

PREVISÃO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO NATURAL
EM CAVIDADES DUPLAMENTE CONEXAS ARBITRÁRIAS

A.F.C. Silva e C.R. Maliska
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis - Santa Catarina
Brasil

SUMÁRIO

Um modelo não ortogonal já aplicado com sucesso na solução de diversos problemas hidrodinâmicos e de convecção natural em cavidades arbitrárias simplesmente conexas é aplicado em cavidades duplamente conexas onde necessariamente devem ser aplicadas condições de contorno repetitivas. São comparados os resultados para a convecção natural laminar em um duplo tubo com eixo centrado horizontal obtidos com uma malha ortogonal e com uma malha não ortogonal não simétrica. Alguns resultados para a convecção natural entre duplos tubos excêntricos são comparados com outros disponíveis na literatura. A possibilidade do uso de pontos fictícios para a temperatura é analisada.

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos tem crescido consideravelmente o número de pesquisadores dedicados ao estudo da convecção natural em cavidades. Tal interesse é consequência da importância que o perfeito entendimento do fenômeno e a sua simulação numérica vem tendo para a solução de diversos problemas da engenharia. Não obstante, ainda são muito raros os trabalhos dedicados à solução do problema da convecção natural em cavidades duplamente conexas arbitrárias. Para a solução das equações de conservação nesse tipo de região, constitui-se em um recurso eficiente a discretização do domínio com uso de sistemas de coordenadas não ortogonais, como mostra a fig.1.

São vários os esquemas numéricos de solução do sistema acoplado

de equações envolvendo a equação da continuidade e as equações de conservação da quantidade de movimento. Bastante interessante é o esquema em que as componentes contravariantes do vetor velocidade são tratadas como variáveis dependentes e em que as equações da quantidade de movimento são resolvidas explicitamente enquanto a equação da continuidade se transforma numa equação do tipo de Poisson para a pressão.

Diversos são os arranjos possíveis de armazenamento das variáveis sobre o domínio de solução. Como demonstrado com grandes detalhes por Maliska e Raithby (1984), são excelentes os resultados obtidos quando as variáveis envolvidas na solução são armazenadas na forma da fig. 2, que também indica os volumes de controle nos quais os princípios de conservação da massa e da quantidade de movimento devem ser aplicados. A adoção desse arranjo tem como principal vantagem o fato de que quando o sistema de coordenadas é ortogonal a equação da continuidade deixa de envolver nove pontos de pressão e passa automaticamente a envolver cinco e a não necessidade de serem resolvidos dois campos de pressão sobre o domínio, campos estes que em muitas situações ficam fracamente acoplados.

O objetivo do presente trabalho é o teste do modelo proposto por Maliska e Raithby (1984) em cavidades duplamente conexas arbitrárias.

VOLUMES DE CONTROLE PARA A TEMPERATURA

Para a aplicação da conservação da energia existem basicamente duas possibilidades de armazenamento da temperatura sobre o domínio. Uma delas é armazenar a temperatura coincidentemente com a pressão e outra é armazenar a temperatura nos vértices dos volumes de controle para a pressão. A primeira tem sobre a segunda duas vantagens, a saber: i) se a temperatura for armazenada coincidentemente com a pressão todo o domínio será coberto por elementos de mesmo volume enquanto o outro arranjo implica no aparecimento de elementos na fronteira cujo volume será uma fração (um meio ou um quarto) do volume dos elementos internos e ii) no primeiro, em todos os elementos será aplicado o princípio da conservação da energia enquanto no segundo esse princípio não pode ser aplicado aos volumes das fronteiras com condição de contorno de Dirichlet. Dessa forma, no presente trabalho, a temperatura está localizada coincidentemente com a pressão, adotando-se portanto, o mesmo procedimento aplicado por Milioli et al. (1985).

EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações de conservação para a convecção natural bidimensional de um fluido com propriedades físicas constantes é dada em coordenadas cartesianas por

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \rho \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) + P^\phi + C^\phi = \Gamma^\phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \Gamma^\phi \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (1)$$

onde ϕ pode ser a unidade (conservação da massa), u e v (conservação da quantidade de movimento) e T (conservação da energia). Nesta equação Γ^ϕ é o coeficiente de difusão da variável ϕ , P^ϕ e C^ϕ são respectivamente o termo de gradiente de pressão e o termo responsável pelas forças de campo (quando adequados). A eq.(1) transformada para um sistema de coordenadas curvilíneo resulta em

$$\frac{\rho}{J} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial \xi}(U\phi) + \rho \frac{\partial}{\partial \eta}(V\phi) + P^\phi + C^\phi = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + C_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) \quad (2)$$

onde

$$U = y_\eta u - x_\eta v \quad V = x_\xi v - y_\xi u \quad J = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^{-1} \quad (3)$$

$$C_1 = \Gamma^\phi J \alpha \quad C_2 = -\Gamma^\phi J \beta \quad C_3 = \Gamma^\phi J \gamma \quad (4)$$

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (5)$$

e os termos P^ϕ e C^ϕ são dados por

$$P^u = \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad P^v = \frac{\partial P}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad P^T = 0 \quad (6)$$

$$C^u = 0 \quad C^v = \rho g \beta^* (T - T_{ref}) / J \quad C^T = 0 \quad (7)$$

DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações para os volumes finitos são obtidas através da integração das equações sobre volumes de controle centrados em P onde P é um nó qualquer da grade. O valor de ϕ em P e nos nós vizinhos é denotado por $\phi_P, \phi_W, \phi_E, \phi_N, \phi_S$. A expressão obtida assume a forma

$$A_P \phi_P^{n+1} = A_E \phi_E^{n+1} + A_W \phi_W^{n+1} + A_N \phi_N^{n+1} + A_S \phi_S^{n+1} + A_P \phi_P^n / (1+E) - L[P^\phi] \Delta V - L[C^\phi] \Delta V + L[\bar{S}T^\phi] \Delta V \quad (8)$$

onde $L[]$ significa a aproximação do termo entre colchetes e $\bar{S}T^\phi$ é dado por

$$\bar{S}T^\phi = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_3 \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) \quad (9)$$

Os coeficientes A_P, A_W, A_E, A_N e A_S são os mesmos para determinado volume de controle, qualquer que seja a variável ϕ (a menos do coeficiente de difusão). Assim, aplicada a eq.(8) para a velocidade u e para a velocidade v obtemos expressões para u e v nesse ponto em função de u e v vizinhas, dos gradientes de pressão, da força de campo e do termo $\bar{S}T$ que nada mais é do que a parcela relativa às derivadas cruzadas da equação do movimento. Com essas expressões para u e v no mesmo ponto, as equações do movimento em termos de U e V assumem a forma

$$U_P = \bar{U}_P - \left(\frac{\Delta \Gamma}{A_P} \alpha \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_P + \left(\frac{\Delta \Gamma}{A_P} \beta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)_P \quad (10)$$

$$V_P = \bar{V}_P - \left(\frac{\Delta \Gamma}{A_P} \gamma \frac{\partial P}{\partial \eta} \right)_P + \left(\frac{\Delta \Gamma}{A_P} \beta \frac{\partial P}{\partial \xi} \right)_P \quad (11)$$

onde \bar{U}_P e \bar{V}_P incluem todos os termos das equações da quantidade de movimento exceto os responsáveis pelos gradientes de pressão. Substituídas estas expressões na equação da continuidade o resultado será uma equação envolvendo nove pontos de pressão. Resolvido o sistema assim originado é obtido um campo de pressões que aplicado nas eqs.(10) e (11) resulta em um campo de velocidades que satisfaz a conservação da massa.

APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

A aplicação das condições de contorno para u e v segue o mesmo procedimento proposto por Maliska e Raithby (1984) com a simplificação que, para regiões duplamente conexas, é necessário especificar valores apenas nos contornos interno e externo da região.

Para a solução da equação da energia, pode-se desejar, assim como é procedimento usual quando se trabalha com sistemas de coordenadas ortogonais, usar pontos fictícios de temperatura. Nesse caso, quando,

por exemplo, a fronteira é isolada, pode-se ficticiamente assumir uma malha norte, na fig.3, de maneira que $T_N = T_P$. A vantagem deste procedimento é que a equação discretizada para o volume da fronteira assume a mesma forma que a equação para os volumes internos. Deve-se no entanto ter em mente que o uso de pontos fictícios constitui-se apenas em um artifício matemático que faz com que determinada condição de contorno possa ser aplicada sem alterar a forma da equação geral. Admita agora o mesmo problema físico envolvendo uma fronteira isolada mas considere o uso de um sistema de coordenadas não ortogonal. A condição de contorno agora pode ser expressa por

$$\left(\gamma \frac{\partial T}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \Big|_n = 0 \quad (12)$$

que discretizada assume a forma

$$\gamma_n \left(\frac{T_N - T_P}{\Delta \eta} \right) - \beta_n (T_{NE} + T_E - T_{NW} - T_W) / 4 = 0 \quad (13)$$

Conhecidas as temperaturas das N malhas da fronteira pode ser construído um sistema de equações que, resolvido, fornece as N temperaturas fictícias. Esse conjunto de temperaturas, quando usado para o cálculo do fluxo de calor na face norte de cada volume dará como resultado o valor zero.

Ocorre no entanto um fato complicador. Como o sistema de coordenadas é não ortogonal é necessário o cálculo de $\partial T / \partial \eta|_e$ e $\partial T / \partial \eta|_w$. Para um volume interno $\partial T / \partial \eta|_w$ é calculado por $(T_{NW} + T_N - T_{SW} - T_S) / 4$. Embora necessário um exame mais profundo do assunto, acredita-se que as temperaturas fictícias, por terem sido determinadas exclusivamente para que a condição de contorno na face norte fosse satisfeita, não podem ser usadas nesta expressão para o cálculo de $\partial T / \partial \eta|_w$ do volume da fronteira. Por esse motivo, no presente trabalho, foram deduzidas equações específicas, através de balanços de calor, para os volumes da fronteira interna e externa da região sem a adoção de pontos fictícios.

PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

O procedimento de de solução consiste basicamente em, a partir de campos de pressão, velocidade e temperatura arbitrados, calcular as componentes contravariantes U e V, os coeficientes das equações de conser-

vação da quantidade de movimento, as velocidades \bar{U} e \bar{V} (que incluem as forças de campo) e resolver o sistema de equações para a determinação do novo campo de pressões. Com o novo campo de pressões são calculadas através das eqs.(10) e (11) as novas velocidades contravariantes U e V e, com estas, os coeficientes da equação da energia. Esta última equação aplicada a cada volume de controle dá origem a um sistema de equações que resolvido fornece uma nova estimativa do campo de temperaturas. O procedimento agora se repete até que a solução seja encontrada.

Para a solução final do problema nenhum critério foi aplicado à temperatura ou à pressão já que a experiência demonstrou que quando as velocidades convergem os campos de pressão e temperatura já estão satisfazendo a critérios mais rígidos de convergência. Assim, a solução foi considerada convergida quando $[\phi^{n+1} - \phi^n] / R \leq \epsilon$ onde $R = \phi_{\max} - \phi_{\min}$ e ϕ_{\max} e ϕ_{\min} são os valores máximo e mínimo de ϕ no domínio. Esse critério foi aplicado a todas as componentes u e v do domínio com ϵ assumindo, na maioria dos casos o valor de $5.E-4$.

Na solução dos sistemas de equações para a determinação dos campos de pressão e temperatura não é conveniente, pelos motivos expostos por Van Doormall e Raithby (1984) a aplicação do mesmo tipo de critério. Nesses casos foram realizadas iterações até que o valor da raiz quadrada do somatório dos resíduos de cada equação ao quadrado se reduza a um valor previamente especificado, normalmente entre 0.05 e 0.25, daquele calculado com os campos iniciais da solução iterativa.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Para teste do modelo numérico foi resolvido o problema da convecção natural laminar entre cilindros excêntricos, como mostra a fig.4. A posição do tubo interno é definida pelo ângulo θ , a excentricidade pelo parâmetro adimensional $\epsilon = \epsilon^* / L$ e a dimensão relativa do dois cilindros pela relação L/D_i onde $L = R_o - R_i$.

Serão apresentados alguns resultados apenas para a condutividade equivalente local por ter esta, além de interesse prático, grande sensibilidade a qualquer distorção existente no campo de temperatura e restritos a $Pr = 0.7$, relação $L/D_i = 0.8$ e $Ra = 10^4$, valores frequentes nas referências.

Como primeiro teste foi obtida a solução para $\epsilon = 0$ usando para tanto uma grade ortogonal e uma grade não ortogonal, ambas 10×72 com

atração para os tubos interno e externo. A fig.5 mostra como foi construída a grade não ortogonal.

Este teste se constitui, na opinião dos autores, um teste rigoroso do método já que apesar da não simetria da grade da fig.5, os campos de velocidade, pressão e temperatura devem ter sua simetria preservada. A fig.6 mostra as distribuições do coeficiente local de transmissão de calor no tubo externo obtidas no presente trabalho e a obtida por Kuehn e Goldstein (1976). Na tabela I são reproduzidos os valores de alguns pontos das curvas da fig.6 onde o caso (a) se refere aos dados de Kuehn e Goldstein, o caso (b) se refere a grade ortogonal e os casos (c) e (d) à grade não ortogonal para $\delta \leq 0$ e $\delta \geq 0$ respectivamente. Apesar do bom comportamento nota-se diferenças entre os resultados para $\delta \leq 0$ e $\delta \geq 0$. Maliska e Silva (1986) em trabalho recente demonstram que, para problemas de condução, grades do tipo da fig.5 (afastamentos angulares idênticos) não induzem a resultados assimétricos. Acredita-se portanto que as discrepâncias devam ser creditadas à difusão numérica já que o alinhamento do vetor velocidade com as linhas coordenadas é diferente em cada lado da linha de simetria física do problema.

A seguir são apresentados, na tabela II, valores do coeficiente local de transmissão de calor na superfície do cilindro externo para $\epsilon = 0.625$ e $\theta = 0^\circ$ (excentricidade vertical). O valor do coeficiente médio é 1.846 que concorda muito bem com o obtido por Cho et al. (1982). Apesar de não se dispor de dados tabelados para comparação, Projahn et al. (1981) apresentam uma curva que, dentro das limitações de leitura, apresenta excelente concordância com os resultados obtidos no presente trabalho.

Como último resultado típico a ser apresentado, a fig.7 mostra as distribuições do coeficiente local externo obtidas no presente trabalho e por Projahn et al. para $\epsilon = 0.625$ e $\theta = 90^\circ$ (excentricidade horizontal). Apesar da boa concordância na maior parte do perímetro, na região diretamente acima do tubo interno, podem ser notadas discrepâncias sensíveis para as quais, devido a escassez de resultados na literatura para excentricidade horizontal, não se tem até o momento explicação conclusiva.

CONCLUSÕES

O esquema numérico proposto por Maliska e Raithby (1984) que havia sido aplicado a diversos problemas de mecânica dos fluidos e de

transmissão de calor em regiões simplesmente conexas, foi pela primeira vez aplicado a problemas de convecção em regiões duplamente conexas arbitrárias.

Manteve nesta situação suas características de grande estabilidade e versatilidade.

Alguns resultados típicos para a convecção natural laminar entre cilindros horizontais concêntricos e excêntricos foram exibidos e, uma vez que não houve no presente trabalho preocupação na minimização dos erros devidos a difusão numérica e nem com um refino criterioso da malha, os resultados podem ser considerados muito bons.

NOMENCLATURA

x,y	sistema de coordenadas cartesianas
J	jacobiano da transformação
P	pressão
T	temperatura
u,v	componentes cartesianas da velocidade
U,V	componentes contravariantes sem normalização métrica
α, β, γ	componentes do tensor métrico
C_1, C_2, C_3	coeficientes de difusão transformados
t	tempo
ρ	massa específica
Γ^ϕ	coeficiente de difusão do escalar ϕ
ϕ	u,v,T,...
ξ, η	sistema de coordenadas curvilíneo
g	aceleração da gravidade
β^*	coeficiente de expansão térmica
A_p, A_e, A_w, A_s, A_n	coeficientes das equações discretizadas
ST^ϕ, P^ϕ, C^ϕ	termo de geração, de pressão e de forças de campo na equação de conservação de ϕ
$\bar{S}T^\phi, \bar{P}^\phi, \bar{C}^\phi$	termo de geração, de pressão e de forças de campo na equação de conservação transformada de ϕ
R_i, D_i	raio e diâmetro do tubo interno
R_o, D_o	raio e diâmetro do tubo externo
L	diferença de raios ($R_o - R_i$)
ϵ	excentricidade
k_{eq}	condutividade equivalente (q_{conv}/q_{cond})
Pr	número de Prandtl

Ra número de Rayleigh (baseado em L)

Subscritos

ξ, η referem-se a derivada parcial de 1ª ordem
P, E, W, N, S, ... indicam o ponto onde a propriedade é avaliada
e, n, s, w indicam as faces do volume de controle

REFERÊNCIAS

Cho, C.H., Chang, K.S. e Park, K.H. - "Numerical simulation of natural convection in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli", Journal of Heat Transfer, Vol.104, 624(1982)

Kuehn, T.H. e Goldstein, R.J. - "An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders", Journal Fluid Mech., Vol.74, 695(1976)

Maliska, C.R. e Raithby, G.D. - "A method for computing three dimensional flows using non-orthogonal boundary fitted coordinates", Int. Journal Num. Meth. in Fluids, Vol.4, 519(1984)

Maliska, C.R. e Silva, A.F.C. - "Local effects of highly nonorthogonal grids in the solution of heat transfer in cusped corners", proceedings of the First International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics, (a ser publicado, 1986)

Milioli, F.E., Maliska, C.R. e Silva, A.F.C. - "Convecção natural laminar em cavidades arbitrárias simplesmente conexas", anais do VIII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, 85(1985)

Projahn, U., Rieger, H. e Beer, H. - "Numerical analysis of laminar natural convection between concentric and eccentric cylinders", Numerical Heat Transfer, Vol.4, 131(1981)

Van Doormall, J.P. e Raithby, G.D. - "Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows", Numerical Heat Transfer, Vol.7, 147(1984)

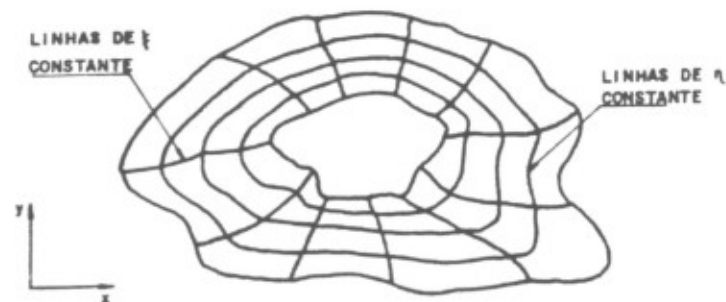


Figura 1 - Região duplamente conexa de geometria arbitrária

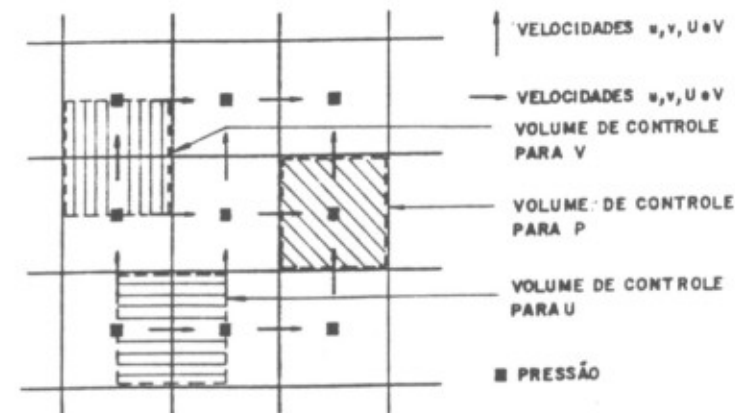


Figura 2 - Volumes de controle para U, V e P

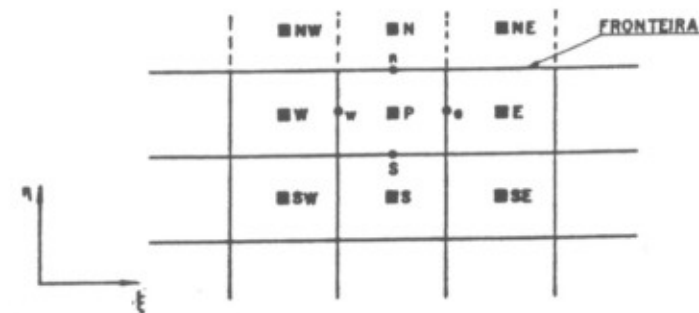


Figura 3 - Grade com pontos fictícios usada com coordenadas ortogonais

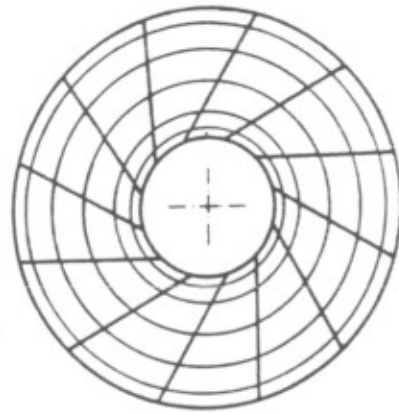
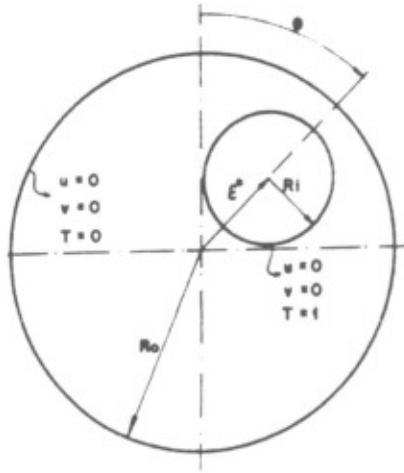


Fig. 4-Geometria do duplo tubo Fig. 5- Esquema da grade não ortogonal

Tabela I - Coeficiente local de transmissão de calor para o duplo tubo concêntrico

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
a	5.35	4.10	2.72	1.54	0.68	0.26	0.14
b	5.538	4.042	2.606	1.542	0.722	0.264	0.150
c	5.416	4.186	2.706	1.606	0.740	0.247	0.148
d	5.416	3.843	2.450	1.435	0.687	0.275	0.148

Tabela II- Coeficiente local de transmissão de calor para o duplo tubo com $\epsilon = 0.625$ e $\theta = 0^\circ$

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
	4.037	4.146	4.104	2.441	0.908	0.186	0.065

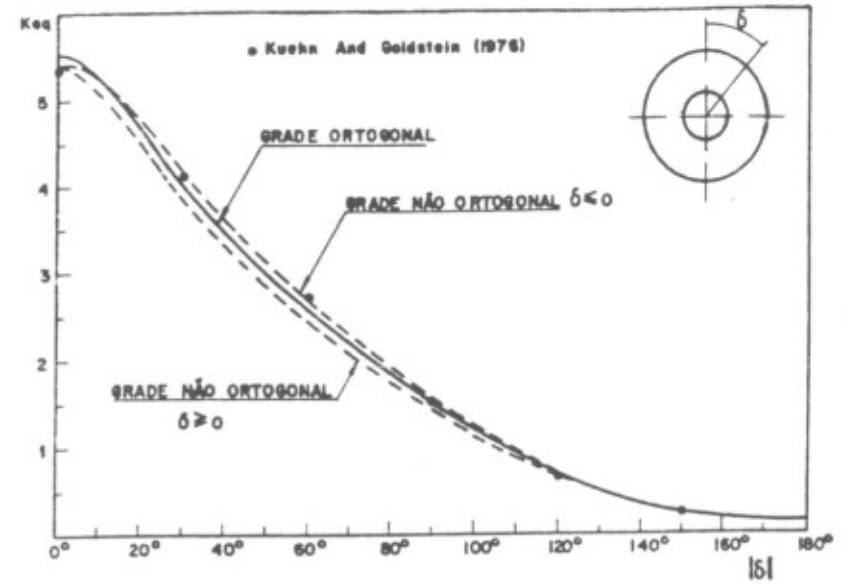


Figura 6 - Coeficiente local de transmissão de calor para o duplo tubo concêntrico

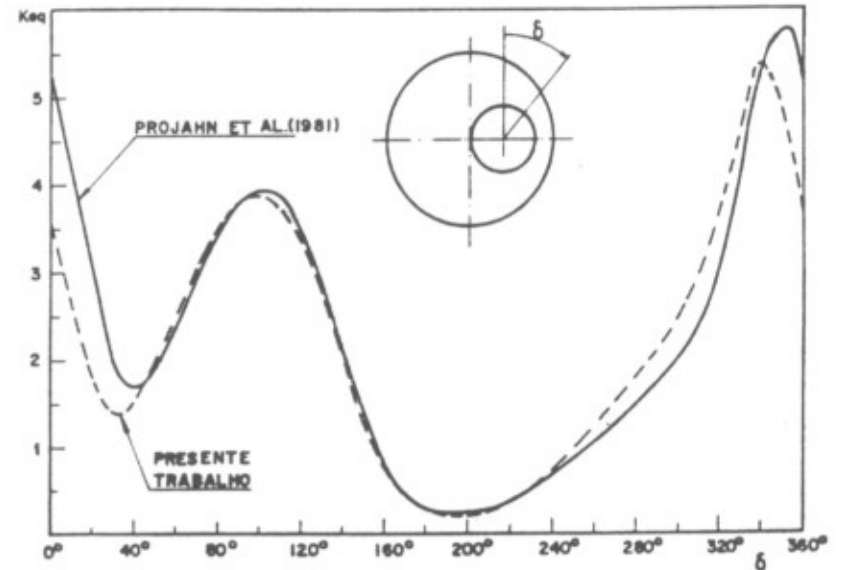


Figura 7 - Coeficiente local de transmissão de calor para o duplo tubo com $\epsilon = 0.625$ e $\theta = 90^\circ$