II CREEM
CONGRESSO REGIONAL DE ESTUDANTES DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
21 A 25 DE AGOSTO 1995

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR BIDIMENSIONAL EM GEOMETRIAS ARBITRÁRIAS

Jederson Angelo de Cezaro
Luiz Felipe Gomes de Castro
SINMEC - Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência Calor
Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC
Campus Universitário - Trindade
CEP 88040 - 900 - Florianópolis - SC

Orientadores: Adalberto Romalino Cunha (Mestrando)
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC
Clóvis Raimundo Maliska, Phd.
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC

SUMÁRIO

O presente trabalho, tem como objetivo apresentar um metodologia numérica para a resolução de problemas de Transferência de Calor em Coordenadas Generalizadas, ou seja, um programa que resolva condução de calor em geometrias arbitrárias, através de malhas que se adaptam às fronteiras do domínio físico. Faz-se uma descrição sucinta das etapas necessárias para a simulação numérica e discretização da equação da condução de calor em coordenadas generalizadas. É utilizado o método dos volumes finitos [3] (sem a utilização de volumes ficticios) para as discretizações destas equações. Para a solução do sistema linear é utilizado o método de GAUSS-SEIDEL. A programação é feita na linguagem C++.

1. INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos tem como objetivo resolver problemas complexos de engenharia, onde os experimentos em laboratório são dificeis de serem realizados e muito dispendiosos, inviabilizando a sua realização.

A grande versatilidade e relativa simplicidade de aplicação das técnicas numéricas, demonstra o porque da sua importância e grande utilização. Um dos fatores que contribui para a versatilidade dos métodos numéricos é a possibilidade de fazer um programa que seja o mais genérico possível, podendo utilizar geometria quaisquer. Deste modo um único programa poderia ser utilizado para a resolução de diversos problemas com geometrias diferentes.

Utiliza-se o sistema de coordenadas cartesianas, por simplicidade, mas sabe-se que este sistema é muito limitado se o interesse for resolver problemas de engenharia, onde quase sempre a geometria é arbitrária.

O emprego de sistemas de coordenadas coincidentes com a fronteira, ou *boundary-fitted coordinattes*, teve seu início entre pesquisadores do método de diferenças finitas e foi uma proposta para o tratamento de problemas em geometrias arbitrárias.

A razão da utilização de tais sistemas são:

1. Necessidade de solução de problemas mais complexos, os quais apresentam geralmente geometrias arbitrárias;
2. Dificuldade de solução destes problemas utilizando sistemas coordenados convencionais;
3. Possibilidade de concentração de malhas de acordo com o problema físico;
4. Possibilidade de desenvolvimento de metodologias que possam ser as mais genéricas possíveis.
5. Utilização de um unico código computacional, que independe da geometria do domíno físico.

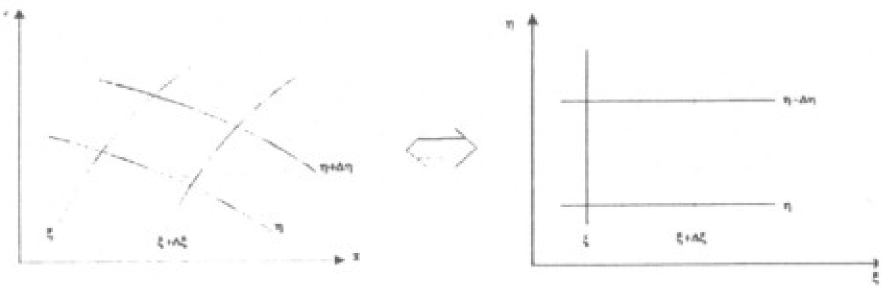
A discretização coincidente com a fronteira, caso seja obtida através de um sistema de coordenada, é dita estruturada. Isto porque cada volume vizinho tem sempre o mesmo número de vizinhos (exceto nas fronteiras), e suas numerações seguem uma sequência natural. Existem entretanto, as malhas não estruturadas, onde não existe uma lei de formação definida.

Contudo para o método dos volumes finitos não interessa a forma e nem a natureza do volume elementar, sendo necessário somente integrar as equações de conservação nos volumes elementares, para se obter as equações discretizadas. Como as malhas estruturadas são obtidas a partir de um sistema coordenado generalizado, pode-se encontrar a transformação entre o sistema cartesiano (x, y, z) e o sistema transformado (ξ, η, γ). Possuindo esta transformação, necessita-se somente transformar as equações de conservação para o novo sistema coordenado (ξ, η, γ), e realizar as integrações neste novo sistema. O novo sistema coordenado "criado" (ξ, η, γ) é dito como domínio transformado ou domínio computacional, o sistema cartesiano (x, y, z) é conhecido como domínio físico.

O presente trabalho demonstra os passos do desenvolvimento de um programa de simulação numérica em coordenadas generalizadas. Com o objetivo de resolver problemas de condução de calor, em regime transiente, com diferentes condições de contorno(temperatura prescrita e fluxo prescrito), além de condutividade térmica(k[W/m k]) variável.

2. Domínio físico X Domínio transformado

A possibilidade de encontrar a transformacão do sistema coordenado original (geralmente o cartesiano) para o sistema generalizado, permite mapear a geometria irregular, escrita no sistema (x, y), para uma geometria regular no sistema (ξ,η).



As ferramentas para esta transformacão de um domínio para outro são chamadas de métricas, que relacionam as variações de x e y com as novas coordenadas ξ e η. Sendo que estas são obtidas pela relação [1]:

$$\xi=\xi(x,y)$$
$$\eta=\eta(x,y).$$

3. Equação governante do problema físico

A equação da condução de calor é deduzida a partir do Princípio da Conservação da Energia (1ª Lei da Termodinâmica).

No caso particular da condução de calor este princípio pode ser enunciado da seguinte forma:

"A taxa de calor que entra num volume de controle adicionada da taxa de energia térmica gerada, decrescida da taxa de calor que sai do volume de controle é igual a variação de energia térmica deste volume de controle ",

ou

$$q_{entra} + q_{gerado} - q_{sai} = mc\frac{dT}{dt} \tag{1}$$

Para resolver este problema deve-se relacionar a equação acima com um campo de temperatura, e isto se torna possível com a lei de Fourier, que aplicada a (1) resulta em :

$$\rho Cp\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \dot{q} \tag{2}$$

De posse da equação que rege o problema físico, fica agora necessário transformá-la para o novo sistema de coordenadas(ξ, η).

3.1- Transformação da Equação Governante

De posse da equação da condução de calor, faz-se uma transformação de coordenadas, obtem-se:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \xi}\left[J\,k\frac{\partial T}{\partial \xi}\left(y_\eta^2 + x_\eta^2\right) - J\,k\frac{\partial T}{\partial \eta}\left(y_\xi y_\eta + x_\xi x_\eta\right)\right] +\\ &\frac{\partial}{\partial \eta}\left[-J\,k\frac{\partial T}{\partial \xi}\left(y_\xi y_\eta - x_\xi x\eta\right) + J\,k\frac{\partial T}{\partial \eta}\left(y_\xi^2 + x_\xi^2\right)\right] = \frac{\rho Cp}{J}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\dot{q}}{J}\end{aligned} \tag{3}$$

onde : J = jacobiano da transformacão;
x_ξ = derivada de x em relacão a ξ (análogo para os outros)
$\alpha = y_\eta^2 + x_\eta^2$, $\gamma = y_\xi^2 + x_\xi^2$, $\beta = x_\xi x_\eta + y_\eta y_\xi$

Após estas simplificações, define-se:

$D1 = JK\alpha$, $D2 = -JK\beta$, $D3 = -JK\beta$, $D4 = JK\gamma$;

Deste modo a equacão final fica:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[D1\frac{\partial T}{\partial \xi} + D2\frac{\partial T}{\partial \eta}\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[D3\frac{\partial T}{\partial \xi} + D4\frac{\partial T}{\partial \eta}\right] = \frac{\rho Cp}{J}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\dot{q}}{J} \tag{4}$$

3.3- Discretização da Equação Transformada

Com a equação transformada, o próximo passo é integrá-la no espaço e no tempo, para a obtenção dos coeficientes do sistema linear.

A discretização da equação é feita no domínio transformado (malha retangular).Percebe-se a necessidade de dividi-lo em nove regiões distintas: os cantos , as faces e o centro da malha.

Para a discretização das equações foi utilizado como função de interpolação, para avaliar as derivadas, o esquema CDS(Central Difference Scheme) [1]. Já par avaliar a variação temporal admitiu-se uma função de interpolação, dada por [1],

$$T^{\theta} = T^{o} + \theta\left(T + T^{o}\right)$$

sendo que a formulação utilizada foi a totalmente implícita($\theta = 1$) [1].

Com a aplicação destas funções de interpolação, chega-se a um sistema linear do tipo:

$$A_P\, T_P = \sum A_{NB}\, T_{NB} + S$$

que será resolvido iterativamente pelo método GAUSS-SEIDEL.

Para as condições de contorno, foram utilizadas duas:

a)Condição de Dirichlet(Temperatura prescrita)

$$T_{fronteira} = T_{prescrita}$$

b)Condição de Neumann(Fluxo prescrito)

$$q'' = -k\,\frac{dT}{dx} = q''_{prescrito}$$

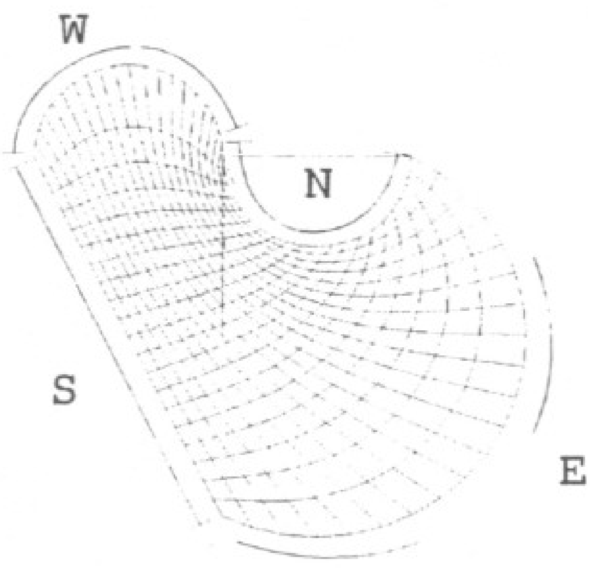
No caso pode-se optar por qualquer uma delas em cada face.

4- Programa

A organização do programa segue basicamente o seguinte fluxograma:

Ler Arquivo de Malha >> Cálculo de métricas e Jacobianos >>Entrada de Dados(condições de contorno) >> Cálculo dos Coeficientes do Sistema Linear>> Solver (Gauss-Seidel) >> Verificação dos Critérios de Convergência no Tempo >> Caso tenha Convergido Impressão dos Resultados >> Caso contrário volta e recalcula os Coeficientes e faz-se o Solver até convergir ou ultrapassar o limite de iterações.

Será apresentado um caso rodado no problema a seguir :



Esta foi a malha em coordenadas generalizadas que foi utilizada para resolver o seguinte problema :

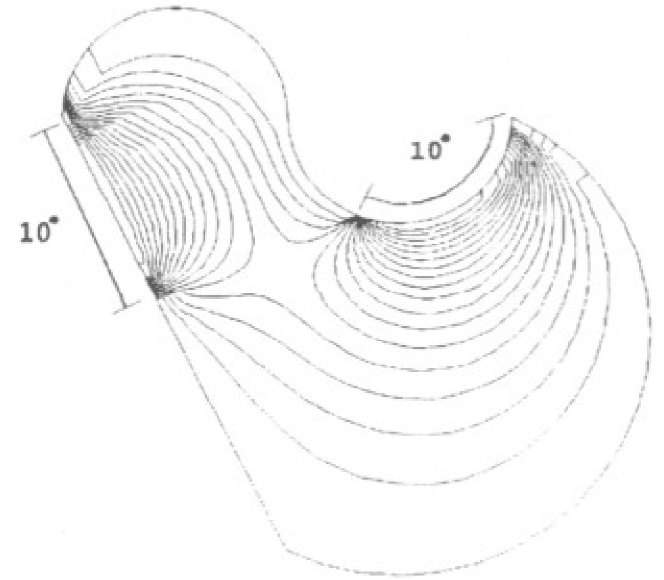
a)temperaturas nas faces oeste (W) e leste (E) iguais a 0 °C;

b)nas faces norte (N) e sul (S) foram utilizadas temperaturas diferentes, 0 °C até a metade e 10 °C na outra metade;

c)condutibilidade térmica constante;

d)malha 20x20.

Os resultados estão expressos na figura abaixo, através de isotermas, representados pelas linhas no interior da malha.



5- Conclusão

Neste trabalho foi apresentado um programa de coordenadas generalizadas utilizando o método dos volumes finitos, assim como as discretizações das equações e uma breve introdução sobre malhas estruturadas. Vale ressaltar a dificuldade de se utilizar malhas estruturadas em algumas geometrias (como aletas muito compridas) onde o ideal seria a utilização de malhas não estruturadas.

Percebe-se a grande versatilidade da utilização de malhas coincidentes com a fronteira, sendo este o principal motivo da sua grande utilização, atualmente, para simulacão numérica de problemas de mecânica dos fluidos e transfêrencia de calor em geometrias arbitrárias.

6- Referências

[1] MALISKA, C. R.," *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional - Coordenadas Generalizadas*", Apostila, EMC-UFSC, Florianópolis, 1994.

[2] INCROPERA, F. P.," *Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa*", Guanabara Koogan, Terceira edição, Rio de Janeiro, 1992.

[3] PATANKAR, S. V.," *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*", Hemisphere Publushing, 1980.

[4] THOMPSON, J.F., WARSI, Z. U. A., MASTIN, C. W., "Numerical Grid Generation Foundations and Applications", Elsevier Science Publishing Co., USA, 1985.