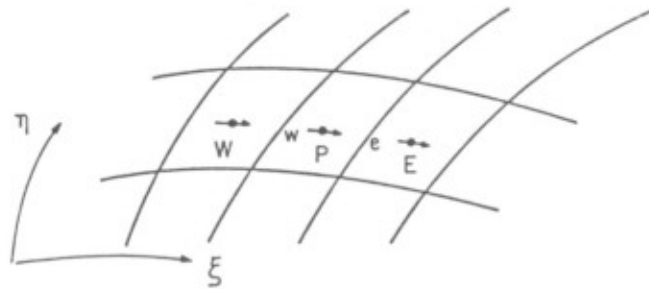
2. ARRANJO DE VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS VERSUS DESENCONTRADAS

A importância da escolha adequada da disposição das variáveis na malha computacional deve ser enfatizada devido às consequências desta escolha na forma das equações discretizadas, facilidade e precisão de solução. Um estudo das alternativas de localização das variáveis dependentes na malha, para sistemas de coordenadas generalizadas, pode ser encontrado nos trabalhos de Maliska [7], de Shih, Tan e Hwang [9] e, mais recentemente, no trabalho de Silva [10].

A FIGURA 1a apresenta a configuração de variáveis co-localizadas ("colocated"), onde todas as variáveis dependentes estão armazenadas no mesmo ponto, possuindo todas o mesmo volume elementar, enquanto que, na FIGURA 1b, é mostrado o arranjo de variáveis desencontradas ("staggered"), onde as componentes da velocidade estão defasadas em relação a outras variáveis do

problema ($P, T, \rho, \mu, \text{etc.}$).

Com a grande divulgação do livro de Patankar [2], o arranjo de variáveis desencontradas foi amplamente difundido e é muito empregado atualmente nos códigos computacionais desenvolvidos para solução de problemas de transferência de calor, quase sempre associados a escoamentos de fluidos incompressíveis. O arranjo de variáveis co-localizadas, por sua vez, começa a receber bastante atenção dos pesquisadores devido a sua simplicidade. As dificuldades associadas ao mesmo estão sendo paulatinamente resolvidas.



a) Arranjo de variáveis co-localizadas



b) Arranjo de variáveis desencontradas

- localização de u .
- localização de $P, \rho, \mu, T, \text{etc.}$

FIGURA 1 - Localização das variáveis dependentes na malha.

Por exemplo, no arranjo de variáveis co-localizadas, a equação da conservação de quantidade de movimento unidimensional exigirá interpolação para obtenção das velocidades e pressões nas faces da célula (face w e e , da FIGURA 1a), necessárias ao cálculo dos fluxos convectivos e gradiente de pressão, respectivamente. Para a equação da conservação da massa, interpolação será necessária para obtenção das velocidades nas faces da célula que serão utilizadas no cálculo dos fluxos mássicos que saem e entram no volume de controle.

Para os volumes de controle utilizados no balanço de conservação de quantidade de movimento (entre os pontos W e P , da FIGURA 1b), no arranjo de variáveis desencontradas, será necessária a interpolação para obtenção das velocidades em suas faces. Estes volumes de controle já possuem as pressões armazenadas em suas faces (pontos W e P), não necessitando de interpolação para o cálculo do gradiente de pressão. Para o volume de controle utilizado no balanço de conservação de massa entre as faces w e e , da FIGURA 1b), não será necessária nenhuma interpolação pois as velocidades já se encontram armazenadas nas faces destes volumes de controle.

Para o arranjo de variáveis co-localizadas, que apresenta um único conjunto de volumes de controle, os coeficientes nas equações discretizadas para as duas componentes da velocidade são idênticos. Quando outras variáveis estiverem envolvidas (temperatura, concentração, energia cinética turbulenta, taxa de dissipação de energia cinética, etc.) então, a parte convectiva dos coeficientes permanecerá a mesma para todas as variáveis. Este fato pode não propiciar uma enorme economia de memória computacional, quando esquemas simples de discretização, como "upwind", forem empregados, mas aumenta consideravelmente a eficiência do algoritmo quando esquemas mais elaborados, como o método de discretização "skew upwind" [11], forem empregados.

Segundo Patankar [2], no arranjo de variáveis co-localizadas, o campo de pressão discreto não está unicamente especificado, na solução de problemas incompressíveis e a oscilação no campo de pressão ("checkerboard") poderá ocorrer. Este problema está ilustrado na FIGURA 2, considerando-se um campo de pressão construído com quatro valores arbitrários.

	100	300	100	300	100	300
	5	27	5	27	5	27
	100	300	100	300	100	300
	5	27	N	27	5	27
		W	P	E		
	100	300	100	300	100	300
			S			
	5	27	5	27	5	27

FIGURA 2 - Oscilação no campo de pressões ("checkerboard").

No problema bidimensional, para um volume de controle centrado em P, ilustrado na FIGURA 2, a quantidade de movimento na direção x é influenciada pelo gradiente de pressão dado por $(P_w - P_e)$, enquanto que a quantidade de movimento na direção y é influenciada pelo gradiente de pressão dado por $(P_s - P_n)$. Para este problema ilustrado na FIGURA 2, nenhuma força de pressão será introduzida nas direções x ou y , e neste caso, um campo de pressão altamente não uniforme será tratado como um campo uniforme. Este campo de pressão poderá ser resultado de um procedimento iterativo de solução e a presença deste campo não será detectada na equação de conservação de quantidade de movimento, conforme Patankar [2].

Este campo oscilatório de pressão poderá ocorrer em esquemas que utilizam o ponto P e apenas seus quatro vizinhos (N, S, E e W) para expressar a conservação de uma dada variável, podendo ser resultante de uma avaliação inadequada da variável conservada nas faces do volume de controle. Este problema pode ser contornado pela utilização de funções de interpolação mais complexas, que utilizam o gradiente de pressão responsável pela componente do vetor velocidade na face do volume de controle.

As primeiras aplicações do método de volumes finitos, para a solução de problemas de escoamento de fluidos, com coordenadas não ortogonais e com arranjo de variáveis co-localizadas foram publicadas por Hsu [12], Prakash [13] e Rhie [14], em 1981. Estes trabalhos não foram muito difundidos, em virtude do arranjo de variáveis co-localizadas ser considerado impraticável, devido ao problema do campo oscilatório de pressão [2]. O interesse em utilizar o arranjo de variáveis co-localizadas cresceu lentamente, principalmente devido à complexidade encontrada na utilização do arranjo de variáveis desencontradas, para a solução de escoamentos tridimensionais, turbulentos, em geometrias arbitrárias.

3. CAVIDADE QUADRADA COM IMPOSIÇÃO DE TERMO FONTE NA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO

Shih, Tan e Hwang [9] apresentam a solução de um problema fictício de convecção forçada em uma cavidade quadrada, com comprimento unitário, cujas equações de conservação são dadas por

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}u = \frac{1}{Re} \nabla^2 u - \frac{\partial P}{\partial x} + g_1(x, y, Re) \quad (2)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}v = \frac{1}{Re} \nabla^2 v - \frac{\partial P}{\partial y} + g_2(x, y, Re) \quad (3)$$

onde,

$$g_1(x, y, Re) = 4x^3y^2 + 2xy^2 - 4y/Re \quad (4)$$

$$g_2(x, y, Re) = 4x^2y^3 + 2x^2y + 4x/Re \quad (5)$$

As condições de contorno aplicadas para as componentes de velocidade, u e v , são dadas por

$$u(1, y) = 2y \quad (6)$$

$$u(x, 1) = 2x^2 \quad (7)$$

$$v(1, y) = -2y^2 \quad (8)$$

$$v(x, 1) = -2x \quad (9)$$

sendo que, nos contornos restantes, as componentes de velocidade, u e v , são prescritas nulas, conforme ilustra a FIGURA 3.

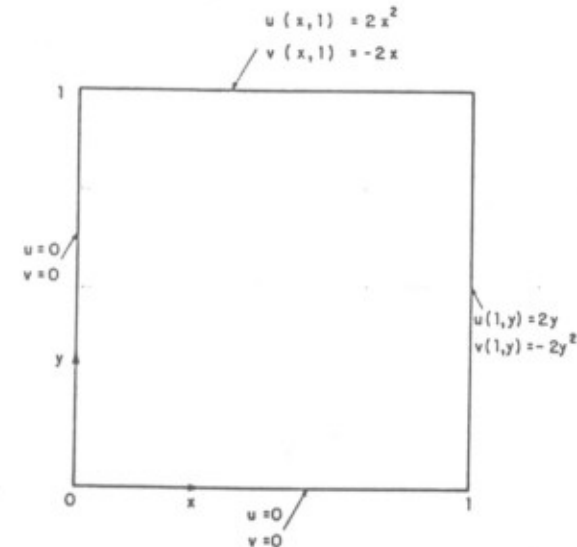


FIGURA 3 - Especificação das condições de contorno para o problema da cavidade quadrada, com entrada e saída de massa.

A solução exata deste problema, apresentada por Shih, Tan e Hwang [9], é dada por

$$u(x, y) = 2x^2y \quad (10)$$

$$v(x, y) = -2xy^2 \quad (11)$$

$$P(x, y) = x^2y^2 \quad (12)$$

Este problema escolhido apresenta entrada e saída de massa, sendo resolvido utilizando-se a função de interpolação completa [15], com malhas cartesianas 10×10 e 20×20 . As linhas de corrente do escoamento, obtidas utilizando-se a formulação proposta, com malha 10×10 , são ilustradas na FIGURA 4.

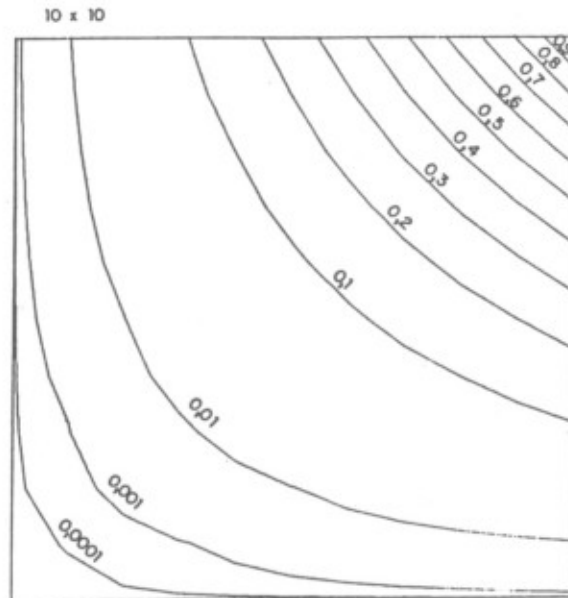


FIGURA 4 - Cavidade quadrada, com entrada e saída de massa, com malha 10x10.

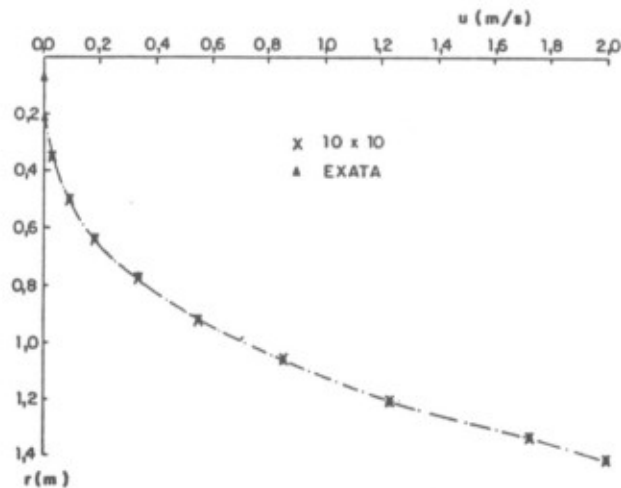


FIGURA 5 - Perfil da componente de velocidade, u , obtido ao longo da diagonal, com malha 10x10.

O perfil da componente de velocidade, u , ao longo da diagonal que une o canto inferior esquerdo com o canto superior direito, obtido neste trabalho, com malha 10x10, é apresentado na FIGURA 5, sendo comparado com a solução exata. A curva obtida com malha 20x20 se sobrepõe à curva da solução exata.

Conforme se pode verificar, os resultados obtidos com malha 10x10 concordam com os resultados obtidos pela solução analítica, apresentando um erro relativo máximo de 0,3% com referência à velocidade, máxima.

O perfil da pressão, P , ao longo da linha central vertical da cavidade, obtido utilizando-se a metodologia proposta, com malha 10x10, é ilustrado na FIGURA 6, sendo confrontado com o perfil apresentado por Shih, Tan e Hwang [9]. O erro relativo máximo obtido no perfil da pressão, comparativamente à solução analítica, com referência à pressão máxima, é de 2,1%.

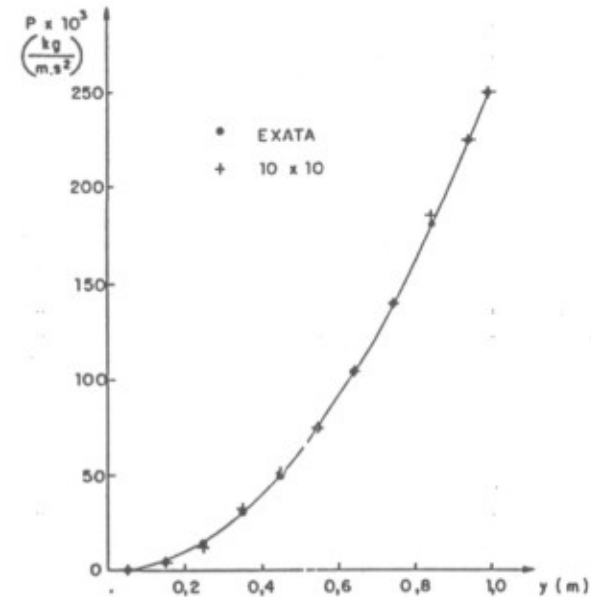


FIGURA 6 - Perfil da pressão, P , ao longo da linha central vertical, com malha 10x10.

4. CONCLUSÃO

O arranjo de variáveis co-localizadas foi escolhido neste trabalho pois apresenta um único conjunto de volumes de controle para realização dos balanços de conservação, utilizando um único esquema de indexação para identificação das várias variáveis de solução com os índices nodais discretos, reduzindo a memória computacional necessária para armazenamento das variáveis do problema, comparativamente ao arranjo de variáveis desencontradas.

A solução numérica obtida neste trabalho, do problema da cavidade quadrada com termos fontes na equação da conservação da quantidade de movimento, apresentado por Shih, Tan e Hwang [9], permitiu comprovar que o modelo numérico implementado resolve, dentro dos erros inerentes às aproximações, as equações

diferenciais governantes.

O algoritmo utilizado apresentou boas condições de estabilidade, não se observando problemas de oscilações ou divergência da solução.

5. BIBLIOGRAFIA

- 1 Roache, P.J., Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers, Albuquerque, N.M., USA, 1976.
- 2 Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Co., Washington, DC., USA, 1980.
- 3 Taylor, C. and Hood, P., A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations Using the Finite Element Technique, Comput. Fluids, 1, pp. 73-100, 1973.
- 4 Oden, J.T. and Wellford, L.C., Analysis of Flow of Viscous Fluids by the Finite Element Method, AIAA Journal, 10, pp. 1590-1599, 1976.
- 5 Chung, T.J., Finite Element Analysis of Fluid Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1978.
- 6 Raithby, G.D. and Schneider, G.E., Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity-Pressure Coupling, Numerical Heat Transfer, 2, pp. 417-440, 1979.
- 7 Maliska, C.R., A Solution Method for Three-dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canadá, 1981.
- 8 Raithby, G.D., Some Recent Advances in Computational Fluid Dynamics, Keynote Lecture, COBEM 87 - IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. 33-38, 1987.
- 9 Shih, T.M., Tan, C.H. and Hwang, B.C., Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 9, pp. 193-212, 1989.
- 10 Silva, A.F.C., Um Procedimento em Volumes Finitos para a Solução de Escoamentos de Qualquer Velocidade, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, 1991.
- 11 Raithby, G.D., Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, Comp. Meth. Applied Mech. Eng., 9, pp. 153-164, 1976.
- 12 Hsu, C., A Curvilinear-Coordinate Method for Momentum, Heat and Mass Transfer in Domains of Irregular Geometry, Ph.D. Thesis, University of Minnesota, USA, 1981.
- 13 Prakash, C., A Finite Element Method for Predicting Flow Through Ducts with Arbitrary Cross Sections, Ph.D. Thesis, University Minnesota, USA, 1981.
- 14 Rhie, C.M., A Numerical Study of the Flow Past an Isolated Airfoil with Separation, Ph.D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, USA, 1981.
- 15 Ulson de Souza, S.M.A.G., Um Esquema Numérico Utilizando Variáveis Co-localizadas com Função de Interpolação Completa para a Solução de Problemas de escoamento de Fluidos, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis - SC, 1992.

COMPARAÇÃO ENTRE A FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO COMPLETA E O ESQUEMA WUDS NO METODO DE VOLUMES FINITOS

S.M.A.G. Ulson de Souza*, A.A. Ulson de Souza*, C.R. Maliska*

* UFSC, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil

RESUMO

Neste trabalho é resolvido o problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada, com a parede superior se movimentando com velocidade constante, para os casos de $Re = 100, 400$ e 1000 . A solução obtida utilizando-se a função de interpolação completa é confrontada com a solução obtida com malhas bastante refinadas e com o esquema WUDS.

1. INTRODUÇÃO

A solução de problemas de engenharia, envolvendo escoamento de fluidos, pode ser obtida utilizando-se o método de volumes finitos [1,2,3], que apresenta uma importante característica, não contemplada pelos métodos tradicionais como diferenças finitas e elementos finitos, que é a conservação, a nível de volumes elementares, das grandezas físicas em questão.

O mais grave problema encontrado na simulação numérica de escoamento de fluidos é a especificação da função de interpolação. Diversas estratégias são utilizadas para a avaliação das variáveis nas faces do volume de controle. Spalding [4] desenvolveu o esquema híbrido, na tentativa de levar em conta os efeitos físicos relevantes do problema, na função de interpolação. Baseando-se na formulação apresentada por Spalding [4], Raithby e Torrance [5] propuseram o esquema exponencial, EDS. Vários outros esquemas, derivados do exponencial, são amplamente utilizados, como por exemplo, o esquema WUDS, apresentado por Raithby [6] ou o esquema "power law", descrito por Patankar [2]. Estes esquemas recaem nos esquemas "upwind" ou central, quando a convecção ou difusão é dominante. Estas funções de interpolação unidimensionais levam em conta somente a influência dos dois pontos vizinhos à face do volume de controle em questão, apresentando grandes erros, quando a malha não se encontra alinhada com o vetor velocidade. Tais erros, conhecidos como difusão numérica, podem comprometer severamente a qualidade da solução.

Recentemente, Baliga e Patankar [7], Schneider e Zedan [8] aplicaram, no método de elementos finitos, os princípios de conservação em volumes de controle, sendo que os primeiros utilizaram elementos triangulares e os últimos, elementos quadriláteros. Para o transporte escalar, um novo esquema "upwind" foi introduzido na formulação de elementos finitos por Schneider e Raw [9]. Nos trabalhos publicados por Schneider e Raw [10,11], foi proposta uma nova alternativa para avaliação da variável ϕ , na face dos volumes de controle, obtida a partir da própria equação que expressa a conservação da variável ϕ .

No método de volumes finitos, Peric et al. [12], Camarero [13], Schneider [14] e Marchi et al. [15] utilizaram o arranjo de variáveis co-localizadas, para a solução de problemas envolvendo escoamento de fluidos incompressíveis, sendo apresentadas diversas propostas para avaliação da variável ϕ e do fluxo de massa nas faces do volume de controle.

2. FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO COMPLETA

Neste trabalho, é proposta a utilização de uma função de interpolação