

GERAÇÃO DE MALHAS PARA DOMÍNIOS TRIDIMENSIONAIS ARBITRÁRIOS EM  
COORDENADAS GENERALIZADAS USANDO MÉTODO ELÍPTICO

Carlos Henrique Marchi e José Valerim Júnior

Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos  
e Transferência de Calor - SINMEC  
Depto. Engenharia Mecânica - UFSC  
Cx. Postal, 476 - 88049 - Florianópolis - SC

INTRODUÇÃO

Para resolver numericamente problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor a geometria do problema deve ser discretizada.

Existem vários métodos para discretização, ou geração de malhas, como os manuais, algébricos e elípticos.

Neste artigo apresentamos um método elíptico para discretização de domínios tridimensionais, com geometria arbitrária em coordenadas que se adaptam às fronteiras, através da solução numérica de três equações de Poisson; e dois exemplos de aplicação.

MÉTODO ELÍPTICO PARA GERAÇÃO DE MALHAS TRIDIMENSIONAIS

Para a obtenção de um sistema de coordenadas existem vários métodos, como os descritos em [1]. O sistema de geração de coordenadas apresentado aqui é coincidente com as fronteiras e obtido através da solução de equações diferenciais [2]. A motivação principal para a utilização de equações diferenciais elípticas na geração de coordenadas tem base na solução de problemas de condução de calor [3].

O sistema de equações para a geração de malhas tridimensionais é dado por

$$\xi_{xx} + \eta_{xx} + \gamma_{xx} = P(\xi, \eta, \gamma) \quad (1)$$

$$\xi_{yy} + \eta_{yy} + \gamma_{yy} = Q(\xi, \eta, \gamma) \quad (2)$$

$$\xi_{zz} + \eta_{zz} + \gamma_{zz} = R(\xi, \eta, \gamma) \quad (3)$$

onde os subscritos representam derivadas parciais de segunda ordem e P, Q e R são expressões utilizadas para concentrar linhas coordenadas nas regiões de interesse; existem vários tipos dessas expressões, como aquelas apresentadas em [4].

Manter as coordenadas X, Y e Z como variáveis independentes nas Eq. (1), (2) e (3) requer a solução de equações diferenciais parciais em domínios irregulares, exatamente o problema que deseja-se evitar devido a necessidade de interpolações para aplicação das condições de contorno. A alternativa é transformar o sistema de equações do espaço físico (X, Y, Z) para o espaço transformado ( $\xi, \eta, \gamma$ ). Após esta transformação as variáveis  $\xi, \eta$  e  $\gamma$  se tornam as variáveis independentes e X, Y e Z as dependentes. Desta forma, as condições de contorno são os valores de X, Y e Z que definem a geometria e, ao mesmo tempo, especificam a distribuição das linhas coordenadas ao longo das fronteiras. As equações transformadas podem ser apresentadas na forma genérica dada pela Eq. (4), onde  $\phi$  representa X, Y ou Z. A equação transformada genérica é dada por

$$\alpha_{11}\phi_{\xi\xi} + \alpha_{22}\phi_{\eta\eta} + \alpha_{33}\phi_{\gamma\gamma} + 2(\alpha_{12}\phi_{\xi\eta} + \alpha_{13}\phi_{\xi\gamma} + \alpha_{23}\phi_{\eta\gamma}) + \frac{1}{J^2}(P\phi_{\xi} + Q\phi_{\eta} + R\phi_{\gamma}) = 0 \quad (4)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (z_{\gamma}y_{\eta} - z_{\eta}y_{\gamma})^2 + (z_{\eta}x_{\gamma} - z_{\gamma}x_{\eta})^2 + (y_{\gamma}x_{\eta} - y_{\eta}x_{\gamma})^2 \\ \alpha_{22} &= (z_{\xi}y_{\gamma} - z_{\gamma}y_{\xi})^2 + (z_{\gamma}x_{\xi} - z_{\xi}x_{\gamma})^2 + (y_{\xi}x_{\gamma} - y_{\gamma}x_{\xi})^2 \\ \alpha_{33} &= (z_{\eta}y_{\xi} - z_{\xi}y_{\eta})^2 + (z_{\xi}x_{\eta} - z_{\eta}x_{\xi})^2 + (y_{\eta}x_{\xi} - y_{\xi}x_{\eta})^2 \\ \alpha_{12} &= (z_{\gamma}y_{\eta} - z_{\eta}y_{\gamma})(z_{\xi}y_{\gamma} - z_{\gamma}y_{\xi}) + (z_{\eta}x_{\gamma} - z_{\gamma}x_{\eta})(z_{\gamma}x_{\xi} - z_{\xi}x_{\gamma}) + (y_{\gamma}x_{\eta} - y_{\eta}x_{\gamma})(y_{\xi}x_{\gamma} - y_{\gamma}x_{\xi}) \\ \alpha_{13} &= (z_{\gamma}y_{\eta} - z_{\eta}y_{\gamma})(z_{\eta}y_{\xi} - z_{\xi}y_{\eta}) + (z_{\eta}x_{\gamma} - z_{\gamma}x_{\eta})(z_{\xi}x_{\eta} - z_{\eta}x_{\xi}) + (y_{\gamma}x_{\eta} - y_{\eta}x_{\gamma})(y_{\eta}x_{\xi} - y_{\xi}x_{\eta}) \end{aligned} \quad (5)$$

XII CNMAC, SÃO JOSÉ DO RIO PRETO, 4-8 SET. 1989.

$$\alpha_{23} = (z_\xi y_\gamma - z_\gamma y_\xi)(z_\eta y_\xi - z_\xi y_\eta) + (z_\gamma x_\xi - z_\xi x_\gamma)(z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi) + (y_\xi x_\gamma - y_\gamma x_\xi)(y_\eta x_\xi - y_\xi x_\eta)$$

são as componentes do tensor métrico e o jacobiano da transformação J é

$$J = [ x_\xi y_\eta z_\gamma + x_\eta y_\gamma z_\xi + x_\gamma y_\xi z_\eta - x_\xi y_\gamma z_\eta - x_\eta y_\xi z_\gamma - x_\gamma y_\eta z_\xi ]^{-1} \quad (6)$$

Os subscritos das Eq. (5) e (6) representam derivadas parciais de primeira ordem. As derivadas de primeira e segunda ordens das Eq. (4) a (6) foram aproximadas numericamente através de diferenças finitas central [4], resultando em

$$\begin{aligned} A_p \phi_P = & A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_n \phi_N + A_s \phi_S + A_d \phi_D + A_f \phi_F + \\ & A_{ne} \phi_{NE} + A_{sw} \phi_{SW} + A_{nw} \phi_{NW} + A_{se} \phi_{SE} + A_{de} \phi_{DE} + A_{fw} \phi_{FW} + \\ & A_{fe} \phi_{FE} + A_{dw} \phi_{DW} + A_{dn} \phi_{DN} + A_{fs} \phi_{FS} + A_{fn} \phi_{FN} + A_{ds} \phi_{DS} \end{aligned} \quad (7)$$

onde

$$\begin{aligned} A_p = & 2(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) \\ A_e = & \alpha_{11} + \frac{P}{2J^2} & A_w = & \alpha_{11} - \frac{P}{2J^2} \\ A_n = & \alpha_{22} + \frac{Q}{2J^2} & A_s = & \alpha_{22} - \frac{Q}{2J^2} \\ A_d = & \alpha_{33} + \frac{R}{2J^2} & A_f = & \alpha_{33} - \frac{R}{2J^2} \\ A_{ne} = A_{sw} = & \frac{\alpha_{12}}{2} & A_{nw} = A_{se} = & \frac{-\alpha_{12}}{2} \\ A_{de} = A_{fw} = & \frac{\alpha_{13}}{2} & A_{fe} = A_{dw} = & \frac{-\alpha_{13}}{2} \\ A_{dn} = A_{fs} = & \frac{\alpha_{23}}{2} & A_{fn} = A_{ds} = & \frac{-\alpha_{23}}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Os subscritos das Eq. (7) e (8) seguem a nomenclatura da Fig. 1.

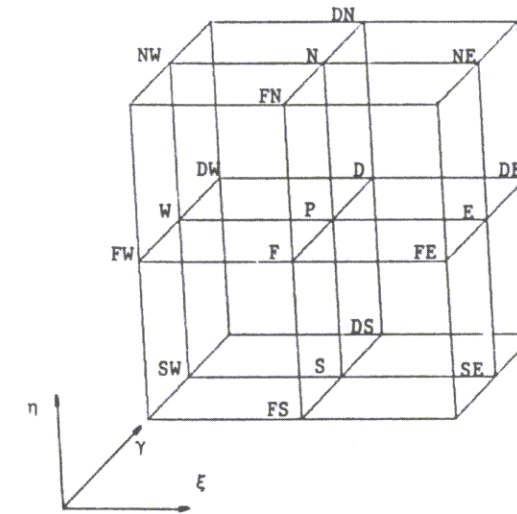


Figura 1. Nomenclatura utilizada para aproximar numericamente as derivadas das Eq. (4) a (6).

Os três sistemas lineares de equações, representados pela Eq. (7), foram resolvidos numericamente usando o método SOR (sobre-relaxações sucessivas).

#### EXEMPLOS DE MALHAS TRIDIMENSIONAIS GERADAS USANDO O MÉTODO ELÍPTICO

Dois exemplos de geração de malhas tridimensionais são apresentados abaixo.

O primeiro, mostrado na Fig. 2, é a discretização de um quarto de um duto, que começa com face circular e termina com face retangular e não paralela à face circular, com atração das linhas coordenadas para os lados esquerdo, direito, inferior e superior. Na Fig. 2 são representadas as faces frontal e dorsal, que são condições de contorno, e duas superfícies internas que foram geradas.

O segundo exemplo, mostrado nas Fig. 3 a 5, apresenta a geração de uma malha tridimensional sobre a parte frontal de um foguete tipo hammer-head. A Fig. 3 mostra o corpo do foguete cuja superfície é condição de contorno. Na Fig. 4 é representado o foguete mostrado na

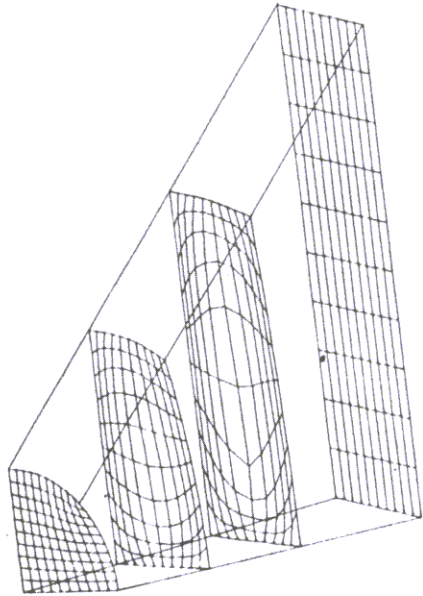


Figura 2. Planos  $\gamma$  de uma malha 3D sobre um duto.

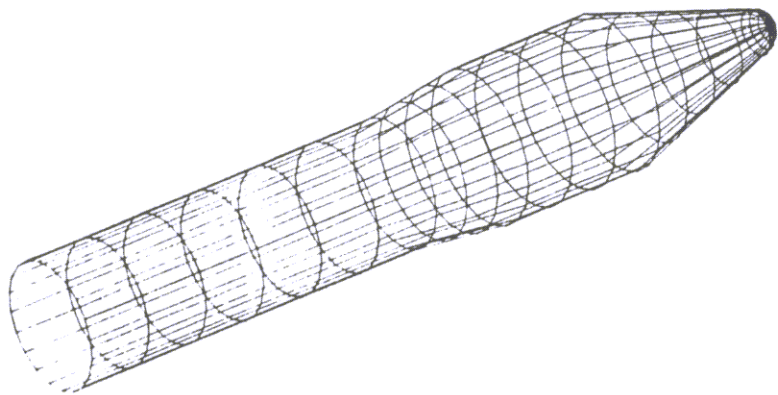


Figura 3. Discretização do corpo de um foguete tipo hammer-head.

figura anterior e três planos  $\xi$ ; o plano direito é condição de contorno; e os planos esquerdo e aquele que está quase perpendicular à folha são planos gerados. Na Fig. 5 é apresentado um plano  $n$  gerado que é uma superfície que envolve o foguete.

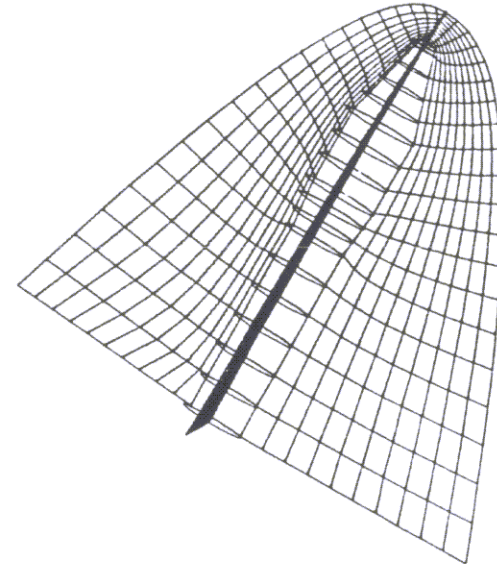


Figura 4. Três planos  $\xi$  da malha 3D sobre um foguete.

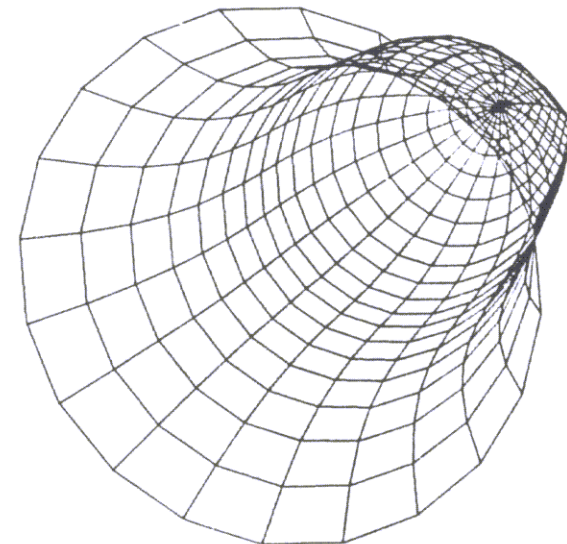


Figura 5. Superfície 3D gerada sobre um foguete.