

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL SOBRE UMA GEOMETRIA AUTOMOBILÍSTICA

Rafael A. da Silveira*, Alvaro L. De Bortoli**

*Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Caixa Postal: 476 - SC - CEP: 88.040-900 - Florianópolis
E-mail: silveira@sinmec.ufsc.br

**Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
Av. Bento Gonçalves, 9500, 90501-900 – Porto Alegre – RS.
E-mail: dbortoli@mat.ufrgs.br

Palavras chave: Dinâmica dos fluidos computacional, Aerodinâmica, Diferenças finitas

Resumo. *O presente trabalho consiste na solução das equações de Euler para o escoamento incompressível bidimensional sobre um automóvel. Estas consistem de duas equações para a quantidade de movimento, de onde obtemos as componentes da velocidade e se adiciona uma equação (do tipo Poisson) para a pressão que preserva a continuidade. O método empregado para obter o sistema de equações aproximadas é o de diferenças finitas, por ser simples, mas eficaz para problemas desta natureza. Como as equações são transformadas do sistema Cartesiano para um sistema de coordenadas generalizadas, a implementação do método torna-se mais trabalhosa, já que estas equações, no novo sistema, são mais extensas. Os resultados obtidos para o escoamento incompressível são encorajadores, já que os campos de pressão e velocidades estão de acordo com o fenômeno físico e com os dados encontrados na literatura. Quanto à taxa de convergência, esta foi adequada, principalmente porque a equação para a pressão utilizada possui características que fazem com que o erro diminua rapidamente.*

1 INTRODUÇÃO

A simulação numérica de problemas de escoamento é uma técnica muito importante no desenvolvimento atual das geometrias automobilísticas. Os testes realizados em túneis de vento são geralmente caros em comparação com testes computacionais. A criação de computadores mais potentes e a elaboração e estudo de métodos numéricos cada vez mais eficazes, estão permitindo que sejam obtidos resultados cada vez mais confiáveis diminuindo a necessidade de experiências em laboratório, reservando-as para a análise de novos e complexos fenômenos.

O método de diferenças finitas¹ é muito utilizado por ser um método relativamente simples, mas de grande eficácia para resolver problemas desta natureza. Este consiste na transformação das equações diferenciais em equações aproximadas, via expansões em séries de Taylor que podem ser resolvidas numericamente num computador, fornecendo um conjunto de dados que permitem uma análise geral do problema.

O presente trabalho consiste na solução das equações de Euler, visando a simulação do escoamento do ar sobre um automóvel. Se considerarmos que a velocidade é tal que a massa específica não varia significativamente, temos o escoamento quase incompressível e as equações simplificam um pouco mais. A partir destas, iniciamos este trabalho, procurando sempre uma interpretação física e avançando gradativamente para situações mais complexas.

O primeiro passo foi escolher a geometria a ser estudada. Uma malha com o perfil aproximado de um automóvel Puma foi confeccionada em duas dimensões partindo de pontos conhecidos no contorno e construindo um semicírculo afastada suficientemente deste perfil formando o domínio da solução. Procurou-se tornar a malha mais refinada nas regiões onde ocorrem as maiores variações de pressão, velocidade, etc., que são aquelas próximas ao corpo. Os pontos do domínio são calculados através da solução numérica de um sistema de equações diferenciais parciais elípticas (Poisson) em coordenadas generalizadas² (coincidentes com a fronteira) e aproximando estas em diferenças finitas. Resultados numéricos são apresentados para velocidades de 10 m/s.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes da dinâmica dos fluidos são as equações de Navier-Stokes, que podem ser escritas na forma conservativa como:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

onde μ representa a viscosidade do fluido, ρ a massa específica, 'u' e 'v' as componentes do vetor velocidade nas direções x e y, respectivamente, e p a pressão no fluido. Adiciona-se a estas equações a da conservação da massa que pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Desprezando os efeitos da viscosidade e a variação da massa específica, obtém-se equações de Euler para escoamento incompressível

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5)$$

que quando agrupadas convenientemente com a equação de continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

resultam na equação para a pressão^{3,4}

$$\nabla^2 p = -\left[(u^2)_{xx} + (uv)_{xy} + (v^2)_{yy} \right] - D_t \quad (7)$$

onde:

$$D = u_x + v_y \quad (8)$$

3 PROCEDIMENTOS DE SOLUÇÃO

Como não existe solução analítica para as equações de Euler e para as geometrias de interesse, as equações governantes do escoamento são resolvidas sobre o domínio utilizando o mesmo sistema de coordenadas e a mesma discretização utilizados para confeccionar a malha. Todos os dados são armazenados em matrizes e podem ser visualizados com ajuda de *softwares* específicos⁵. Para isso, uma malha é confeccionada, utilizando um sistema de coordenadas generalizadas coincidentes com a fronteira. Devido a este fato, as equações escritas no sistema Cartesiano devem ser transformadas para este novo sistema, resultando em expressões normalmente mais complexas.

Quando se faz uma transformação de sistema de coordenadas⁶, tem-se que relacionar as medidas de comprimento e área. Esta relação é feita através do cálculo das métricas (ver figura 3.1). No caso em estudo, transforma-se um sistema não ortogonal (x, y) para um sistema (plano computacional) ortogonal (ξ, η).

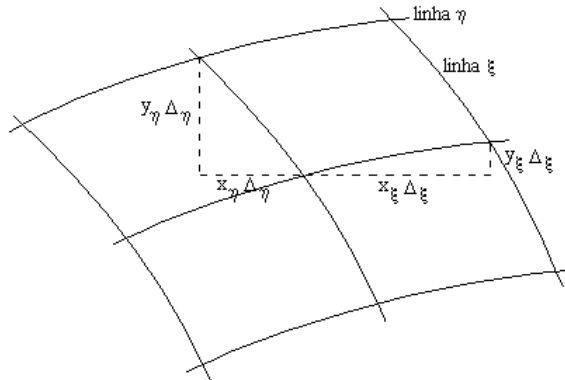


Fig. 3.1: Métricas da transformação de coordenadas

As métricas são calculadas conforme

$$\begin{aligned} \xi_x &= y_\eta / J^{-1} & \eta_x &= -y_\xi / J^{-1} \\ \xi_y &= -x_\eta / J^{-1} & \eta_y &= x_\xi / J^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

onde J^{-1} é o inverso do Jacobiano da transformação de coordenadas que é dado por $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$. Assim, $J^{-1} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$.

As coordenadas dos pontos da malha são armazenadas em matrizes $x(i,j)$ e $y(i,j)$ com i variando de 2 até n_i e j desde 2 até n_j , resultando num total de $(n_i-1) \times (n_j-1)$ pontos para a malha.

Na figura 3.2 podemos notar o que ocorre quando se refina a malha. As linhas mais próximas ao corpo são atraídas para junto deste através da solução de um sistema de equações elípticas do tipo Poisson. Esta atração deve ser feita de modo a tornar a malha mais refinada nesta região, devido às grandes variações das propriedades do fluido.

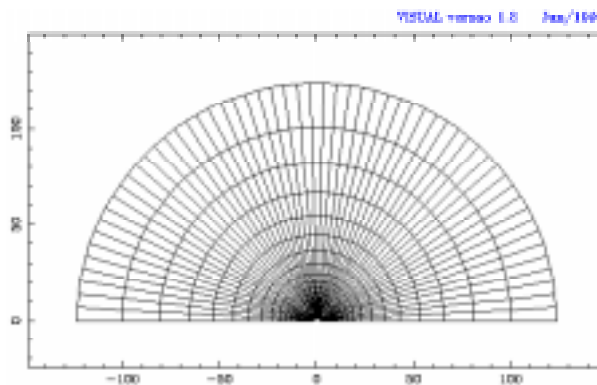


Fig. 3.2: Malha para o automóvel, 59x29 pontos.

O refino da malha também torna o perfil do automóvel mais apropriado e próximo da realidade, o que pode ser verificado na figura 3.3.

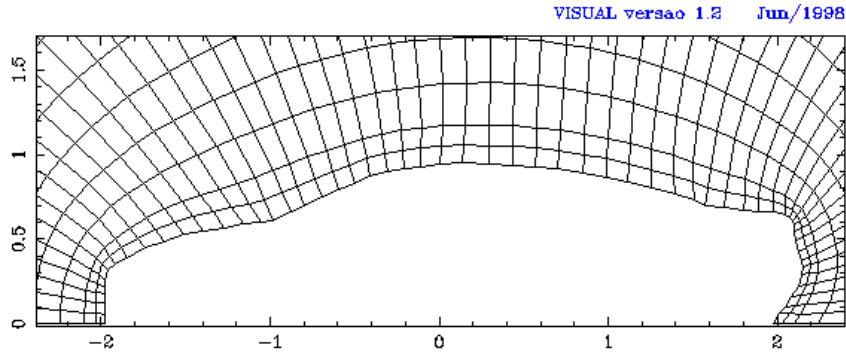


Fig. 3.3: Amplificação do perfil do automóvel.

Utilizando as matrizes das coordenadas dos pontos, conforme figura 3.4, pode-se discretizar as equações usando um esquema adequado. O método escolhido para este trabalho foi o de Diferenças Finitas Centrais, que consiste em expandir as derivadas em séries de Taylor e considerar somente os termos de primeira e segunda ordem.

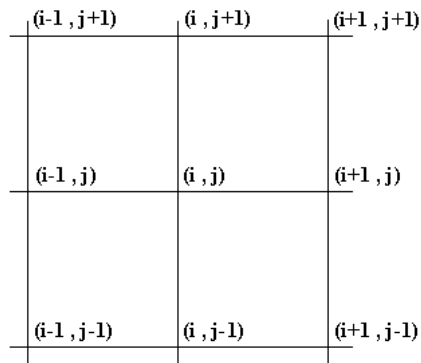


Fig. 3.4: Plano computacional

As equações de Euler, transformadas para o novo sistema de coordenadas, tornam-se:
Quantidade de movimento para u e v:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_x\right) + v\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_y\right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x\right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_x\right) + v\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_y\right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_y + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_y\right) \quad (11)$$

Pressão:

$$\begin{aligned}
 \alpha \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} = \rho \left[\left(\xi_x^2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial \xi^2} + 2\xi_x \eta_x \frac{\partial^x u^2}{\partial \eta \partial \xi} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial \eta^2} \right) + \right. \\
 \left. + 2 \left(\xi_x \xi_y \frac{\partial^2 (uv)}{\partial \xi^2} + (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \frac{\partial^2 (uv)}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_x \eta_y \frac{\partial^2 (uv)}{\partial \eta^2} \right) \right. \\
 \left. + \left(\xi_y^2 \frac{\partial^2 v^2}{\partial \xi^2} + 2\xi_y \eta_y \frac{\partial^x v^2}{\partial \eta \partial \xi} + \eta_y^2 \frac{\partial^2 v^2}{\partial \eta^2} \right) \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \xi_x^2 + \xi_y^2; \\
 \beta &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y; \\
 \gamma &= \eta_x^2 + \eta_y^2;
 \end{aligned}$$

A aproximação em diferenças finitas fornece(m) para a(as):
Velocidades:

$$\begin{aligned}
 u_{ij} = u_{ij}^0 - \delta \Delta t \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \xi_x + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \eta_x \right) \right. \\
 \left. + u_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \xi_x + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \eta_x \right) + v_{i,j} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \xi_y + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \eta_y \right) \right] \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{ij} = v_{ij}^0 - \alpha \Delta t \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \xi_y + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \eta_y \right) \right. \\
 \left. + u_{ij} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \xi_x + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \eta_x \right) + v_{i,j} \left(\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta \xi} \xi_y + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \eta_y \right) \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

Pressão (Eq. 15):

$$\begin{aligned}
 p_{i,j} = \frac{1}{2(\alpha+\gamma)} \left[\alpha(p_{i+1,j} + p_{i-1,j}) + \gamma(p_{i,j+1} + p_{i,j-1}) + \frac{1}{2}\beta(p_{i+1,j+1} - p_{i+1,j-1} - p_{i-1,j+1} + p_{i-1,j-1}) \right] \\
 + \frac{\rho}{2(\alpha+\gamma)} \left[\xi_x^2 (u_{i+1,j}^2 - 2u_{i,j}^2 + u_{i-1,j}^2) + \frac{1}{2}\xi_x \eta_x (u_{i+1,j+1}^2 - u_{i+1,j-1}^2 - u_{i-1,j+1}^2 + u_{i-1,j-1}^2) \right. \\
 \left. + \eta_x^2 (u_{i,j+1}^2 - 2u_{i,j}^2 + u_{i,j-1}^2) + \xi_x \xi_y (u_{i+1,j} v_{i+1,j} - 2u_{i,j} v_{i,j} + u_{i-1,j} v_{i-1,j}) + \frac{1}{4}(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) \right. \\
 \left. (u_{i+1,j+1} v_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} v_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} v_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} v_{i-1,j-1}) + \eta_x \eta_y (u_{i,j+1} v_{i,j+1} - 2u_{i,j} v_{i,j} \right. \\
 \left. + u_{i,j-1} v_{i,j-1}) + \xi_y^2 (v_{i+1,j}^2 - 2v_{i,j}^2 + v_{i-1,j}^2) + \frac{1}{2}\xi_y \eta_y (v_{i+1,j+1}^2 - v_{i+1,j-1}^2 - v_{i-1,j+1}^2 + v_{i-1,j-1}^2) \right. \\
 \left. + \eta_y^2 (v_{i,j+1}^2 - 2v_{i,j}^2 + v_{i,j-1}^2) \right] \\
 - \frac{\rho}{4\Delta t(\alpha+\gamma)} \left[(u_{i+1,j}^0 - u_{i-1,j}^0) \xi_x + (u_{i,j+1}^0 - u_{i,j-1}^0) \eta_x + (v_{i+1,j}^0 - v_{i-1,j}^0) \xi_y + (v_{i,j+1}^0 - v_{i,j-1}^0) \eta_y \right]
 \end{aligned}$$

onde δ , que aparece multiplicando o passo temporal, corresponde aos coeficientes do método de Runge-Kutta.

4 CONDIÇÕES DE CONTORNO E INICIAIS

As condições iniciais utilizadas em todos os pontos do domínio, exceto nas fronteiras, foram as seguintes:

$$\begin{aligned} p(i, j) &= p_{in} \\ u_0(i, j) &= 0,95 \cdot u_{in} \\ v_0(i, j) &= v_{in} = 0.0 \end{aligned} \quad (16)$$

e as condições de contorno foram assim definidas para a:

Pressão:

$$\begin{aligned} p(2, j) &= 0,75 \cdot p(3, j) + 0,25 \cdot p(4, j) \\ p(n_i, j) &= 0,75 \cdot p(n_i - 1, j) + 0,25 \cdot p(n_i - 2, j) \\ p(i, 2) &= 0,75 \cdot p(i, 3) + 0,25 \cdot p(i, 4) \\ p(i, n_j) &= p_{in} \end{aligned} \quad (17)$$

Velocidade:

$$u(i, 2) = \frac{u(i, 2) - V(i, 2) \cdot \eta_x(i, 2)}{[\eta_x(i, 2)]^2 + [\eta_y(i, 2)]^2}; \quad v(i, 2) = \frac{v(i, 2) - V(i, 2) \cdot \eta_y(i, 2)}{[\eta_x(i, 2)]^2 + [\eta_y(i, 2)]^2} \quad (18)$$

onde:

$$V(i, 2) = u(i, 2) \cdot \eta_x(i, 2) + v(i, 2) \cdot \eta_y(i, 2) \quad (19)$$

é a componente contravariante do vetor velocidade \vec{V} normal à superfície do automóvel. Esta faz com que os vetores tangenciem o automóvel; ou seja, queremos que o fluido contorne o corpo, mudando apenas a sua magnitude e nunca tendo outra direção que não seja a tangente à linha da superfície bem próximo desta. As outras condições⁴ são dadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(i, n_j) &= u_{in} \\ v(i, n_j) &= v_{in} \\ u(2, j) &= 0,75 \cdot u(3, j) + 0,25 \cdot u(4, j) \\ u(n_i, j) &= 0,75 \cdot u(n_i - 1, j) + 0,25 \cdot u(n_i - 2, j) \\ v(n_i, j) &= v_{in} \\ v(2, j) &= v_{in} \end{aligned} \quad (20)$$

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

No que segue, apresentam-se os resultados obtidos através da solução das equações de Euler, mostrando o campo de pressão e o de velocidades, inclusive com a captação de vórtices de grande magnitude.

A solução foi obtida com aproximadamente 10.000 iterações e o erro de aproximação foi da ordem de 10^{-6} para a pressão com um passo de tempo de 10^{-5} . O esquema de Runge-Kutta utilizado para o avanço no tempo foi o de 3 estágios, com coeficientes 0,5, 0,5, e 1, respectivamente. Este escoamento foi calculado para velocidade da corrente livre de 10 m/s (\approx Mach 0,03) sob a ação da pressão atmosférica ($10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ atm}$).

Os resultados obtidos através da solução das equações de Euler são satisfatórios, ou seja, coerentes com as hipóteses feitas acerca do fenômeno real. A figura 5.1 apresenta um mapa de cores do campo de pressões sobre o automóvel. Pode-se notar que, como o escoamento é incompressível; a variação na pressão é pequena em todo o domínio.

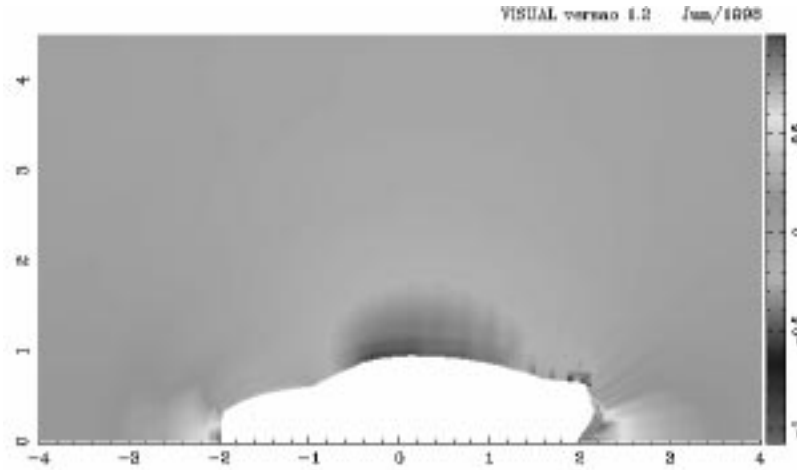


Fig.5.1: Campo de pressão junto à superfície do automóvel, $v = 10 \text{ m/s}$

Na figura 5.1 pode-se perceber que as zonas de maior variação de pressão ocorrem junto à superfície; isto ocorre devido à grande variação na velocidade do escoamento nessas regiões. Como as equações são acopladas e conforme o teorema de Bernoulli, variações na velocidade implicam em variações na pressão de modo inverso, ou seja, altas (baixas) velocidades implicam em uma zona de pressão baixa (alta)⁷.

A figura 5.2 mostra as isolinhas de pressão próximas ao corpo. Nestas, os valores da pressão são os mesmos para todos os pontos. Pode-se notar que as linhas se distribuem em 3 regiões: uma na frente do automóvel, uma acima deste e outra atrás do corpo, mostrando que essa diferença de pressão se propaga como uma onda a partir de tais locais na superfície. As oscilações que surgem devem-se ao emprego das equações de Euler e a malha utilizada ser ainda grossa. A introdução dos termos de viscosidade natural ou artificial⁸ tornaria as isocurvas de pressão mais suave.

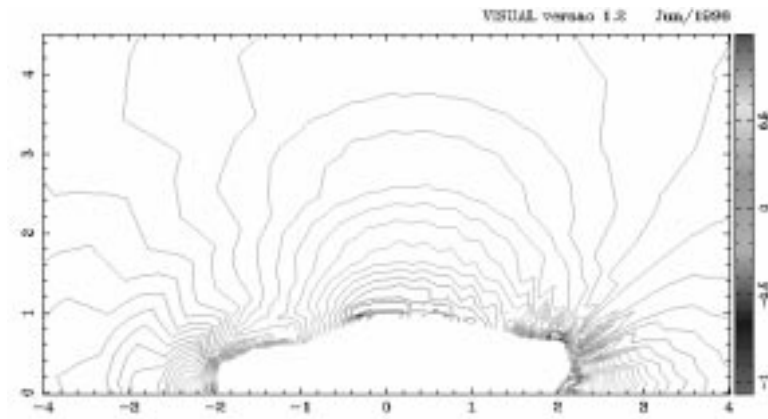


Fig. 5.2: Linhas de pressão, $v = 10$ m/s

Na figura 4.3 temos o campo de velocidades junto ao veículo. Nela podemos observar que as regiões de velocidade mais alta (baixa) coincidem com as regiões de pressão mais baixa (alta), donde concluímos que esta simulação está de acordo com o fenômeno real.

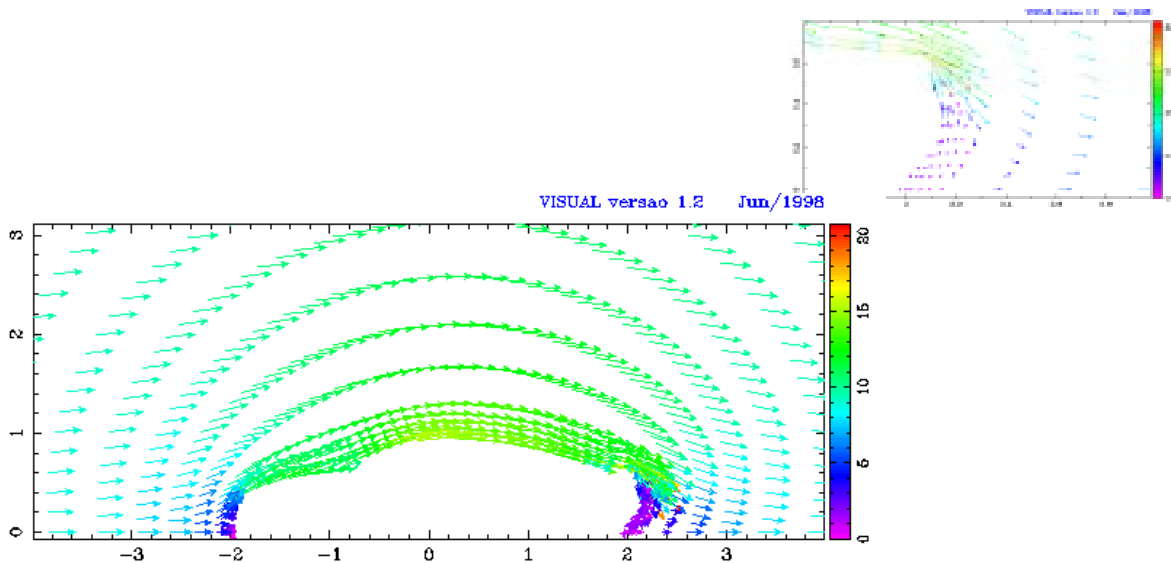


Fig. 5.3: Campo de velocidades sobre o automóvel, $V = 10$ m/s.

A figura 4.3 mostra ainda a formação de zonas de circulação que ocorrem na parte traseira do automóvel. Isto deve-se ao fato de que as partículas tendem a ‘ocupar’ o espaço vazio (vácuo) que se forma nesta região. Portanto, algumas retornam, sobem e encontram a corrente livre do escoamento, repetindo este processo que dá origem aos vórtices. Uma esteira de maior tamanho seria observada quando da introdução dos termos viscosos (equações de Navier-Stokes ao invés de Euler).

6 CONCLUSÕES

Visando contribuir para um melhor entendimento e avanço das técnicas em dinâmica dos fluidos computacional é que este trabalho está sendo desenvolvido, ainda que num estágio intermediário, mas com grandes perspectivas para o futuro.

Os resultados já obtidos são qualitativamente coerentes, principalmente considerando que as malhas ainda são pouco refinadas. Com o campo de pressões obtido através da solução das equações de Euler, pode-se determinar a ‘força’ que o fluido exerce sobre o corpo, assim como a interação entre a pressão e a velocidade observada através do campo de velocidades obtido.

Como próximos passos para o trabalho tem-se que resolver as equações de Euler para um escoamento compressível (velocidades mais altas implicam em variação na massa específica do fluido), resolver as equações de Navier-Stokes para o escoamento, a fim de obter uma simulação bidimensional mais completa, e ainda estender esta para três dimensões, assim como aperfeiçoar a malha a fim de termos a simulação mais realística.

A opinião dos autores é de que os resultados obtidos são encorajadores. No entanto, muito trabalho ainda deve ser feito no sentido de obter soluções mais complexas do escoamento sobre geometrias automobilísticas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDERSON, D. A., TANNEHIL, J. C., PLETCHER, R. H., *Computacional Fluid Mechanics and Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York, (1984).
- [2] MALISKA, C. R., *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, Editora Livro Técnico e Científico – LTC, (1995).
- [3] GRESHO, P. M., SANI, R. L., *On Pressure Boundary Conditions for Incompressible Navier-Stokes Equations*, *Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol. 7, pp 1111-1145, (1987).
- [4] HIRSCH, C., *Numerical Computational of Internal and External Flows*, John Wiley & Sons, England, Vol. 2, (1990).
- [5] JUSTO, D.A.R., *Visual 1.2 for Windows 95*, UFRGS, (1998).
- [6] MARCHI, C. H., MALISKA, C. R., *Dedução de Equações para Discretização de Domínios Tridimensionais Arbitrários em Coordenadas Generalizadas*, Relatório Interno, EMC / CTC / UFSC, Florianópolis, (1988).
- [7] DEGREZ, G., ANDERSON, J. D., GRUNDMANN, R., DICK, E., *Introduction to Computational Fluid Dynamics*, VKI Lectures, (1992).
- [8] HUGUES, W.F., *Dinâmica de Fluidos*, McGraw-Hill do Brasil, (1974).