



## UM MODELO NUMÉRICO PARA A PREVISÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM ESCOAMENTOS CRUZADOS

A. TRIBESS  
FURB, SC  
C.R. MALISKA  
DEM — UFSC, SC



### SUMÁRIO

*Este trabalho apresenta um modelo bidimensional para a previsão dos efeitos de descargas térmicas em fluxo cruzado. O modelo utiliza um sistema de coordenadas não ortogonal para manipular geometrias arbitrarias. Obtêm-se soluções para problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor considerando fronteiras com saída e entrada de massa. A descarga térmica bidimensional penetrando em fluxo cruzado é simulada variando parâmetros como temperatura da descarga e número de Peclet. O comportamento físico é bem captado pelo modelo.*

### INTRODUÇÃO

Escoamentos cruzados são encontrados em situações das mais diversas na engenharia. Descargas de jatos quentes em rios e lagos, por exemplo, acarretam alterações no ecossistema, podendo causar danos ecológicos irreparáveis. A previsão do alcance e magnitude destas alterações, em função das temperaturas e velocidades envolvidas, é fundamental quando do projeto do sistema de condensadores de usinas termoeletricas e nucleares. Um projeto adequado, prevendo-se temperaturas máximas dos jatos, localização da captação da água de refrigeração e da descarga dos jatos quentes pode então ser elaborado. Aliado a isto, a previsão do novo campo de temperatura e velocidade, permitirá previsões acerca dos micro-organismos e plantas que poderão desaparecer ou surgir em função da nova temperatura do habitat.

Uma outra solução de interesse é a determinação da perda de carga em dutos confluentes de sistemas de ar condicionado, importante para o correto dimensionamento desses sistemas. Como os problemas são quase sempre definidos em geometrias arbitrarias e devido ainda à complexidade do modelo matemático, o uso de técnicas numéricas se faz imperativo.

Neste artigo um modelo numérico para solução de problemas de escoamentos cruzados bidimensionais com transferência de calor é apresentado.

Métodos clássicos de discretização do domínio não são facilmente aplicáveis a geometrias arbitrarias. Para resolver este problema um sistema de coordenadas naturais não ortogonal, coincidente com o domínio, é utilizado [1]. Neste sistema de coordenadas são resolvidas a equação da continuidade, equações de Navier-Stokes em duas direções e a equação da energia.

O modelo básico é apresentado em [2] e, neste trabalho, interesse particular é dedicado a extensão do modelo para tratar da aplicação das condições de contorno nas fronteiras com entrada e saída de massa. Este tipo de condição de contorno apresenta dificuldades no estabelecimento da equação da pressão no contorno, conforme discutido em [3].

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O problema foi resolvido considerando a geometria e as condições de contorno mostradas na Fig. 1. Cuidado especial deve ser tomado quando da escolha da grade sobre o domínio da solução. A montante da entrada do jato o domínio deve ser suficiente para que os efeitos da condução não alterem as condições de contorno utilizadas. Já, a jusante deve ser tal que a condição de derivada nula para as velocidades contravarian-

tes (U,V) possa ser assumida.

A solução do problema é obtida em plano transformado. As equações de conservação para este plano são obtidas a partir das equações escritas para

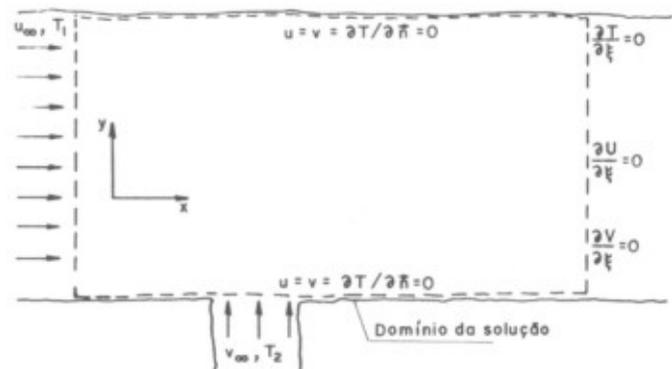


Figura 1. Geometria e condições de contorno do problema

o sistema cartesiano.

Utilizando a transformação dada por

$$\xi = \xi(x, y) \quad (1)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (2)$$

a seguinte equação de conservação para a variável genérica  $\phi$  é obtida

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V \phi) + P^\phi = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + S^\phi \quad (3)$$

As componentes contravariantes do vetor velocidade associado com o sistema curvilíneo  $(\xi, \eta)$  escritas sem normalização métrica são

$$U = y_\eta u - x_\eta v \quad (4)$$

$$V = x_\xi v - y_\xi u \quad (5)$$

onde os subscritos referem-se a derivadas parciais. Detalhes da transformação e os coeficientes da Eq. (3) são encontrados em [4].

## PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

As variáveis dependentes foram localizadas na grade de uma forma desencontrada, isto é, as pressões são armazenadas no centro da célula enquanto que as velocidades (cartesianas e contravariantes) são armazenadas no meio da face da célula onde o balanço de massa é realizado [2]. Assim pressões e velocidades ficam localizadas de uma maneira fisicamente consistente, permitindo que o esquema numérico de 5 pontos, aqui utilizado, reverta a um esquema padrão através da técnica conhecida como método do volume de controle, a partir da integração da Eq.(3) sob o volume de controle elementar mostrado na Fig. 2. Para a aproximação dos termos convectivos e difusivos o esquema de diferenças ponderadas a montante (Weighted Upstream Differencing Scheme - WUDS) de

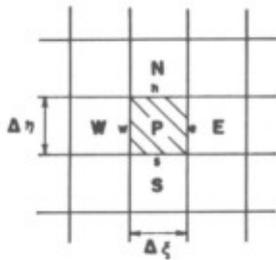


Figura 2. Volume de controle elementar no plano transformado

Raithby and Torrance [5] foi adotado.

A equação algébrica resultante, em uma forma totalmente implícita é

$$\rho_p \phi_p^{n+1} \frac{\Delta V}{\Delta t} + A_p^* \phi_p^{n+1} = A_e \phi_e^{n+1} + A_w \phi_w^{n+1} + A_n \phi_n^{n+1} + A_s \phi_s^{n+1} + \rho_p \phi_p^n \frac{\Delta V}{\Delta t} - L [P^\phi] \Delta V + L [S^\phi] \Delta V \quad (6)$$

O operador L [ ] representa as aproximações para volumes finitos das quantidades entre colchetes. Os coeficientes são encontrados em [4]. Para obtenção da Eq. (6) foi utilizada a equação de conservação da massa para um volume finito, dada por

$$[(\rho U)_e - (\rho U)_w] + [(\rho V)_n - (\rho V)_s] = 0 \quad (7)$$

Equações para volumes finitos para as velocidades contravariantes (U,V) são obtidas a partir das equações já aproximadas para u e v, utilizando-se a Eq. (4) e a Eq. (5), respectivamente.

A equação da temperatura é obtida substituindo-se  $\phi$  por T com  $L[P^\phi]$  e  $L[S^\phi]$  iguais a zero. As equações para os volumes elementares situados na fronteira são obtidas através de balanço de calor para os mesmos, ficando as condições de contorno automaticamente incorporadas no sistema de equações, satisfazendo os princípios de conservação localmente.

A equação de Poisson para a pressão foi obtida através das equações para U e V abaixo,

$$U_p = \hat{U}_p - \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\alpha}{A_p^U} \right]_p + \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\beta}{A_p^U} \right]_p \quad (8)$$

$$V_p = \hat{V}_p - \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \eta} \frac{\gamma}{A_p^V} \right]_p + \left[ \frac{\Delta P}{\Delta \xi} \frac{\beta}{A_p^V} \right]_p \quad (9)$$

que foram inseridas na equação da continuidade, Eq. (7), obtendo-se

$$A_p^P P = A_e^P P_e + A_w^P P_w + A_n^P P_n + A_s^P P_s + A_{ne}^P P_{NE} + A_{nw}^P P_{NW} + A_{se}^P P_{SE} + A_{sw}^P P_{SW} + \nabla \cdot \hat{V} \quad (10)$$

onde  $\nabla \cdot \hat{V} = \hat{U}_w - \hat{U}_e + \hat{V}_s - \hat{V}_n$  é o termo fonte. Os coeficientes também podem ser encontrados em [4] e,  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  são dados por

$$\hat{U}_p = \frac{A_e^U}{A_p^U} [u_{E\eta p}^y - v_{E\eta p}^x] + \frac{A_w^U}{A_p^U} [u_{W\eta p}^y - v_{W\eta p}^x] + \frac{A_n^U}{A_p^U} [u_{N\eta p}^y - v_{N\eta p}^x] + \frac{A_s^U}{A_p^U} [u_{S\eta p}^y - v_{S\eta p}^x] + \frac{B_p^U}{A_p^U} \quad (11)$$

$$\hat{V}_p = \frac{A_e^V}{A_p^V} [v_{E\xi p}^x - u_{E\xi p}^y] + \frac{A_w^V}{A_p^V} [v_{W\xi p}^x - u_{W\xi p}^y] + \frac{A_n^V}{A_p^V} [v_{N\xi p}^x - u_{N\xi p}^y] + \frac{A_s^V}{A_p^V} [v_{S\xi p}^x - u_{S\xi p}^y] + \frac{B_p^V}{A_p^V} \quad (12)$$

Quando do estabelecimento das condições de contorno para a seção de saída, normalmente é utilizada a condição de derivada nula para as velocidades. Para o caso não ortogonal a derivada nula dever ser aplicada para as velocidades contravariantes, uma vez que são as responsáveis pelo fluxo de massa através das faces do volume de controle. Cuidados devem ser observados para que a malha não ortogonal utilizada não seja demasiadamente distorcida na saída. Isto é fácil de conseguir, uma vez que detém-se controle total sobre a geração das malhas. Caso não seja possível observar este detalhe recomenda-se utilizar uma resolução maior perto da fronteira de saída.

São os seguintes os passos a serem cumpridos durante um ciclo de iterações: (1) especificar o campo de pressão e os de velocidade, (2) calcular os coeficientes para as equações de movimento, (3) achar  $\hat{U}$  e  $\hat{V}$  com as velocidades cartesianas da iteração anterior, (4) resolver a equação tipo Poisson para a pressão, (5) corrigir as velocidades U e V devido o novo campo de pressões, utilizando as Equações (8) e (9), (6) Calcular as velocidades físicas u e v utilizando as inversas das Equações (4) e (5). Voltar ao passo (2) e repetir até a convergência devido as não linearidades e o acoplamento entre as equações.

Para a determinação do campo de temperaturas basta resolver a equação da energia, que é desacoplada das demais (convecção forçada). As equações para pressão e temperatura foram resolvidas utilizando o método S.O.R. (sobre-relaxações sucessivas).

## RESULTADOS E CONCLUSÕES

A apresentação dos resultados foi dividida em duas partes, contendo a primeira os testes realizados com o modelo, e a segunda a solução do problema da descarga de um jato em uma corrente a temperatura mais baixa.

Testes Preliminares. Com o objetivo de conferir o código computacional, problemas utilizando grades ortogonais e não ortogonais foram resolvidos. Os resultados estão relatados em [4]. Já, a região de entrada em um canal foi resolvida com dois objetivos.

Primeiro, conferir o desenvolvimento do perfil e, segundo, verificar a influência da condição de contorno da seção de saída sobre o escoamento a montante.

A Fig. 3 mostra o desenvolvimento do perfil de velocidades para o escoamento em um canal, utilizando uma malha cartesiana 22 x 56, uniforme em  $\xi$  e concentrada junto as paredes. Pode-se observar claramente que o método detecta a existência de perfis não puramente convexas na região de entrada, relatados em [6]. Resultados análogos aos aqui apresentados

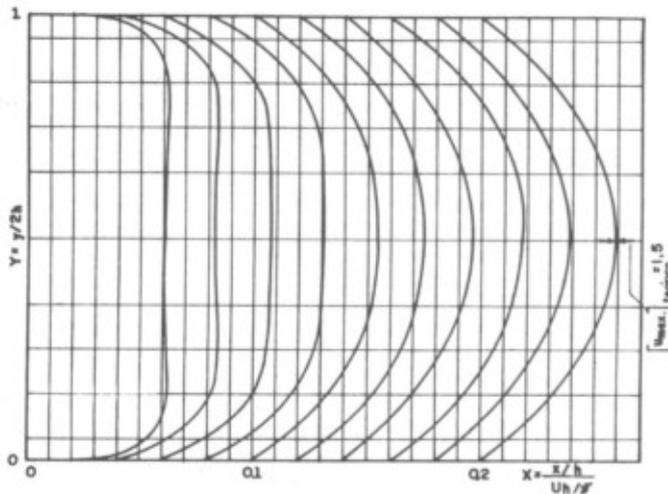


Figura 3. Perfis de velocidade para o escoamento em um canal.

foram encontrados por [7] e [8].

A Tabela 1 apresenta velocidades adimensionais obtidas no canal com  $Re = 50$ , utilizando três diferentes malhas em função da posição de localização da condição de contorno de saída.

- Caso A O canal tem comprimento  $x = 0.288$ , comprimento suficiente para se atingir o perfil plenamente desenvolvido. Malha utilizada 22 x 56.
- Caso B O canal tem comprimento  $x = 0.072$ . Malha 22 x 40.
- Caso C O canal tem comprimento  $x = 0.072$  e pequena concentração de malha na fronteira de saída. Malha 22 x 44.

Tabela 1. Velocidades adimensionais em função do comprimento do canal.

y	x = 0.072			x = 0.056		
	A	B	C	A	B	C
0,05	0,348	0,370	0,368	0,380	0,389	0,388
0,15	0,874	0,902	0,899	0,923	0,935	0,934
0,25	1,170	1,179	1,178	1,180	1,183	1,183
0,35	1,288	1,270	1,272	1,256	1,248	1,249
0,50	1,322	1,279	1,282	1,262	1,245	1,245

y	x = 0.032			x = 0.016		
	A	B	C	A	B	C
0,05	0,528	0,531	0,530	0,761	0,762	0,762
0,15	1,033	1,035	1,035	1,066	1,067	1,066
0,25	1,155	1,155	1,155	1,077	1,077	1,077
0,35	1,154	1,152	1,152	1,055	1,055	1,055
0,50	1,130	1,127	1,127	1,040	1,039	1,039

Analisando a Tab. 1 observa-se que o erro decorrente da aplicação da condição de derivada nula,

em uma posição em que o perfil não está plenamente desenvolvido, é sensivelmente menor a medida que afasta-se desta posição. Isto vem demonstrar que esta condição de contorno pode ser perfeitamente utilizada sem prejuízo dos resultados sempre que a região de interesse não for aquela na qual a condição foi assumida. Este erro pode ser diminuído ainda mais caso se utilize uma grade de maior resolução na fronteira onde este tipo de condição de contorno é aplicada. Isto poder ser observado com os resultados do Caso C.

**Escoamento Cruzado com Transferência de Calor.** A solução do problema de escoamento cruzado com transferência de calor, que foi o objeto da realização deste trabalho, é apresentado a seguir. A grade não

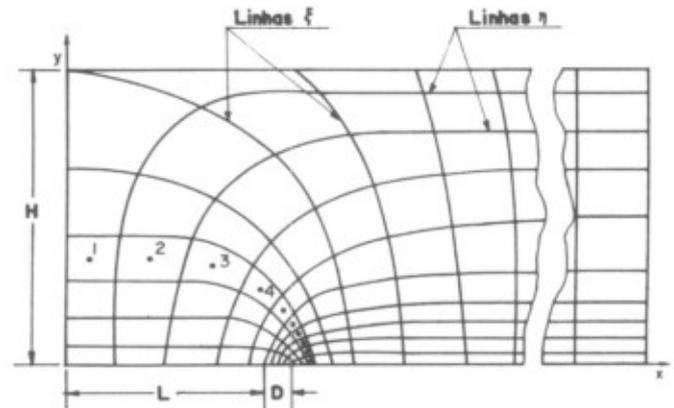


Figura 4. Grade não ortogonal utilizada

ortogonal utilizada foi a da Fig. 4 com  $H/D = 12$  e  $L/D = 8$ .

Inicialmente o problema foi resolvido utilizando-se um domínio de solução que permitisse aplicar a condição de derivada nula e obter o perfil completamente desenvolvido, com o objetivo de verificar a conservação da massa global na saída pela integração do perfil parabólico [4] calculado.

Procurando verificar a capacidade do método em captar as regiões de recirculação após a entrada do jato, resolveu-se o problema para um número de Reynolds, do escoamento, constante e igual a 500, variando as relações de vazão  $N$ , onde

$$Re_{esc} = \rho H / \nu \quad \bar{u} = (u_{\infty H} + u_{\infty D}) / H \quad (13)$$

$$N = Q_R / Q_J \quad Q_R = u_{\infty H} H \quad Q_J = u_{\infty D} D \quad Q_T = Q_R + Q_J$$

A Fig. 5 apresenta os vetores velocidade obtidos para as relações vazão  $N = 3, 6$  e  $9$ , observando-se que as regiões de recirculação são fisicamente consistentes, tornando-se maiores com o aumento da velocidade do jato. Os  $>$ , representam velocidades muito baixas que não foram possíveis indicar através de setas.

Finalmente, para observar os efeitos convectivos e condutivos, o problema foi resolvido para diversos valores do número de Peclet do escoamento e temperatura do jato. A Fig. 6 apresenta resultados para diferentes números de Peclet, obtidos para  $N$  constante e igual a 7.5 com temperaturas do jato quente iguais a 30 e 50°C e escoamento principal a 20°C. Neste caso o  $Re$  foi alterado, justamente para mostrar o efeito do aumento da convecção sobre a condução. Observa-se que o comportamento físico esperado é obtido, onde vemos um aumento da temperatura à montante e uma diminuição à jusante com a diminuição do número de Peclet.

O tempo consumido na solução do problema de escoamento cruzado com transferência de calor foi de aproximadamente 6 minutos de CPU.

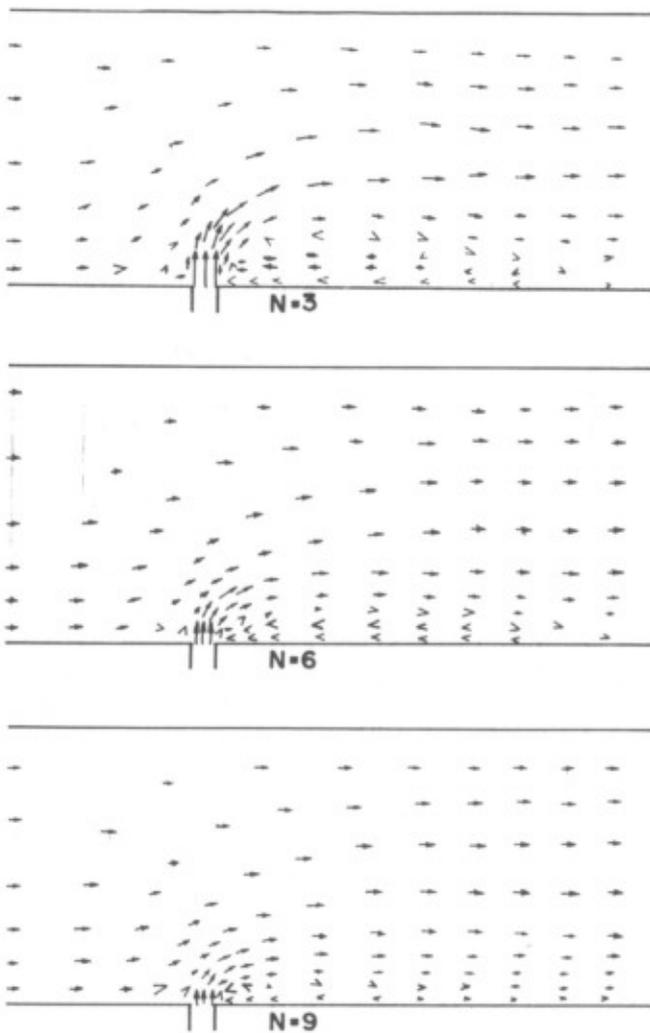


Figura 5. Vetores velocidade para  $Re = 500$

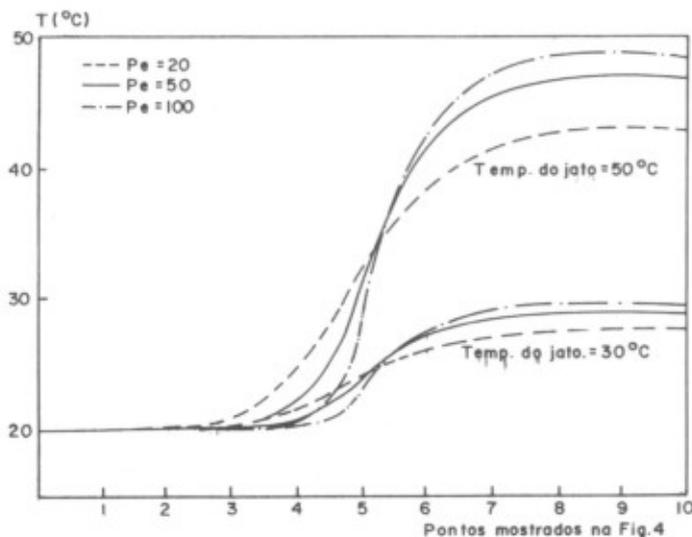


Figura 6. Temperaturas nas posições da grade da Fig. 4 para  $N = 7,5$ .

Os resultados obtidos mostram que o uso de sistemas não ortogonais para a solução de escoamentos cruzados com transferência de calor é uma alternativa

atrativa em função da generalidade e flexibilidade do modelo. Para o tratamento adequado dos problemas de descarga de jatos em rios e estuários o efeito tridimensional, ou as equações médias na profundidade, devem ser incluídos.

#### REFERÊNCIAS

- (1) Thompson, J.F., Thames, F.C. & Mastin, C.W., Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, v. 15, *J. Comp. Phys.*, p. 299-319 (1974).
- (2) Maliska, C.R. & Raithby, G.D., "A Method For Computing three Dimensional Flows Using Non-Orthogonal Boundary-Fitted Co-Ordinates", *Int. J. Numerical Methods in Fluids*, v.4, p. 519-537 (1984).
- (3) Van Doormaal, J.P. & Raithby, G.D., "Enhancements of the Simple For Predicting Incompressible Fluid Flows", Submetido para publicação no *Numerical Heat Transfer*.
- (4) Tribess, A., *Solução Numérica de Problemas de Transferência de Calor em Escoamentos Confluentes em Geometrias Arbitrárias*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Depto. de Eng. Mecânica, (1985).
- (5) Raithby, G.D. & Torrance, K.E., "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application To Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Computer and Fluids*, v. 2, p. 191-206 (1974).
- (6) Abarbanel, S., Bennet, S., Brandt, A. & Gillis, J., "Velocity Profiles of Flow at Low Reynolds Numbers", *Journal of Applied Mechanics*, p. 2-4 (1970).
- (7) Sousa, A.C.M. & Hatton, A.P., Numerical Simulation of Convection Flows, *Anais do VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Uberlândia, dezembro (1983).
- (8) Nogueira, A.C.R., Comunicação Pessoal.

#### SUMMARY

This paper presents a two-dimensional model for the prediction of thermal discharges entering a cross-flow. The model uses a nonorthogonal coordinate system for handling arbitrary geometries. Solution for fluid flow and heat transfer problems with inflow-outflow boundary conditions were obtained. The two-dimensional thermal discharge entering a cross-flow is simulated varying the parameters like temperature of the discharge and Peclet number. The physical trends are well captured by the model.