

FIGURA 9: INFLUÊNCIA DA FORMA DE FLUXO

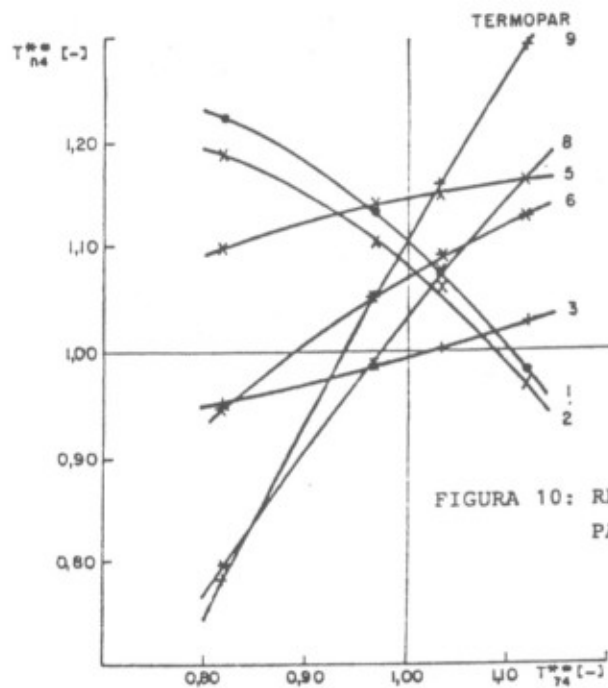


FIGURA 10: RELAÇÕES ENTRE PARÂMETROS

DESENVOLVIMENTO SIMULTÂNEO DOS PERFIS DE VELOCIDADE E TEMPERATURA EM DUTOS DE SECÇÃO TRANSVERSAL DE FORMA CÚSPIDE

C.R. MALISKA e A.F.C. SILVA
 DEPTO DE ENG. MECÂNICA
 UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
 FLORIANÓPOLIS - SANTA CATARINA
 BRASIL

RESUMO

O desenvolvimento simultâneo dos perfis de velocidade e temperatura é analisado numericamente para os dutos de secção transversal de forma tricúspide e quadricúspide. As equações empregadas são parabólicas na direção axial e são resolvidas utilizando um sistema não ortogonal de coordenadas coincidente com a fronteira do domínio de cálculo. A condição de contorno é de temperatura prescrita periférica e axialmente. Resultados para o duto circular também são apresentados para efeito de comparação com as outras geometrias estudadas.

1. INTRODUÇÃO

A determinação das características hidrodinâmicas e térmicas na região de entrada de dutos é de fundamental importância no projeto de equipamentos térmicos empregados nas mais diversas aplicações da engenharia. Nesta região ocorrem as trocas significativas de quantidade de movimento e calor, e o conhecimento das características térmicas permite o correto dimensionamento de trocadores de calor tornando os equipamentos mais eficientes e compactos.

O estudo da região de entrada em dutos de secção regular, como circular, retangular, polar, etc., tem recebido grande atenção dos pesquisadores, principalmente com a finalidade de testar novos modelos numéricos para a solução das equações de Navier-Stokes, Curr et al.

(1972), Patankar e Spalding (1972), Briley (1974), Chia et al. (1977), Pollard e Spalding (1978), Rushmore e Taulbee (1978) e Prakash e Liu (1985), entre outros.

Em todos os trabalhos acima a discretização é realizada utilizando-se um sistema ortogonal de coordenadas; cartesiano ou cilíndrico. Para o tratamento de geometrias complexas a utilização de coordenadas não ortogonais tem despertado grande atenção devido a generalidade e versatilidade dos modelos, Chia et al. (1976), Robert e Forester (1979), Vanka et al. (1980), Maliska (1981) e Maliska e Raithby (1984). Especificamente para este tipo de geometrias poucos trabalhos são disponíveis, de conhecimento dos autores, na literatura. Entre eles podemos citar Rapley (1985) que analisa o escoamento turbulento plenamente desenvolvido em um tricúspide e El-Hadik et al. (1985) que investigaram experimentalmente o escoamento laminar em um quadricúspide para a condição de fluxo prescrito.

Neste trabalho são apresentados resultados preliminares do desenvolvimento simultâneo dos perfis de velocidade e temperatura em dutos de forma cuspide (quadricúspide e tricúspide). A condição de contorno empregada é a de temperatura prescrita constante periférica e axialmente.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema em estudo é o desenvolvimento simultâneo dos perfis de velocidade e temperatura em dutos de forma quadricúspide e tricúspide, conforme mostrados na Fig. 1, para o escoamento laminar e incompressível de um fluido Newtoniano. A condição de contorno é de temperatura constante periféricamente e ao longo do duto. Na entrada do duto o perfil é plano com $w = \bar{w}$, $T = T_1$ e velocidades transversais u e v iguais a zero.

O problema em questão é, na realidade, tridimensional e elíptico. O tratamento totalmente elíptico requer, por sua vez, grande espaço de armazenamento e grande tempo de processamento computacional. Felizmente, a física do problema permite, observadas algumas restrições, parabolizar as equações na direção axial, determinando a solução em um processo de marcha iniciado no plano de entrada até atingir o perfil plenamente desenvolvido. A aproximação parabólica requer que a difusão de quantidade de movimento, massa e calor seja desprezável comparada com a convecção destas grandezas na direção predominante de escoamento. O cam

po de pressões na direção predominante deve ser desacoplado do campo de pressões transversal. Tal desacoplamento é conseguido escrevendo-se a pressão como

$$P(x,y,z) = \bar{P}(x) + \tilde{P}(x,y,z) \quad (1)$$

onde \bar{P} é a pressão média na seção transversal do duto, responsável pelo escoamento axial e \tilde{P} é a distribuição de pressão que controla o escoamento secundário no plano transversal. Desta maneira, durante o procedimento de solução plano-por-plano, um problema bi-dimensional elíptico é resolvido em cada plano transversal. As variáveis necessitam de armazenamento, então, apenas no plano de cálculo e no plano imediatamente a montante.

É importante notar que o desacoplamento do campo de pressões introduz uma nova variável, \bar{P} , e, portanto, para o fechamento do problema será necessário uma nova equação. A equação que se adiciona ao sistema é a equação da conservação da massa global em cada seção transversal. A equação da continuidade local é utilizada no problema elíptico bi-dimensional. Dois problemas ficam então caracterizados; a determinação do gradiente de pressões na direção axial que origina velocidades axiais que satisfaçam a equação da continuidade global e a determinação do campo de pressões \tilde{P} que origina velocidades transversais que satisfaçam a equação da continuidade local. Maiores detalhes relativos a aproximação parabólica podem ser encontrados em Patankar e Spalding (1972).

Eliminando os termos difusivos na direção axial (z) as equações de Navier-Stokes parabólicas em z são dadas por

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u w) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w w) = -\frac{d\bar{P}}{dz} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial w}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial w}{\partial y}) \quad (2)$$

$$\int \rho w \, dA = \dot{m} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w u) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w v) = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial v}{\partial y}) \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w T) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{k}{c} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{k}{c} \frac{\partial T}{\partial y}) \quad (7)$$

onde \dot{m} é a vazão mássica conhecida das condições de entrada (condições iniciais da coordenada z). Para a obtenção da Eq. (2) foi considerado $\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \ll \frac{\partial \bar{P}}{\partial z}$, condição que é satisfeita para dutos retos de seção constante. As condições de contorno são:

a) nas paredes do duto

$$\begin{aligned} u = v = w = 0 \\ T = T_s \end{aligned} \quad (8)$$

b) na seção de entrada

$$\begin{aligned} v = \bar{v} \\ T = T_i \\ u = v = 0 \\ \bar{P} = P_i \end{aligned} \quad (9)$$

3. PROCEDIMENTO NUMÉRICO

As Eqs. (2-7) estão escritas no sistema cartesiano de coordenadas. A discretização dos domínios de cálculo mostrados na Fig. 1 resultaria em volumes de controle não coincidentes com as fronteiras, ocasionando dificuldades na solução. Neste caso particular as cúspides presentes nas geometrias dificultam de maneira considerável o procedimento numérico. Para contornar este problema a geometria é discretizada usando um sistema de coordenadas não ortogonais que se adapta às fronteiras, conforme mostrado na Fig. 2. O sistema não ortogonal é gerado pela solução de um sistema de equações elípticas. Detalhes podem ser encontrados em Thompson et al. (1974).

O sistema composto pelas Eqs. (2-7) transformado para o novo sistema coordenado (ξ, η, Γ) , mantendo as componentes cartesianas do vetor velocidade como variáveis dependentes no plano transformado, toma a seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U w) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V w) + \frac{\partial}{\partial \Gamma}(\rho W w) = - \frac{1}{J} \frac{d\bar{P}}{d\Gamma} \\ + \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial w}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial w}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial w}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial w}{\partial \xi}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int \rho w J d\xi d\eta = \dot{m} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V v) + \frac{\partial}{\partial \Gamma}(\rho W v) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ + \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial v}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial v}{\partial \xi}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V u) + \frac{\partial}{\partial \Gamma}(\rho W u) = - \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial u}{\partial \xi}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = - \frac{\partial W}{\partial \Gamma} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U T) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V T) + \frac{\partial}{\partial \Gamma}(\rho W T) = \frac{\partial}{\partial \xi}(C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi}) \quad (15)$$

A grande vantagem da transformação é que as equações acima são agora definidas em um paralelepípedo onde os volumes elementares são paralelepípedos com dimensões $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ e $\Delta\Gamma$. O código computacional fica, desta maneira, independente da geometria física, bastando que um novo sistema de coordenadas seja gerado quando da solução do problema em uma nova geometria. As informações da geometria estão presentes nas equações transformadas através das métricas da transformação de coordenadas.

As Eqs. (10-14) são não lineares e acopladas. A solução direta do sistema de equações algébricas é computacionalmente proibitiva. Mesmo sendo possível, o sistema deverá ser resolvido sucessivas vezes devido as não linearidades. Neste trabalho o sistema de equações algébricas é resolvido iterativamente, sendo então as iterações devidas a dois fatores; o acoplamento entre as variáveis e as não linearidades. A solução iterativa das equações governantes associada a incompressibilidade do escoamento introduz um forte acoplamento entre a pressão e a velocidade. No caso de problemas tri-dimensionais parabólicos, como o aqui tratado, dois acoplamentos devem ser tratados; o acoplamento na direção parabólica entre w e \bar{P} e o acoplamento no plano elíptico entre $u-v$ e \bar{P} . Na direção axial e acoplamento é resolvido utilizando o método de Raithby e Schneider (1979) e no problema elíptico utilizando o método desenvolvido por Van Doormaal e Raithby (1981). As equações diferenciais são integradas utilizando o método do volume de controle e novas equações al

gênicas são derivadas em termos das componentes contravariantes U e V do vetor velocidade. Detalhes da metodologia podem encontrados em Maliska (1981) e Maliska e Raithby (1983).

4. PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

Para evitar ambiguidade é fundamental antes da apresentação dos resultados definir claramente os números adimensionais envolvidos. Como trata-se de uma geometria arbitrária a dimensão linear característica usada neste trabalho é o diâmetro hidráulico. Para os dois dutos analisados, tricúspide e quadricúspide, o diâmetro hidráulico, definido como

$$Dh = \frac{4 A_T}{P} \quad (16)$$

tem as seguintes expressões; para o tricúspide

$$Dh = \frac{D_g (2\sqrt{3}-\pi)}{\pi} \quad (17)$$

e

$$Dh = \frac{D_g (4 - \pi)}{\pi} \quad (18)$$

para o quadricúspide; D_g é o diâmetro do círculo gerador, conforme Fig. 1. O fator de atrito f é dado por

$$f = - \frac{(d\bar{P}/dz) Dh/4}{\rho w^2/2} \quad (19)$$

Um parâmetro importante do ponto de vista de engenharia é a determinação do aumento da perda de pressão devido aos efeitos da região de entrada. Adimensionalizada, a diferença de pressão entre uma seção z e a pressão na entrada é dada por

$$\text{Queda de pressão adimensional} = - \frac{\bar{P}(z) - P_{in}}{\rho w^2/2} \quad (20)$$

O acréscimo de perda de pressão (K) devido aos efeitos da região de entrada é então dado por, de acordo com Prakash e Liu (1985),

$$K(z) = - \frac{\bar{P}(z) - P_{in}}{\rho w^2/2} + \frac{(\bar{P}(z) - P_{in}) f \cdot d}{\rho w^2/2} \quad (21)$$

onde o subíndice fd representa a queda de pressão que ocorreria até aquela seção z se o escoamento fosse plenamente desenvolvido desde a entrada.

O coeficiente de transferência de calor local em uma seção transversal é definido como

$$h = \frac{-k \frac{\partial T}{\partial n}}{T_s - T_b} \quad (22)$$

onde T_s é a temperatura de superfície e T_b a temperatura de mistura da seção transversal em consideração. O número de Nusselt, baseado no diâmetro hidráulico, de acordo com a Eq. (22) é dado por

$$Nu = \frac{-Dh \frac{\partial T}{\partial n}}{T_s - T_b} \quad (23)$$

O número de Nusselt médio no perímetro aquecido para uma determinada seção é dado por

$$\bar{Nu}(z) = \frac{1}{P} \int \frac{-\frac{\partial T}{\partial n} Dh}{T_s - T_b} dP \quad (24)$$

A dependência com z é especificada para enfatizar que \bar{Nu} é função de z na região de entrada.

5. RESULTADOS

A região de entrada hidrodinâmica e térmica simultânea foi analisada para os dutos quadricúspide e tricúspide. A discretização do domínio para o duto quadricúspide está mostrada na Fig. 2. A discretização para o tricúspide não é mostrada por ser semelhante àquela do quadricúspide. Resultados que o duto circular também são apresentados para efeito de comparação com as geometrias irregulares em estudo.

Uma grade 10x10 foi utilizada para todas as geometrias. Para o duto circular uma discretização 15x15 também foi empregada para verificação dos resultados obtidos com a malha 10x10. Como pode ser visto na Tabela 1 o valor de fRe para a região plenamente desenvolvida apresenta um erro de apenas 1,43% em relação ao valor analítico

(16.0). Para a malha 15x15 o valor de fRe encontrado foi 16.1, sendo o erro então de 0.6%. Na direção axial o procedimento de marcha se desenvolveu com $\Delta z = Dh$ para os 5 primeiros planos. Para os planos subsequentes os passos crescem geometricamente com razão 1.07. Na mesma Tabela 1 encontramos os valores da fRe na região de entrada para as geometrias estudadas. Observa-se que o valor de fRe para as geometrias de forma cuspide são semelhantes, o que era esperado em função da semelhança entre as duas geometrias. Na Fig. 3 estão apresentados os valores da queda de pressão adimensional para as três geometrias. A Fig. 4 apresenta o desenvolvimento do perfil de velocidade axial para o tricuspide, enquanto que na Fig. 5 encontramos o perfil de velocidade plenamente desenvolvida para os casos em estudo. Observa-se que w/\bar{w} máxima é maior para o tricuspide, seguido do quadricuspide e sendo igual a 2.0 para o caso circular. Isto deve-se, obviamente ao fato do cuspide do tricuspide ser mais acentuado do que o do quadricuspide, forçando o escoamento a fugir desta região aumentando a velocidade máxima no centro do duto.

Para concluir, os resultados do desenvolvimento do perfil de temperatura são apresentados. Na Tabela 1 é mostrado o Número de Nusselt baseado no diâmetro hidráulico para a região de entrada das três geometrias em consideração. Novamente constata-se que dada a semelhança das geometrias cúspides em estudo os Números de Nusselt das mesmas diferem da ordem de 20% apenas, comparados com a grande variação ao passar da geometria circular para as geometrias cúspides.

A Figura 6 mostra o desenvolvimento do perfil de temperatura ao longo de z para as geometrias em estudo.

6. CONCLUSÕES

Utilizando uma metodologia numérica não ortogonal a região de entrada para o escoamento laminar e incompressível em dutos de forma cuspide foi analisada. Apesar de não estar disponível aos autores outros dados numéricos ou experimentais para comparação os resultados apresentam os comportamentos esperados. O uso de sistemas coordenados generalizados mostrou-se eficiente para a solução de problemas tri-dimensionais parabólicos em geometrias arbitrárias.

7. REFERÊNCIAS

1. W.R. Briley, "Numerical Methods for Predicting Three-Dimensional Flows in Ducts", *J. Comp. Physics*, 14, 8 (1974).
2. R.M. Curr et al., "Numerical Predictions of Some Three-Dimensional Boundary Layers in Ducts", *Comp. Meth. in Applied Mech. and Eng.*, 1, 143 (1972).
3. D.W. Roberts e C.K. Forester, "Parabolic Procedure for Flows in Ducts with Arbitrary Cross-Section", *AIAA Journal*, 17, 33 (1979).
4. V. Ghia et al., "Three-Dimensional Laminar Incompressible Flow in Straight Polar Ducts", *Computer and Fluids*, 5, 205 (1977).
5. K.N. Ghia et al., "Analytical Formulation of Three-Dimensional Laminar Viscous Flow Through Turbine Cascades Using Surface Oriented Coordinates", *ASME Paper 76-FE-22*, 1976.
6. A.A. El-Hadik et al., "A Study of Heat and Fluid Flow in Cusped Ducts in Laminar Case", in *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Eds. C. Taylor, M-D. Olson, P.M. Gresho e W.G. Habashi, Pineridge Press, 1069 (1985).
7. C.R. Maliska, "A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problem in Nonorthogonal Coordinates", Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canadá, 1981.
8. C.R. Maliska e G.D. Raithby, "A Method for Computing Three-Dimensional Flows using Non-Orthogonal Boundary Fitted Coordinates", *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 4, 519 (1984).
9. C.R. Maliska e G.D. Raithby, "Calculating Three-Dimensional Flows using Nonorthogonal Grids", *Num. Meth. in Laminar and Turbulent Flow*, Eds. C. Taylor, J.A. Johnson and W.R. Smith, Pineridge Press, 656 (1983).
10. S.V. Patankar e D.B. Spalding, "A Calculation Procedure for Heat and Mass Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15, 1787 (1972).
11. C. Prakash e Ye-Di Liu, "Analysis of Laminar Flow and Heat Transfer in the Entrance Region of an Internally Finned Circular Duct", *J. of Heat Transfer*, 107, 84 (1985).
12. G.D. Raithby e G.E. Schneider, "Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Pressure-Velocity Coupling", *Num. Heat Transfer*, 2, 417 (1979).

13. C.W. Rapley, "Turbulent Flow in a Duct with Cusped Corners", Int.J. Num. Meth. in Fluids, 5, 155(1985)
14. W.L. Rushmore e D.B. Taulbee, "Numerical Investigation of Developing Pipe Flows of Arbitrary Curvature", Computers and Fluids, 6, 125(1978).
15. J.F. Thompson et al., "Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies", J. Comp. Phys., 15, 299(1974).
16. J.P. Van Doormaal e G.D. Raithby, "The application of the Quasi-Continuum Approach to Three-Dimensional Elliptic Flows in Complex Geometries", Waterloo Research Institute, Report to AECL, 1981.
17. S.P. Vanka et al., "A Semi-Implicit Calculation Procedure for Flows Described in Boundary-Fitted Coordinate Systems", Num. Heat Transfer, 3, 1(1980).

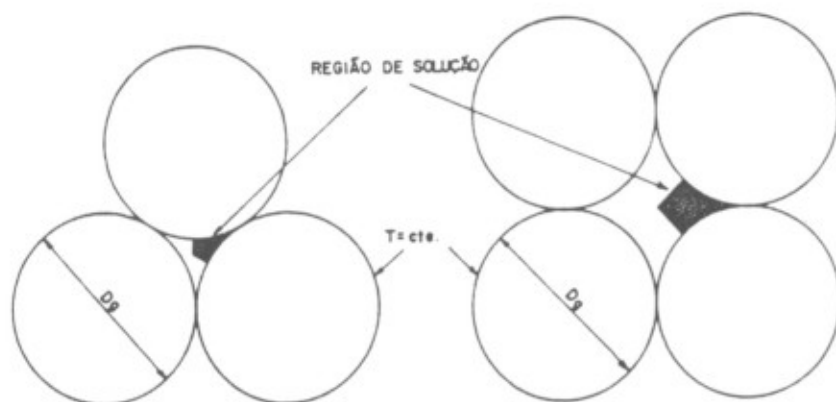


Fig. 1 - Geometrias dos dutos em estudo

1/Gz	$\bar{Nu}(z)$			fRe		
	Circular	3-Cúspide	4-Cúspide	Circular	3-Cúspide	4-Cúspide
0.0006	15.10	14.81	14.31	35.04	31.61	30.76
0.0011	10.69	9.88	8.32	25.95	20.29	19.60
0.0020	8.30	6.05	5.19	21.27	15.41	14.40
0.0051	5.93	3.21	3.08	17.32	10.68	9.78
0.010	4.89	2.25	2.28	16.38	8.58	8.01
0.020	4.20	1.63	1.76	16.23	7.27	7.02
0.051	3.75	1.18	1.35	16.23	6.59	6.63
0.101	3.69	1.01	1.18	16.23	6.52	6.61
0.201	3.69	0.92	1.11	16.23	6.51	6.61
0.500	3.69	0.90	1.09	16.23	6.51	6.61
∞	3.69	0.90	1.09	16.23	6.51	6.61

Tab. I - Número de Nusselt e fator de atrito na região de entrada

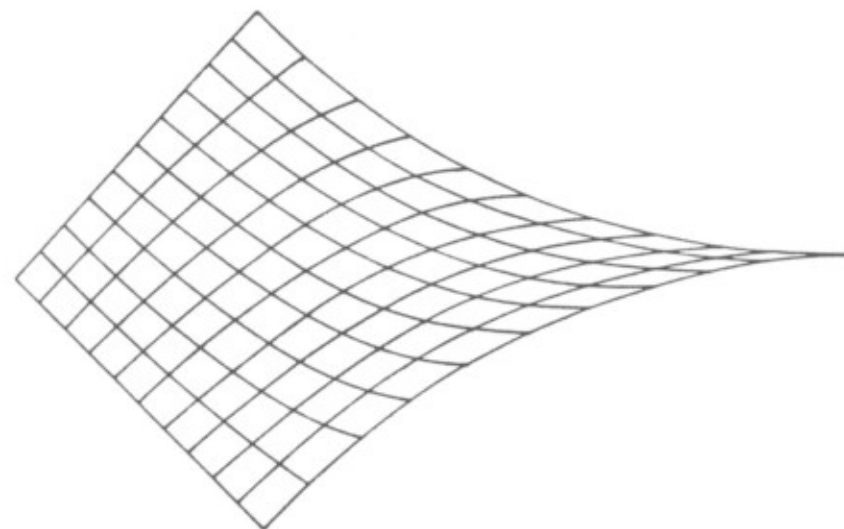


Fig. 2 - Malha não ortogonal para o duto quadricúspide

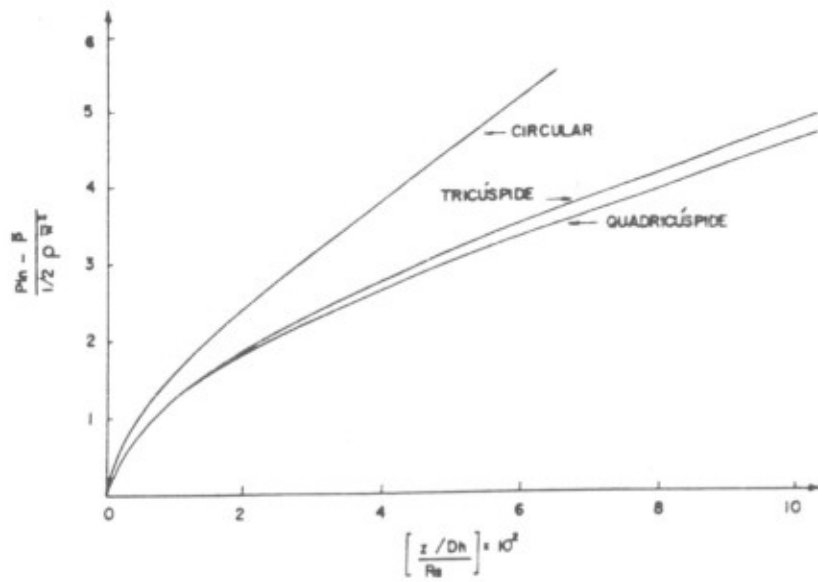


Fig. 3 - Variação da pressão ao longo de z

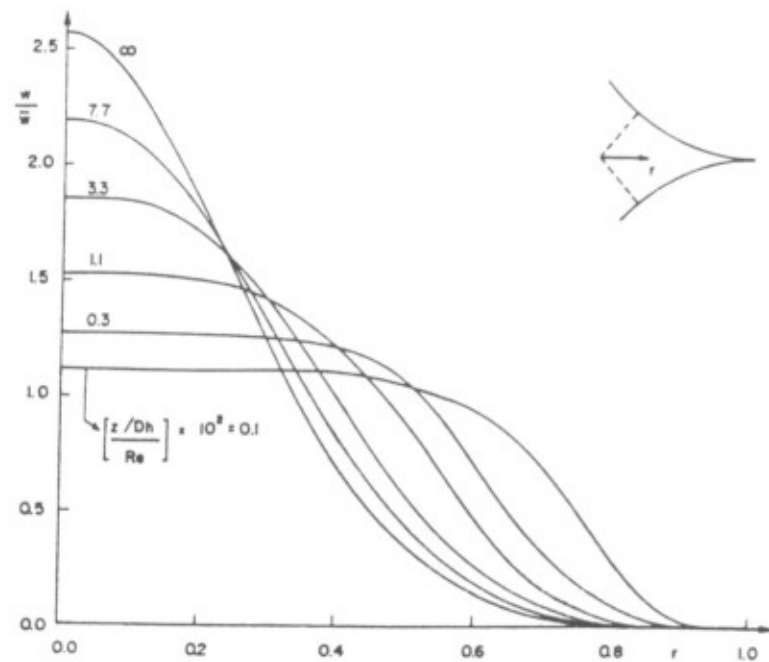


Fig. 4 - Desenvolvimento do perfil de w para o tricúspide

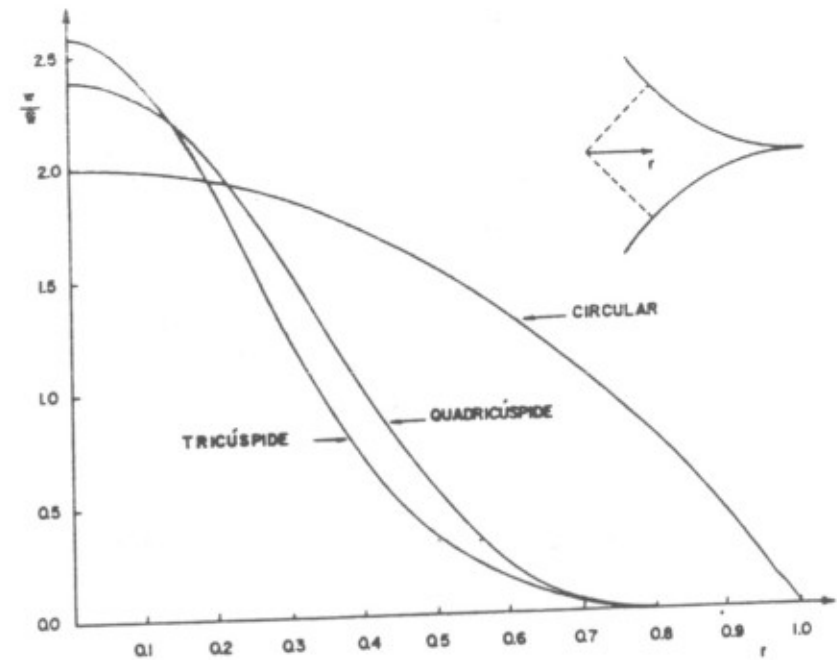


Fig. 5 - Perfis de velocidade plenamente desenvolvidos

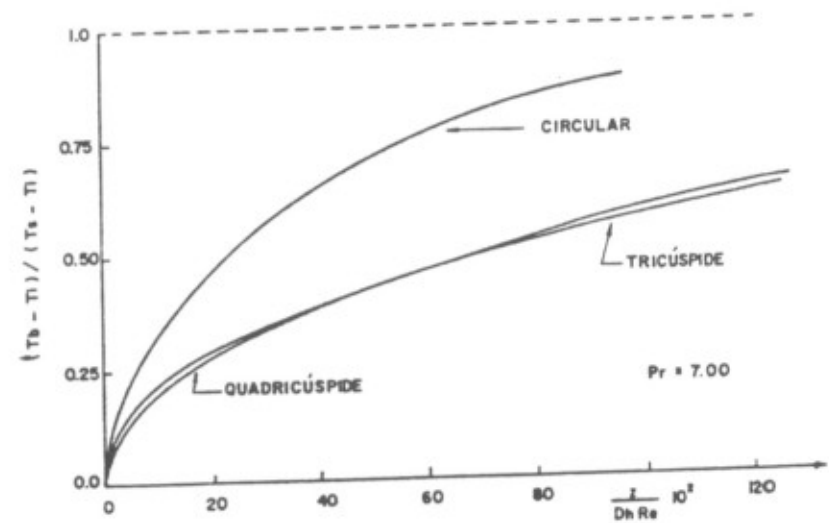


Fig. 6 - Temperatura de mistura ao longo de z