

COMPARAÇÃO DE MÉTODOS NÃO-ESTACIONÁRIOS NA SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE IMPLICITUDE VARIÁVEL APLICADOS A SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

Mário C. Zambaldi* e Francisco Marcondes**

* Departamento de Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina
Caixa Postal – CEP 8040-900 - Florianópolis - SC – Brasil
e-mail: zambaldi@mtm.ufsc.br

** Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal da Paraíba
Caixa Postal 10069 CEP 58109-970 - Campina Grande - PB – Brasil
e-mail:marconde@lctf.ufpb.br

Key-Words: Volumes Finitos, Malhas Não-estruturadas de Voronoi, Implicitude variável, reservatórios de petróleo, métodos não-estacionários.

RESUMO. *O presente trabalho apresenta uma comparação entre dois métodos de solução de sistemas (GMRES e Bi-CGSTAB) aplicados a solução de problemas de reservatórios de petróleo empregando uma formulação de implicitude variável (AIM – Adaptive Implicit Method). O modelo físico é o black-oil, bifásico (óleo-água) e as equações são discretizadas empregando-se o método dos volumes finitos e foram utilizados malhas de Voronoi não-estruturadas para discretização do domínio físico. Como critério de chaveamento de implicitude foram utilizados os critérios de estabilidade e variação na saturação. Os resultados são apresentados em termos de tempo de CPU, número de iterações de Newton, número de iterações no solver e percentagem de implicitude.*

INTRODUÇÃO

As equações de conservação de massa dos componentes óleo, água ou gás podem ser consideradas hiperbólicas para a saturação (ou quase hiperbólicas, quando a pressão capilar é considerada e os fluidos são compressíveis) e a equação da pressão elíptica, ou quase elíptica (quando os efeitos de compressibilidade das fases ou rocha são considerados). Este fato sugere que na avaliação do fluxo de massa, num determinado instante de tempo, os termos que dependem da saturação podem ser avaliados com a saturação do instante de tempo anterior, e os termos que dependem da pressão sejam avaliados no mesmo instante de tempo em que o fluxo está sendo calculado, originando o esquema IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*). Este fato desacopla a equação da pressão das equações de saturação, originando um jacobiano cuja única incógnita é a pressão. Por outro, se tanto a pressão como as saturações são avançadas implicitamente, tanto a pressão como as saturações fazem parte do jacobiano. Se por um lado, o avanço implícito da pressão e das saturações torna o avanço das variáveis no tempo mais robusto, permitindo que maiores intervalos de tempo sejam empregados, o sistema linear resultante é muito maior, implicando diretamente no custo da obtenção da solução.

Baseado no fato de que o avanço explícito da pressão pode originar problemas de instabilidade, quando se emprega grandes intervalos de tempo, somente em algumas regiões do reservatório, como nas proximidades dos poços, Thomas e Thurnau¹ propuseram o uso do esquema AIM – Adaptive Implicit Method. Cujo conceito foi posteriormente melhorado por Forsyth Jr. e Sammon². A idéia do método implícito adaptativo é avançar todas as incógnitas implicitamente nas regiões onde o CFL é maior que um ou onde ocorram grandes variações nas saturações, e no restante do reservatório somente a pressão é tratada implicitamente. Neste esquema a matriz jacobina contém informação de células que são totalmente implícitas e de outras que são parcialmente implícitas, com este formato mudando de acordo com o avanço da solução no decorrer do tempo.

O objetivo do presente trabalho é analisar o comportamento de dois métodos de solução de sistemas lineares (GMRES – Saad e Schultz³) e (Bi-CGSTAB – van der Vorst⁴) na solução de problemas de reservatórios de petróleo empregando a metodologia AIM. O modelo empregado é o modelo black-oil (água-óleo) e as equações são discretizadas empregando-se o método dos volumes finitos aliado a uma discretização não-estruturada utilizando malhas de Voronoi, Palagi⁵ e marcondes *et. all.*⁶. Para geração dos diagramas de Voronoi empregou-se o gerador desenvolvido por Maliska Jr.⁷. Como critério de chaveamento de um volume de IMPES para TI e vice-versa foram adotados dois critérios: um baseado nas variações das saturações e outro baseado nos autovalores do sistema local da célula. Maiores detalhes podem ser encontrados em marcondes *et. all.*⁸ e Fung, *et. all.*⁹. Os sistemas lineares foram preconditionados a esquerda empregando-se uma fatoração ILU incompleta. Os resultados são apresentados em termos de tempo de CPU, número de iterações de Newton e no solver, erros de balanço nos componentes e percentagem de implicitude.

MODELO FÍSICO

O modelo físico empregado representa o escoamento bifásico (óleo-água) em reservatórios de petróleo. Apresenta-se agora uma breve descrição do modelo. Maiores detalhes podem ser encontrados em Palagi⁵. Assumindo que existe somente duas fases imiscíveis no reservatório (óleo (**o**) e água (**w**)) e desprezando os efeitos de pressão capilar e gravitacional, pode-se escrever a equação de conservação volumétrica para a fase **p** como

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_p}{B_p} \right) = \bar{\nabla} \cdot [\lambda_p \bar{\nabla} P] + q_p \quad (1)$$

onde **f** é a porosidade e **B_p** é o fator de formação volumétrica da fase **p**. **S_p** é a saturação da fase **p**, **P** é a pressão dos fluidos presentes no reservatório, **q_p** é a vazão nas condições de armazenamento da fase **p** por unidade de volume do reservatório e **λ_p** é a mobilidade da fase **p**, definida por

$$\lambda_p = K \frac{K_{rp}}{\mu_p B_p} \quad (2)$$

onde **K** é a permeabilidade absoluta do meio, **K_{rp}** a permeabilidade relativa e **μ_p** a viscosidade, respectivamente, da fase **p**.

Escrevendo a Eq. (1) para as fases óleo e água constata-se que existem três incógnitas (**S_o**, **S_w** e **P**) e apenas duas equações. A equação para o fechamento do problema vem da conservação da massa global, dada por

$$S_w + S_o = 1 \quad (3)$$

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

A Fig. 1 apresenta um volume de controle de Voronoi. O ponto **i** é o ponto gerador e os pontos **j**'s seus vizinhos. Para cada ponto **j** é possível alinhar um sistema cartesiano local **x'-y'** de tal forma que o eixo **x'** (linha que une o ponto **i** ao ponto **j**) seja perpendicular a face do volume de controle e o eixo **y'** paralelo a esta face.

Integrando a Eq. (1) no espaço e no tempo, tem-se

$$\left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi V S_p}{\Delta t B_p} \right)_i^n = \sum_{j=1}^{N_v} T_{ij} \lambda_{ij}^{n+\theta} (P_j^{n+1} - P_i^{n+1}) + \bar{q}_p^{n+\theta} \quad (4)$$

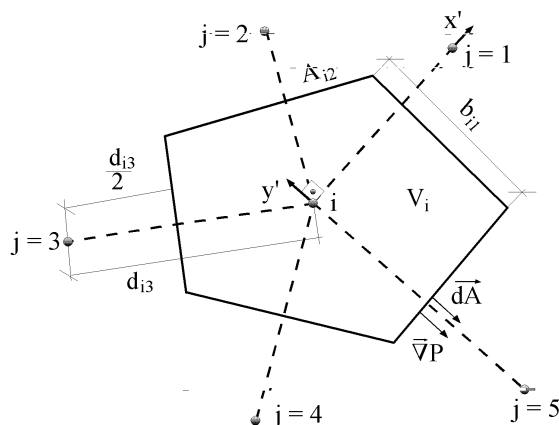


Fig. 1 - Volume de controle de Voronoi

O índice \mathbf{q} na Eq. (4) depende do tipo de metodologia empregada num certo instante de tempo, numa determinada região do reservatório. Se for mantido igual a um em todo o reservatório a metodologia será TI, se for igual a zero a metodologia será IMPES. Caso \mathbf{q} assuma em algumas regiões, valor igual a zero e em outras igual a um, a metodologia será AIM. \bar{q}_p é a vazão volumétrica da fase \mathbf{p} nas condições de superfície e N_v o número de vizinhos do volume \mathbf{i} . O termo \mathbf{T}_{ij} na Eq. (4) é o fator de transmissibilidade, dado por

$$\mathbf{T}_{ij} = \left(\frac{bhk}{d} \right)_{ij} \quad (5)$$

onde \mathbf{h} e \mathbf{b} são a altura e largura da face \mathbf{ij} , respectivamente.

METODOLOGIA AIM

O sistema de equações é resolvido iterativamente usando o método de Newton. Avaliando-se os termos de produção/injeção implicitamente e considerando que as mobilidades das fases podem ser implícitas ou explícitas pode-se escrever a Eq. (4) na forma residual como,

$$\mathbf{R}_{p,i} = \sum_{j=1}^{N_v} \mathbf{T}_{i,j} \left(\frac{\mathbf{K}_{rp}}{\mu_p \mathbf{B}_p} \right)_{ij}^{n+\theta} (\mathbf{p}_j^{n+1} - \mathbf{p}_i^{n+1}) + \bar{q}_{p,i}^{n+1} - \left(\frac{\phi \mathbf{V} \mathbf{S}_p}{\Delta t \mathbf{B}_p} \right)_i^{n+1} + \left(\frac{\phi \mathbf{V} \mathbf{S}_p}{\Delta t \mathbf{B}_p} \right)_i^n; p=o, w \quad (6)$$

Para o cálculo de $\left(\frac{\mathbf{K}_{rp}}{\mu_p \mathbf{B}_p} \right)_{ij}$ adotar-se-á o seguinte procedimento: $\mathbf{K}_{rp,ij}$ será calculado pelo esquema UDS (upstream weighting scheme) e $(\mu_p \mathbf{B}_p)_{ij}$ será calculado pela média aritmética dos correspondentes valores nos pontos \mathbf{ij} .

Expandindo o resíduo em série de Taylor, tem-se

$$\mathbf{R}_{p,i}^{v+1} = \mathbf{R}_{p,i}^v + \sum_{\forall x} \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{p,i}}{\partial \mathbf{X}} \right)^v \Delta \mathbf{X} \quad (7)$$

onde \mathbf{u} é o nível iterativo e \mathbf{X} representa as incógnitas (\mathbf{P} ou \mathbf{S}_w). Assumindo-se que o resíduo na iteração $\mathbf{u} + 1$ é zero, tem-se

$$\sum_{\forall x} \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{p,i}}{\partial \mathbf{X}} \right)^v \Delta \mathbf{X}^{v+1} = -\mathbf{R}_{p,i}^v; \mathbf{p} = \mathbf{o}, \mathbf{w} \quad (8)$$

As incógnitas são calculados após cada iteração newtoniana, como

$$\mathbf{X}^{v+1} = \mathbf{X}^v + \Delta \mathbf{X}^{v+1} \quad (9)$$

neste caso, \mathbf{X} denota \mathbf{P} e \mathbf{S}_w se ambas foram consideradas implícitas ou \mathbf{P} caso esta seja a única incógnita do implícita do volume.

Com o intuito de desacoplar as saturações da pressão dos volumes explícitos, a linha de blocos de cada volume é multiplicado pelo inverso do bloco da diagonal. Caso o volume seja tratado explicitamente, este processo origina duas equações, na qual a primeira representa a equação da pressão e a segunda a equação da saturação, a qual é desacoplada da equação da pressão, maiores detalhes marcondes, et all.⁸. O sistema a ser resolvido para a pressão e saturação dos volumes implícitos é dado por,

$$[\mathbf{J}]^v \Delta \mathbf{X}^{v+1} = -\mathbf{R}^{*v} \quad (10)$$

onde, \mathbf{R}^{*v} é o vetor resíduo multiplicado pela inversa da matriz do bloco diagonal de cada volume de controle. Resolvido o sistema dado pela Eq. (10), obtém-se \mathbf{P} e \mathbf{S}_w para os volumes implícitos através da Eq. (9). Para a região explícita \mathbf{S}_w é obtido através da Eq. (11), onde onde \mathbf{J}_{ij} representa os coeficientes da segunda linha de \mathbf{i} após a multiplicação pela matriz inversa da diagonal. Observe que após o processo de multiplicação de cada linha bloco do jacobiano pelo inverso do bloco diagonal de cada linha os elementos finais do jacobiano podem ser 1x2, 2x1, 2x2 ou 1x1.

$$\mathbf{S}_{w,i}^{n+1} = \sum_{j=1, j \neq i}^{N_v} \Delta \mathbf{X}_j^{v+1} \mathbf{J}_{ij} + \mathbf{R}_{w,i}^{*v} \quad (11)$$

SOLUÇÃO DOS SISTEMAS LINEARES

Considere o sistema linear,

$$Jx = R \tag{12}$$

onde J é a matriz jacobiana e x é o vetor solução e R é a função resíduo. Observe que Δx , na Eq. (9) foi substituído por x na Eq. (12), por simplicidade. Os métodos iterativos não-estacionários, em geral, utilizados para a solução deste tipo de sistema, apresentam taxa de convergência lenta. Com o objetivo de melhorar a taxa de convergência destes métodos, resolve-se o sistema equivalente,

$$JM^{-1}z = R \text{ e } x = M^{-1}z \tag{13}$$

onde, M é denominada matriz de condicionamento e deve ser ao mesmo tempo, uma boa aproximação do jacobiano e sua fatoração fácil de ser obtida. No presente trabalho, empregou-se uma fatoração incompleta ILU(1), Marcondes *et. al*¹⁰.

Método GMRES

No método GMRES (sem condicionamento) de Saad e Schultz³, a cada passo minimiza-se a norma do vetor $\|R - J(x_0+z)\|$, onde z é um membro do subespaço de Krylov $K_m = \text{span}\{r_0, Jr_0, \dots, J^{(k-1)}r_0\}$. Na prática a dimensão m do espaço de Krylov é determinada no sentido de reduzir o custo do algoritmo como também a restrição de memória. No processo de minimização, busca-se uma base ortonormal de K_m e posteriormente resolve-se um problema de quadrados mínimos. Os resultados deste trabalho correspondem à utilização do método de Gram-Schmidt modificado sucedido por rotações no plano.

Algoritmo.

Passo 1 – inicialização

$$r_0 = R - Jx_0 ; v_1 = r_0 / \|r_0\| \text{ e } e_1 = \|r_0\|$$

Passo 2 – iteração do GMRES

Para $j=1, \dots, m$

$$Z_j = M^{-1} v_j$$

Passo 3 – ortogonalização de Gram-Schmidt modificado

Para $i=1, \dots, j$

$$u_{i,j} = (w, v_i)$$

$$w \leftarrow w - u_{i,j} v_i$$

$$u_{j+1,j} = \|w\|$$

$$v_{j+1} = w / u_{j+1,j}$$

$$\hat{U}_j = \{u_{1,j}, \dots, u_{j+1,j}\}^T$$

Passo 4 – Algoritmo QR (rotações de Givens)

Para $i=1, \dots, j-1$

$$\begin{Bmatrix} u_{i,j} \\ u_{i,j+1} \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i,j} \\ u_{i,j+1} \end{Bmatrix}$$

$$\gamma = [u_{i,j}^2 + u_{i,j+1}^2]^2$$

$$c_j = u_{i,j}/\gamma$$

$$s_j = u_{i,j+1}/\gamma$$

rotação aplicadas a \hat{U}

$$u_{i,j} \leftarrow \gamma$$

$$u_{i,j+1} \leftarrow 0$$

rotação aplicada a e

$$e_{j+1} \leftarrow -s_j e_j$$

$$e_j \leftarrow -c_j e_j$$

se $|e_{j+1}| < \text{TOL}$ saia do loop j

Passo 5 – resolver y

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{j,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_{j,j} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \end{Bmatrix}$$

Passo 6 – resolve x

$$x = x_o + Z_m y_m$$

se $\|r_i\|/\|r_o\| < \text{TOL}$ pare

senão

Passo 7 – recomeço

$$r_o = R - Jx_m$$

$$x_o = x_m \text{ e } v_1 = r_o / \|r_o\|, \text{ vá para o passo 2}$$

No algoritmo apresentado e é o vetor canônico de $m+1$ componentes, TOL é a tolerância e $Z_m = [z_1, \dots, z_m]$.

Método Bi-CGSTAB

O Bi-CGSTAB, de van der Vorst⁴, foi desenvolvido no sentido de corrigir “frequentes irregularidades” no processo de convergência do método CGS (Conjugate Gradient Squared, Sonneveld¹¹), por um tipo de minimização local do vetor resíduo. O CGS pode ser visto como um método no qual o operador contração do BiCG (BiConjugate Gradient, Voevodin¹²) é aplicado duas vezes. O Bi-CGSTAB pode ser interpretado como o produto do BiCG e repetidamente aplicado o GMRES (1). Ao menos localmente, o vetor resíduo é minimizado, o qual conduz a uma convergência suave, Barrett *et al.*¹³.

Algoritmo Bi-CGSTAB

$$r_0 = R - Jx_0$$

$$\hat{r} = r_0; \rho_0 = \alpha_0 = \omega_0 = 1$$

$$v_0 = p_0 = 0$$

para $i=1,2,\dots$

$$\rho_i = (\hat{r}, r_{i-1})$$

$$\beta_{i-1} = (\rho_i / \rho_{i-1}) / (\alpha_{i-1} / \omega_{i-1})$$

$$p_i = r_{i-1} + \beta_{i-1} (p_{i-1} - \alpha_{i-1} v_{i-1})$$

$$\hat{p} = M^{-1} p_i$$

$$v_i = J \hat{p}$$

$$\alpha_i = \rho_i / (\hat{r}, v_i)$$

$$s_i = r_{i-1} - \alpha_{i-1} v_i$$

$$\hat{s} = M^{-1} s_i$$

$$t = J \hat{s}$$

$$\omega_i = (t, s) / (t, t)$$

$$x_i = x_{i-1} + \alpha_i \hat{p} + \omega_i \hat{s}$$

$$r_i = s - \omega_i t$$

se $\|r_i\| / \|r_0\| < \text{TOL}$ pare

senão

$$x_{i-1} = x_i; \alpha_{i-1} = \alpha_i; \omega_{i-1} = \omega_i; \rho_{i-1} = \rho_i$$

A Tab. 1 apresenta o número aproximado de operações para cada um dos métodos. Observa-se que o Bi-CGSTAB realiza um produto matriz-vetor e resolve um sistema

aproximado a mais que o GMRES. Isto em alguns casos pode prejudicar a convergência do método em termos de tempo de CPU.

Tab. 1 – Número de operações dos métodos para i iterações

MÉTODO	(x,y)	$y + \alpha x$	$Y = Jx$	$y = M^{-1}x$
GMRES	$i + 1$	$i + 1$	1	1
Bi-CGSTAB	4	6	2	1

RESULTADOS

Todos os casos analisados nesta seção foram obtidos com os seguintes critérios: DP^*_{\max} igual a 68,95 kPa e $DS^*_{w,\max}$ igual a 5×10^{-3} . Uma nova iteração newtoniana foi requerida quando em algum volume as variações na saturação e pressão ultrapassaram valores predeterminados, independentemente da saturação ser explícita ou implícita. O critério de parada no *solver* foi $\|r\|/\|r_0\| \leq 10^{-3}$, onde $\|r\|$ é a norma do resíduo após um determinado número de iterações e $\|r_0\|$ o resíduo inicial.

Antes de apresentar as comparações das metodologias, explicar-se-á como foi aplicado o critério de estabilidade proposto por Fung *et al.*⁹. No trabalho destes autores foi aplicado a metodologia AIM para problemas trifásicos (óleo, gás e água). Desta forma, o critério de estabilidade requer o cálculo de três autovalores em cada volume. Para evitar o cálculo dos autovalores em todos os volumes, Fung *et al.*⁹ propuseram que só fossem calculados os autovalores na fronteira entre regiões implícitas e explícitas. Onde existisse uma troca nas células testadas nesta região, todos os vizinhos explícitos deveriam ser testados se a troca é de explícito para implícito (troca à frente) ou nos vizinhos implícitos se a troca é de implícito para explícito (troca para trás), repetindo-se este procedimento até que nenhum volume devesse ser trocado. No presente trabalho, foram calculados os autovalores para todos os volumes. Observe-se que com a hipótese de incompressibilidade dos fluidos é necessário calcular somente um autovalor por volume. Mesmo calculando-se os autovalores para todas as células observou-se somente uma pequena parcela de células implícitas. Desprezando-se a hipótese de incompressibilidade os resultados foram idênticos. Para os resultados que serão expostos, foram testados o critério de estabilidade juntamente com critério de mudança na saturação.

Nas tabelas a seguir, \mathbf{I}_1 é o limite para troca à frente, \mathbf{I}_2 o limite para troca para trás e DS_w é a variação na saturação da água empregada para troca de implicitude. Utilizando o critério na saturação, sempre que uma célula foi trocada todos os seus vizinhos foram checados. Para troca para trás foram realizados alguns testes para descobrir a frequência com que a mesma deveria ser realizada. A troca a cada 20 iterações no tempo forneceu bons resultados. Foram testados as seguintes frequências: 10, 20, 30 e 50. Todos os testes foram realizados numa estação de trabalho SUN SPARC Ultra10 com 256 Mbytes de RAM. Os tempos de CPU apresentados foram normalizados dividindo-se o tempo de computação pelo tempo de

computação mínimo entre os métodos. Os mesmos referem-se a montagem do Jacobiano, lado direito (função resíduo) e tempo no *solver*. Com o intuito de verificar a robustez dos algoritmos de solução dos sistemas lineares testou-se vários critérios de chaveamento de implicitude.

Para verificar os erros de conservação nos componentes óleo e água foi calculado um erro global durante toda a simulação para cada componente (**EBC_p**), de acordo com a Eq. (14). O numerador da Eq. (14), a cada instante da simulação, representa o erro no volume da fase **p** medido desde o instante inicial da simulação e o denominador o volume de água injetada.

$$EBC_p = (V_{i,p} + \sum \bar{q}_{wi}\Delta t - \sum \bar{q}_{pp}\Delta t - V_{f,p}) / \sum \bar{q}_{wi}\Delta t \quad (14)$$

onde, **V_{i,p}** é o volume inicial da fase **p**, **V_{f,p}** o volume final da fase **p** avaliada em um determinado instante de tempo, \bar{q}_{wi} o volume total de água injetada em cada intervalo de tempo e \bar{q}_{pp} o volume total de água produzida em cada intervalo de tempo.

Nas tabelas que seguem G e B referem-se respectivamente, ao GMRES e ao Bi-CGSTAB. NIS é o número total de iterações no solver, NIN número de iterações de Newton e NIT número de iterações no tempo.

O primeiro caso analisado é para o escoamento cujas curvas de permeabilidade relativa são funções quadráticas da saturação. Os dados físicos e geométricos encontram-se na Tab. 2 e as curvas de permeabilidade relativa e razão de viscosidade são fornecidas pela Eq. (15). A Fig. 2 apresenta a malha hexagonal-híbrida empregada. As Tabs. 3 e 4 apresentam os resultados M=10 e 50, respectivamente.

$$K_{rw} = \frac{S_w^2}{M(1 - S_w^2) + S_w^2}; K_{ro} = 1 - K_{rw}; M = \frac{\mu_o}{\mu_w} \quad (15)$$

Tab. 2 - Dados físicos e geométricos do reservatório - caso 1

Dados do reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$k = 12,5 \times 10^{-15} \text{ m}^2$	$S_{wi} = 0$	$B_o = B_w = 1 \text{ a } 0 \text{ Pa}$
$h = 6,09 \text{ m}$	$P_i = 6,893 \times 10^5 \text{ Pa}$	$\mu_o = 10^{-3} \text{ Pa.s}$
$A = 1,6 \times 10^5 \text{ m}^2$	$S_{or} = 0$	$\mu_w = 1/M \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$
$\phi = 0,08$		$c_o = c_w = 1,45 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$
$R_w = 0,0914 \text{ m}$		$ \bar{q}_{ii} = \bar{q}_{wi} = 1,10 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

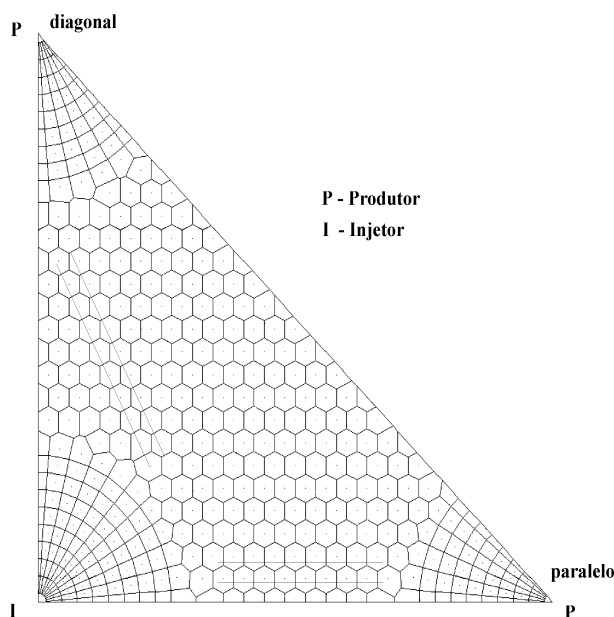


Fig. 2 - Malha hexagonal híbrida com 445 volumes

Tab.3 – Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes – M=10 – 1,82 VPI – menor tempo de CPU= 30,99 s.

Critério ($\lambda_1-\lambda_2-\Delta S_w$)	TCPU		NIT		NIN		PI (%)		NIS		EBC _o x10 ⁴		EBC _w x10 ⁴	
	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
1,0-0,8	1,03	1,08	381	381	541	541	4,93	4,93	9885	7990	3,81	3,72	0,29	4,77
1,0-0,9	1,03	1,18	381	381	541	541	4,60	4,60	9849	8018	3,86	3,86	0,56	3,34
0,8-0,6	1,02	1,16	380	380	529	529	6,43	6,43	9746	7797	3,46	3,40	0,19	3,23
1,0-0,8-0,01	1,00	1,14	359	359	509	509	12,96	12,95	9187	7379	3,12	2,94	0,73	2,31
1,0-0,8-0,02	1,00	1,14	360	360	515	515	10,22	10,22	9316	7510	4,10	3,90	1,75	3,80
1,0-0,8-0,05	1,06	1,22	372	372	550	550	6,35	6,35	10014	8158	3,76	3,45	0,40	4,80
0,01	1,29	1,53	359	359	514	514	64,45	64,52	9258	7582	3,11	2,88	1,18	3,34
0,02	1,26	1,49	359	359	517	517	56,59	56,59	9425	7690	4,21	4,06	0,32	4,63
0,05	1,39	1,60	374	374	630	630	31,08	30,97	11940	9508	4,17	4,12	16,70	23,80

Da Tab. 3 pode-se verificar que para cada critério empregado (λ_1 - λ_2 - ΔS_w), o GMRES e o Bi-CGSTAB produziram resultados bastantes similares em termos de NIT, NIN, PI e EBCp. Por outro lado, em todos os casos testados o número de iterações no solver foi menor para o Bi-CGSTAB. No entanto, este decréscimo no número de iterações não foi suficiente para o Bi-CGSTAB requerer um menor tempo de CPU quando comparado com o GMRES. Uma possível causa para isto pode ser motivada pelos motivos anteriormente expostos na Tab. 1.

A Fig. 3 apresenta uma curva de $\|r\|/\|r_0\|$ versus número de iterações para o GMRES e Bi-CGSTAB durante um determinado tempo de simulação numa iteração de Newton. Observa-se que a taxa de convergência do GMRES é um pouco mais lenta que a do Bi-CGSTAB. No entanto, a convergência do GMRES é bem suave.

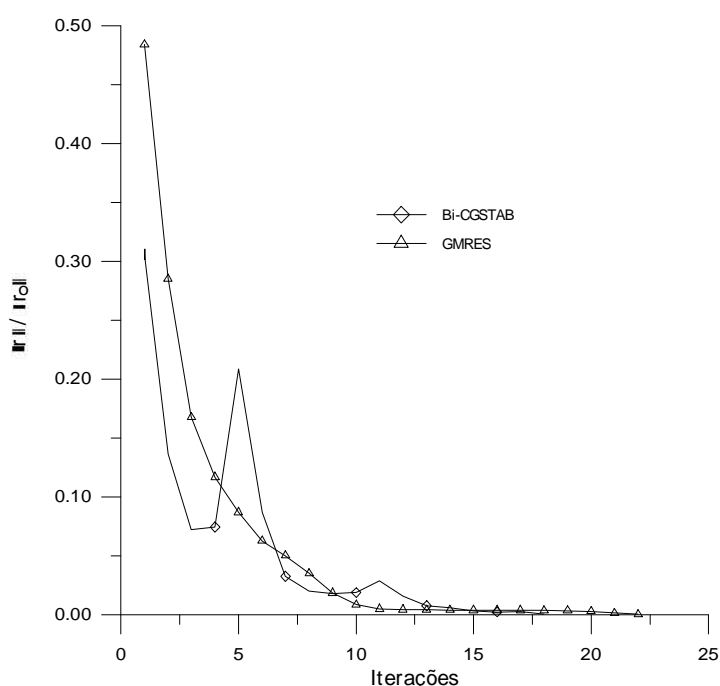


Fig. 3 – Razão de resíduos - Configuração de cinco poços – $vp_{dinj} = 6,95 \times 10^{-2}$ – $M = 10$

Os resultados apresentados na Tab. 4 e Fig. 4 para $M=50$, apresentam comportamento similar àqueles da Tab. 3. A diferença principal em relação ao escoamento para $M=10$ é que o escoamento é mais instável devido a maior razão de viscosidade óleo/água. Novamente, observa-se um comportamento similar em termos de tempo de CPU e razão de convergência.

Pode-se verificar no gráfico da Fig. 4, que o comportamento do GMRES é substancialmente mais suave, não apresentando eventuais oscilações no processo de convergência como ocorre em algumas iterações do Bi-CGSTAB. Este último entretanto, mesmo no caso de apresentar irregularidades no processo iterativo, a convergência é alcançada.

Tab.4 – Malha hexagonal-híbrida com 445 volumes – M=50 – 1,82 VPI – menor tempo de CPU= 26,88 s.

Critério ($\lambda_1 - \lambda_2 - \Delta S_w$)	TCPU		NIT		NIN		PI (%)		NIS		EBC _o x10 ⁴		EBC _w x10 ⁴	
	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
1,0-0,8	1,30	1,49	362	362	592	593	7,73	7,74	9669	8125	7,36	6,86	0,22	0,10
1,0-0,9	1,27	1,46	362	362	578	578	7,33	7,33	9531	8089	7,24	6,73	0,22	0,11
0,8-0,6	1,38	1,60	361	361	617	616	11,21	11,20	10361	8125	5,30	6,86	0,22	0,10
1,0-0,8-0,01	1,00	1,19	346	346	442	442	13,63	13,63	7350	6654	7,21	6,72	0,18	9,14
1,0-0,8-0,02	1,24	1,42	348	348	563	563	13,40	13,40	8979	7841	8,35	7,96	0,19	0,10
1,0-0,8-0,05	1,13	1,32	357	357	497	497	8,79	8,79	8637	7513	6,84	6,25	0,19	9,62
0,01	1,27	1,57	344	344	445	445	67,06	67,06	7365	6649	7,64	7,07	0,19	0,13
0,02	1,72	2,04	347	347	639	639	59,91	59,91	10082	8574	8,05	7,57	0,21	0,13
0,05	2,05	2,37	367	367	832	824	31,66	31,74	13835	11564	8,34	7,94	0,18	0,54

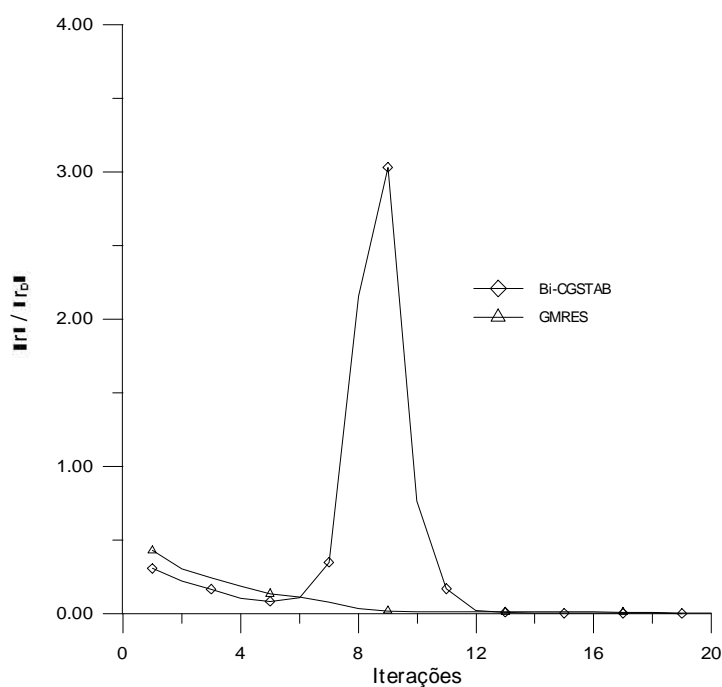


Fig. 4 – Razão de resíduos – Configuração de cinco poços - $vpdinj = 1,31 \times 10^{-2}$ – M = 50

A Tab. 5 apresenta os dados para uma configuração mais realista do ponto de vista de reservatório de petróleo. As curvas de permeabilidade relativa e viscosidades são dados pela Eq. (15) e (16), respectivamente. A Fig. 5 apresenta a malha hexagonal-híbrida empregada. O resultado desta comparação estão listados na Tab. 6.

$$K_{rw} = (S_w - 0,2)(-250S_w^2 + 325S_w - 55)/27 \quad (15)$$

$$K_{ro} = 1 - K_{rw}$$

$$\mu_w = 10^{-3}(1 + 1.45 \times 10^{-12}(P - 1.37 \times 10^7)) \text{ [Pa.s]} \quad (16)$$

$$\mu_o = 1.163 \times 10^{-3}(1 + 1.45 \times 10^{-12}(P - 1.37 \times 10^7)) \text{ [Pa.s]}$$

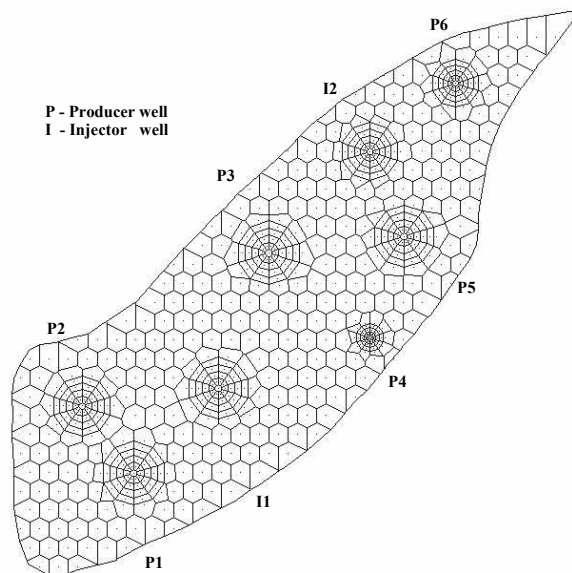


Fig. 5 – Malha hexagonal-híbrida com 672 volumes

Tab. 5 – Dados físicos e geométricos – configuração de oito poços

Dados do Reservatório	Condição inicial	Propriedades físicas
$k = 3,0 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ $h = 15 \text{ m}$ $A = 1,82 \times 10^6 \text{ m}^2$ $f = 0,30$ $r_w = 0,122 \text{ m}$	$S_{wi} = 0,20$ $P_i = 2,068427 \times 10^7 \text{ Pa}$ $S_{or} = 0,20$	$B_o = B_w = 1$ a $2,068427 \times 10^7 \text{ Pa}$ $P_c = 0$ $C_o = c_w = 7,25 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$ $\bar{q}_{p1} = \bar{q}_{p3} = -9,2 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p2} = -1,1 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p4} = -5,52 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{p5} = \bar{q}_{p6} = -7,36 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i1} = 2,94 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$ $\bar{q}_{i2} = 2,024 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

Tab. 6 – Configuração de oito poços - Malha hexagonal-híbrida com 672 volumes – 1,82 VPI menor tempo de CPU= 39,58 s.

Critério ($\lambda_1 - \lambda_2 - \Delta S_w$)	TCPU		NIT		NIN		PI (%)		NIS		EBC _o x 10 ⁴		EBC _w x 10 ⁴	
	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B	G	B
1,0-0,8	1,02	1,21	455	460	553	563	3,94	3,90	8011	6284	3,51	1,85	2,17	1,92
0,8-0,6	1,03	1,19	456	455	556	551	5,34	5,28	8067	6035	1,62	1,03	1,14	0,57
0,8-0,6-0,01	1,05	1,17	455	455	553	533	7,06	7,46	8048	5877	2,27	2,08	1,41	1,69
1,0-0,8-0,01	1,00	1,17	455	455	532	532	6,25	6,25	7700	5898	2,47	2,40	1,10	1,82
1,0-0,8-0,02	1,05	1,23	455	455	559	559	6,10	6,10	8161	6263	2,74	2,65	1,47	2,12
0,01	1,16	1,40	455	455	542	542	34,29	34,29	7973	6394	2,47	2,41	1,23	1,94
0,02	1,22	1,44	457	457	595	595	25,61	25,61	8749	6805	6,78	6,05	4,56	0,20

Novamente, o GMRES foi o método que requereu o maior número de iterações, mas consumiu o menor tempo de CPU, mesmo observando-se que o Bi-CGSTAB requereu aproximadamente 20% menos iterações que o GMRES. A Fig. 6 apresenta a razão $\|\mathbf{r}\|/\|\mathbf{r}_0\|$ versus número de iterações. Neste ponto da solução o Bi-CGSTAB apresentou uma taxa de convergência suave e similar ao GMRES.

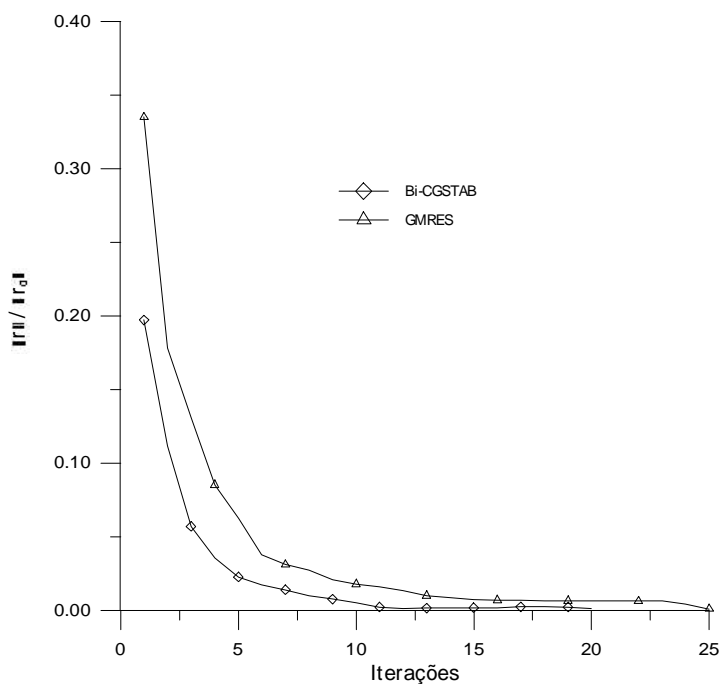


Fig. 6 – Razão de resíduos - Configuração de oito poços – $vpdinj = 2,77 \times 10^{-2}$

CONCLUSÕES

Os resultados numéricos do presente trabalho mostram o desempenho de dois métodos iterativos não estacionários, GMRES e Bi-CGSTAB, usualmente recomendado na literatura científica, para problemas que exigem várias iterações de Newton. Nos diferentes casos, e com malhas diferentes, fica constatado que o GMRES apresenta um desempenho mais uniforme no que se refere ao comportamento de todo o processo iterativo. Embora apresentando um número maior de iterações, o GMRES demanda menor tempo computacional. Em geral este método demanda menor número de operações desde que a base do espaço de Krylov associado não tenha dimensão elevada. Embora isto possa ocorrer em algumas aplicações não foi o caso no presente trabalho. Cabe ressaltar ainda que os recomenços no processo de ortogonalização do GMRES são uma maneira de superar esta possível limitação do método. O Bi-CGSTAB por sua vez, apresenta certas irregularidades no processo iterativo. Embora este fato não comprometa a convergência à solução em cada iteração de Newton, este método apresenta um custo por iteração que pode comprometer seu desempenho considerando toda a simulação numérica. De qualquer forma, o fato de este método exigir um número menor de iterações que o GMRES é significativo.

Como o processo de solução dos sistemas lineares representam o trabalho computacional básico para o tipo de modelo que foi considerado neste trabalho, a avaliação do desempenho dos métodos iterativos e temas relacionados como preconditionamento são temas relevante nesta linha de pesquisa. Os métodos considerados neste trabalho mostraram robustez

no processo de convergência e futuras experiências numéricas necessariamente deveriam considerá-los como base de comparação.

REFERÊNCIAS

- [1] Thomas, G. W. e Thurnau, D. H., "Reservoir Simulating Using an Adaptive Implicit Method", *Soc. Pet. Eng. J.*, 1983, pp. 759-768.
- [2] Forsyth Jr., P. A. e Sammon, P. H., "Practical Considerations for Adaptive Implicit Methods in Reservoir Simulation", *Journal of Comput. Physics*, 62, 1986, pp. 265-281.
- [3] Saad, Y. e Schultz, M. H., "GMRES: A General Minimal residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7, 1986, pp. 856-869.
- [4] Van der Vorst, H. A., "Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the solution of Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13, pp. 631-644, 1992.
- [5] Palagi, C., "Generation and Application of Voronoi Grid to Model Flow in Heterogeneous Reservoirs", PhD dissertation, Stanford University, Stanford, 1992.
- [6] Marcondes, F., Zambaldi, M. C. e Maliska, C. R., "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo Utilizando Malhas de Voronoi", *V ENCIT*, São Paulo, SP, Dez, 1994.
- [7] Maliska Jr., C. R., "Um Robusto Gerador de Diagramas de Voronoi para Discretização de Domínios Irregulares", *XIV CILAMCE*, São Paulo, SP, Dezembro, 1993.
- [8] Marcondes, F., Maliska, C. R. e Zambaldi, M. C., "A comparative Study of IMPES, AIM and TI Methodologies Using Non-Structured Voronoi Meshes in Petroleum Reservoir Simulation", submetido ao *SPE journal*, 1999.
- [9] Fung, L. S. K., Collins, D. A., Nghiem, L. X., "An Adaptive-Implicit Switching Criterion Based on Numerical Stability Analysis", *SPE Reservoir engineering*, 1989.
- [10] Marcondes, F., Zambaldi, M. C. e Maliska, C. R., "Comparação de Métodos Iterativos não Estacionários em Malhas não Estruturadas de Voronoi na Solução de Problemas de Petróleo", *XIII COBEM*, Belo Horizonte, MG, 1995.
- [11] Sonneveld, P., "CGS: A Fast Lanczos-Type Solver for Nonsymmetric Linear Systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 10, pp. 36-52, 1989.
- [12] Voevodin, V., "The problem of Non-Self-Adjoint Generalization of the Conjugate Gradient Method is Closed", *U.S.S.R. Comput. Methods and Math. Phys.*, 23, pp. 143-144, 1983.
- [13] Barret, R., Berry M., Chant, T., Demmed, J., Donato, J., Dongorra, J., Eijkhout, V., Pozo, R., Romine, C. e van der Vorst, H., *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM, Philadelphia, 1994.