GERAÇÃO DE MALHAS PARA DOMÍNIOS BIDIMENSIONAIS SIMPLES E MULTIPLAMENTE CONEXOS

SERGIO POLINA, CARLOS H. MARCHI, PAULO E. MENEZES e JONAS GRETTER
Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos
e Transferência de Calor - SINMEC
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC
Cx. Postal 476 - 88049 - Florianópolis - SC

INTRODUÇÃO

Utilizando-se métodos numéricos para a solução de problemas complexos de transferência de calor e mecânica dos fluidos definidos em geometrias irregulares, necessita-se da discretização do domínio em questão que possibilita a caracterização do fenômeno físico a ser analisado. Assim sendo, o sistema de geração de malha deve possuir linhas coordenadas coincidentes com a fronteira e permitir a concentração de linhas em determinadas regiões do domínio.

Neste trabalho apresenta-se, portanto, o sistema de geração de coordenadas proposto por [1] para geometrias arbitrárias simples e multiplamente conexas bidimensionais. Esta metodologia é muito utilizada para discretização de domínios, para a solução de diversos problemas de engenharia que envolvem sistemas de equações diferenciais parciais lineares e não lineares.

METODOLOGIA PARA GERAÇÃO DA MALHA

A utilização de sistemas coordenados ortogonais, como cartesiano, cilíndrico ou esférico, na discretização de domínios para a solução numérica de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos é dificultado quando o objetivo é o desenvolvimento de códigos computacionais para geometrias arbitrárias. Neste caso há necessidade de interpolação nas fronteiras para a aplicação das condições de contorno. Isto acarreta erros consideráveis, pois leva ao

NMAC, SÃO JOSÉ DO RIO PRETO, 4-8 SET. 1989.

desenvolvimento de modelos numéricos dependentes da geometria. Para evitar que isto ocorra, a saída é discretizar o domínio utilizando um sistema de coordenadas coincidentes com a fronteira. Para isto utilizamos um sistema de geração através da solução de equações diferenciais [1]. A motivação principal para a utilização de equações diferenciais elípticas na geração de coordenadas vem da observação física de um problema de condução [2]. Considerando-se o seguinte problema de transferência de calor por condução

$$\nabla^2 T^1 = 0 \tag{1}$$

$$\nabla^2 T^2 = 0 \tag{2}$$

definido no domínio arbitrário, com as condições de contorno mostradas nas figs. 1(a) e 1(b). As isotermas mostradas nas respectivas figuras são resultantes da solução da condução de calor para a geometria apresentada, associada às Eqs. (1) e (2), respectivamente. Ao serem superpostas, as isotermas resultam em uma malha que pode ser empregada para a solução de problemas físicos nesta geometria.

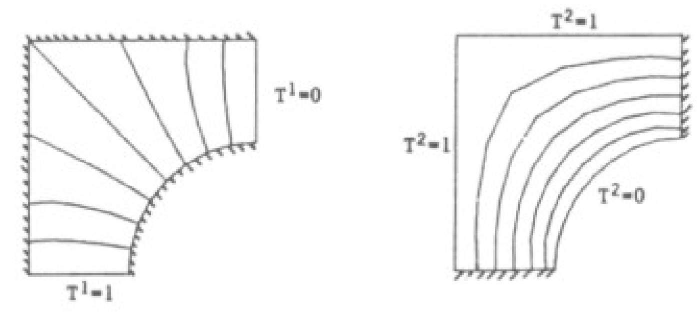


Figura 1 - Exemplo para geração de um sistema de coordenadas

Este exemplo simples mostra que o sistema dado pelas Eqs. (1) e (2) é adequado para a geração de coordenadas. Chamando-se $T^1 = \xi$ e $T^2 = \eta$, tem-se que

$$\xi_{xx} + \eta_{xx} = P(\xi,\eta) \tag{3}$$

$$\xi_{yy} + \eta_{yy} = Q(\xi,\eta) \tag{4}$$

Com isso obtém-se um sistema de equações diferenciais elípticas para a geração de sistemas de coordenadas coincidentes com as fronteiras, para domínios bidimensionais.

Voltando ao exemplo do problema de condução de calor, caso existisse uma fonte de calor, então o lado esquerdo das Eqs. (1) e (2) seriam diferentes de zero e as isotermas estariam concentradas na região da fonte de calor. Nas Eqs. (3) e (4) temos os termos fontes representados por P e Q que possibilitam a concentração das linhas coordenadas nas regiões desejadas.

Os termos P e Q são dados por

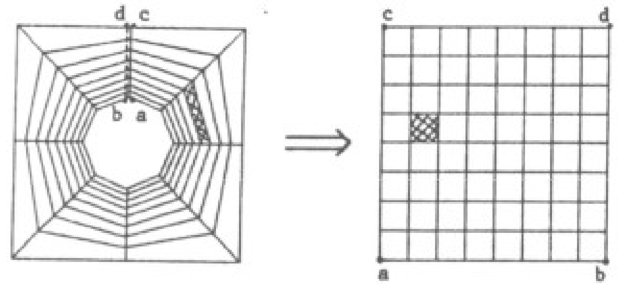
$$P = -\sum_{i=1}^{m} a_i \,\mathrm{sgn}(\xi - \xi_i)\, e^{-c_i|\xi - \xi_i|} - \sum_{j=1}^{n} b_j \,\mathrm{sgn}(\xi - \xi_j)\, e^{-d_j\sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}} \tag{5}$$

$$Q = -\sum_{i=1}^{m} a_i \,\mathrm{sgn}(\eta - \eta_i)\, e^{-c_i|\eta - \eta_i|} - \sum_{j=1}^{n} a_i \,\mathrm{sgn}(\eta - \eta_j)\, e^{-d_j\sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}} \tag{6}$$

onde a_i e b_i são os coeficientes de atração para linhas e pontos, respectivamente e c_j e d_j são os expoentes de atração para linhas e pontos, respectivamente. ξ e η são as linhas do domínio. A função sgn(x) é uma função que assume os valores 1, 0 ou -1 conforme (x) seja positivo, nulo ou negativo, respectivamente. ξ_i e η_i são as linhas ksi e eta para as quais as demais serão atraídas e ξ_j e η_j são as coordenadas dos pontos para as quais as linhas serão atraídas. A variável m é o número de linhas a serem atraídas e n é o número de pontos a serem atraídos.

Com a função de evitar o problema de interpolação nas fronteiras do domínio, o que nos faz usar um sistema de equações elípticas, transforma-se o espaço físico (x,y) para o espaço computacional (ξ,η). Desta maneira faz-se com que x e y se tornem as variáveis dependentes e ξ e η as independentes. As condições de contorno para geometrias simplesmente conexas são os valores de x e y que definem a geometria e,

ao mesmo tempo, especificam as distribuições das linhas coordenadas ao longo das fronteiras. Para geometrias multiplamente conexas temos as condições de contorno repetitivas como mostrado pela fig. 2(a), mas a geometria quando transformada para o sistema (ξ,η) resulta na fig. 2(b), tendo quatro fronteiras, sendo que duas são coincidentes.



(a) Plano Cartesiano (b) Plano Transformado

Figura 2 - Exemplo de Geometria Duplamente Conexa

É importante lembrar também que a geometria simplesmente conexa é transformada para o plano (ξ,η) assumindo uma forma retangular fixa. Isto é devido ao método dos volumes finitos com sistema de coordenadas generalizadas, utilizado para solução de um problema físico [2].

A Eqs. (3) e (4) transformadas são

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2}(P x_\xi + Q x_\eta) = 0 \tag{7}$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2}(P y_\xi + Q y_\eta) = 0 \tag{8}$$

onde

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \qquad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \qquad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \tag{9}$$

são os componentes do tensor métrico e o jacobiano é

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \tag{10}$$

As Eqs. (7) e (8) transformadas são não-lineares e acopladas através das componentes do tensor métrico, são aproximadas por diferenças centrais e resolvidas numericamente pelo método SOR (Sucessive-Over Relaxation). Observa-se novamente que com a solução do sistema de equações elípticas (Eqs. (7) e (8)) obtém-se os valores de x e y que discretizam o domínio físico.

RESULTADOS E CONCLUSÃO

A seguir, passamos a exemplificar algumas malhas geradas por este método para geometrias simplesmente conexas (figs. 3 e 4), para duplamente conexa (fig. 5) e multiplamente conexa (fig. 6).

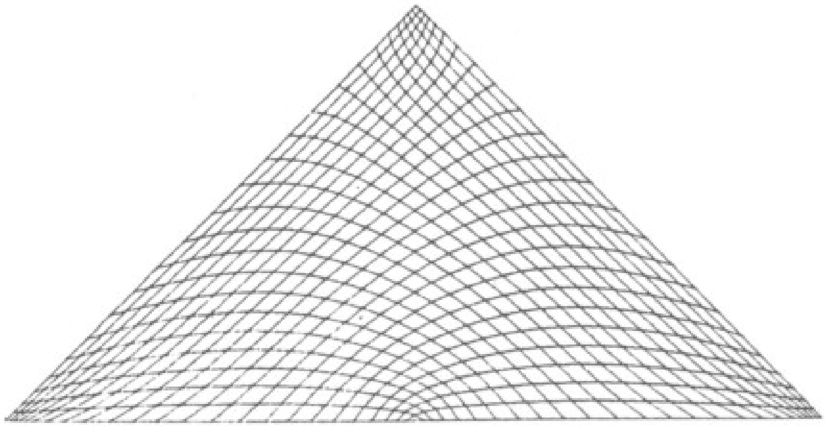


Figura 3 - Geometria triangular discretizada

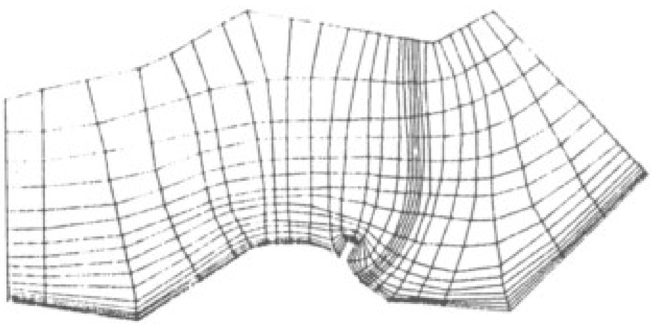


Figura 4 - Discretização de uma geometria arbitrária

Após o domínio físico discretizado deve-se calcular as métricas a serem transferidas para as equações que descrevem o problema físico que também são tansformadas para o novo sistema de coordenadas, a fim de se obter a solução do problema físico.

Existem geometrias onde podemos gerar uma malha através de equações algébricas. Portanto, quando isto acontece, é mais conveniente a utilização do cálculo algébrico. Porém, em geometrias irregulares, somos conduzidos a utilizar a metodologia aqui apresentada.

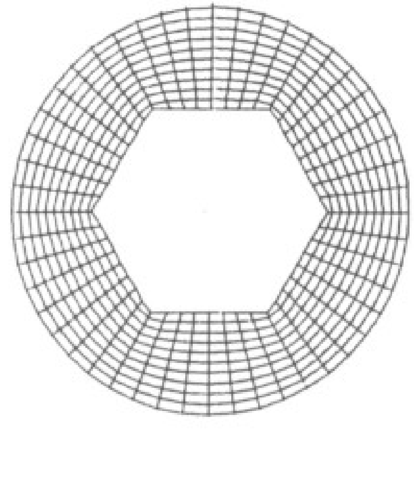


Figura 5 - Geometria duplamente conexa discretizada

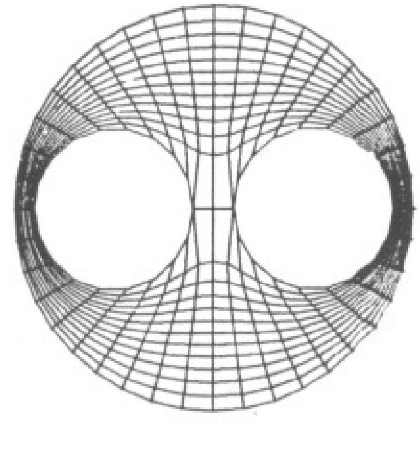


Figura 6 - Geometria multiplamente conexa discretizada

REFERÊNCIAS

[1] Thompson, J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W.,"Automatical numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies", J. Comp.Phys., 15, pp. 299-319 (1974).

[2] Maliska , C. R. "Solução numérica de problemas de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluídos em coordenadas generalizadas", Anais do I Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, pp. 27-38 (1986).