

## AVALIAÇÃO DO GRADIENTE DE PRESSÃO PARA ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS EM MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

**Fábio A. Schneider**

**Clovis R. Maliska**

Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica  
88040-900 – Florianópolis, SC, Brasil

***Resumo.** Este trabalho apresenta um esquema numérico de avaliação do gradiente de pressão para escoamentos bidimensionais incompressíveis utilizando malhas não-estruturadas. A metodologia empregada é semelhante a metodologia CVFEM (Control Volume Based Finite Element) que utiliza malhas não-estruturadas para obtenção dos volumes de controle. Na discretização dos termos fontes, das equações de Navier-Stokes, são necessárias avaliações do gradiente de pressão nos pontos nodais centrais de cada volume de controle. É proposta uma forma alternativa de avaliação destes gradientes, que difere da formulação tradicional da metodologia CVFEM. É apresentada uma comparação entre o modelo aqui desenvolvido e outras duas formulações: a formulação que emprega Diagramas de Voronoi, que também usa malhas não-estruturadas, e a metodologia tradicional dos volumes finitos.*

***Palavras-chave:** Gradientes de pressão, Malhas não-estruturadas, Escoamentos de fluidos*

### 1. INTRODUÇÃO

O uso de coordenadas generalizadas na solução numérica de problemas de mecânica dos fluidos está bastante consolidado e faz parte da maioria dos simuladores comerciais da atualidade. Porém, o mapeamento de geometrias bastante irregulares em coordenadas generalizadas, utilizando um mapeamento único, apresenta dificuldades.

Uma das soluções disponíveis nos simuladores para este problema é o emprego da técnica de multiblocos. Outra alternativa é o uso de malhas não-estruturadas onde o método dos elementos finitos se destaca por apresentar grande versatilidade geométrica, porém, sem garantir os princípios de conservação nos volumes elementares. A busca de métodos aptos a tratar geometrias bastante complexas e ao mesmo tempo conservativos motivou o desenvolvimento de metodologias que possuíssem duas características: o emprego das técnicas de balanço de conservação das propriedades nos volumes elementares e a obtenção

destes volumes a partir de malhas não-estruturadas. Estas metodologias foram denominadas Control Volume Based Finite Element Method (CVFEM), das quais podemos citar as desenvolvidas por Baliga & Patankar (1988) e Schneider (1988).

Para obter os volumes de controle elementares a partir de uma malha não-estruturada, dispõe-se de algumas técnicas. Uma delas é o método das medianas, onde os volumes são gerados a partir de uma triangulação, normalmente encontrada no método dos elementos finitos. Esse processo de obtenção dos volumes é empregado no modelo numérico desenvolvido neste trabalho e é comumente encontrado na metodologia CVFEM desenvolvida por Baliga & Patankar (1988). Uma outra técnica de obtenção dos volumes é o método das mediatrizes que origina os volumes ou diagramas de Voronoi (Taniguchi & Kobayashi, 1991). Estes volumes constituem a base da metodologia dos Diagramas de Voronoi, descrita em Maliska (1995) e Maliska & Vasconcellos (1998).

O presente trabalho propõe a solução numérica das equações de Navier-Stokes para escoamento de fluidos através de uma metodologia similar à proposta por Baliga & Patankar (1988). Na discretização dos termos fontes, das equações de Navier-Stokes, são necessárias avaliações do gradiente de pressão nos pontos nodais de cada volume de controle. Neste trabalho é apresentada uma forma de avaliação do gradiente de pressão que difere da metodologia original (Baliga & Patankar, 1988).

A metodologia dos Diagramas de Voronoi (Maliska & Vasconcellos, 1998) e a formulação tradicional de volumes finitos (Maliska, 1995) servem como referência para a avaliação do desempenho do método aqui desenvolvido.

Para validação dos esquemas numéricos aplicados e comparações entre as metodologias, o problema teste escolhido foi a convecção forçada em cavidade quadrada, com solução de referência em Guia et al. (1982).

## **1.1 Revisão Bibliográfica**

As primeiras formulações envolvendo volumes poligonais gerados a partir de malhas triangulares surgiram na década de 70. Esta nova metodologia, baseada nos Polygonal Control-volumes, foi denominada Control Volume Finite Element Method - CVFEM (Baliga & Patankar, 1980). Outra variante desta metodologia desenvolveu-se na década de 80, e pode ser vista em Schneider (1988).

Paralelamente, outras metodologias se desenvolveram baseadas em malhas não-estruturadas. Algumas usam a própria triangulação para representar os volumes de controle, como é o caso de Mavriplis (1992), e outras, através do método das mediatrizes, geram os volumes de Voronoi (Taniguchi et al., 1991 e Maliska, 1995), onde são feitos os balanços de conservação.

O emprego destas metodologias, que usam malhas não-estruturadas, progrediu modestamente dentro do Método dos Volumes Finitos (MVF), que sempre foi amplamente aplicado na mecânica dos fluidos computacional, por basear-se na conservação das propriedades em um volume de controle elementar. O grande destaque era o uso de coordenadas generalizadas para discretização do domínio, que se difundiu rapidamente no MVF devido a facilidade de geração das malhas, que neste caso, são estruturadas.

Com as dificuldades encontradas para discretização de geometrias muito irregulares através de coordenadas generalizadas, a discretização em malhas não-estruturadas tornou-se novamente alvo de estudo. Dentro da mecânica dos fluidos computacional, vários são os

trabalhos recentes que utilizam malhas não-estruturadas, como (Taniguchi & Kobayashi, 1991) e (Venkatakrishnan, 1996).

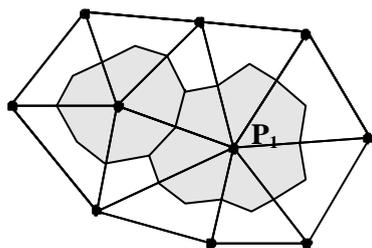
Atualmente, com emprego cada vez mais freqüente de malhas não-estruturadas, é crescente o interesse pelos métodos de avaliação de gradientes de pressão na solução numérica das equações de Navier-Stokes. Exemplos podem ser vistos em Maliska (1995), Peters et al. (1997), Cardoso (1997), Vasconcellos e Maliska (1998).

## 2. FORMULAÇÃO

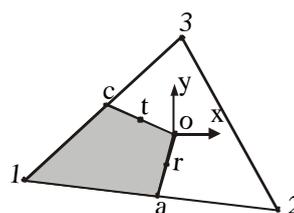
A formulação apresentada aqui, como comentado anteriormente, é similar a proposta por Baliga e Patankar (1988). A discretização das equações e o emprego da função de interpolação segue a formulação CVFEM original. A principal motivação para a proposição de uma nova avaliação dos gradientes de pressão é devida a assimetria que a triangulação, que origina a construção dos volumes de controle pode oferecer.

### 2.1 Construção do volume de controle pelo método das medianas

Este método consiste em unir o centro geométrico dos triângulos aos pontos médios dos lados dos triângulos. A Figura 1.a representa volumes construídos por este método.



a) Volume finito obtido pelo processo da mediana



b) Elemento triangular que compõe o volume da mediana

Figura 1 – Volume de controle

### 2.2 Equações Governantes

Admitindo o fluido como Newtoniano e adotando um sistema de coordenadas cartesianas (x, y), temos, para problema convectivo/difusivo bidimensional transiente, as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) + \frac{\partial}{\partial x}(ruu) + \frac{\partial}{\partial y}(rvu) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{m}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{m}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + S^u \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(rv) + \frac{\partial}{\partial x}(ruv) + \frac{\partial}{\partial y}(rvv) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathbf{m}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathbf{m}\frac{\partial v}{\partial y}\right) + S^v \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ru}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{rv}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rf}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{ruf}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{rvf}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^f \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^f \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}\right) + S^f \quad (4)$$

As Equações (1) e (2) são as equações de conservação da quantidade de movimento em  $x$  e  $y$  respectivamente. A Equação (3) é a equação de conservação da massa e a Eq. (4) é a equação de conservação na forma geral para uma variável genérica  $f$ , onde  $G$  é o coeficiente difusivo,  $S$  representa o termo fonte,  $r$  é a massa específica do fluido e  $t$  representa o tempo. A Equação (4) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rf}) + \nabla \cdot (\vec{J}) = S^f \quad (5)$$

com

$$\vec{J} = \mathbf{r}\vec{V}f - \Gamma^f \nabla f \quad (6)$$

onde  $\vec{J}$  representa o fluxo total (advectivo e difusivo) e  $\vec{V}$  é o vetor velocidade.

### 2.3 Discretização das equações para $f$

A integração das equações de conservação segue a formulação básica da metodologia CVFEM (Baliga & Patankar, 1988). Esta integração é realizada sobre o volume de controle  $P_1$ , representado na Fig.1.a. Note que este volume é formado por vários elementos triangulares que contribuirão individualmente para obtenção das equações aproximadas de cada volume. O sub-volume de controle  $laoc$ , hachurado na Fig. 1.b, é parte do volume de controle no qual é realizada a integração. Portanto, o elemento triangular  $123$  contribuirá no balanço total das propriedades do volume com dois fluxos  $\vec{J}$ , um para o segmento  $\overline{ao}$  e outro para o segmento  $\overline{oc}$ , calculados nos pontos  $r$  e  $t$  da Fig. 1.b, respectivamente. Portanto, integrando a Eq. (5) no volume de controle  $P_1$ , temos

$$\frac{M_P \mathbf{f}_P - M_P^o \mathbf{f}_P^o}{\Delta t} + \int_a^o \vec{J} \cdot \vec{n} ds + \int_o^c \vec{J} \cdot \vec{n} ds - \int_{laoc} S^f dV + \left[ \begin{array}{l} \text{contrib. de outros elementos} \\ \text{associados ao nó } P_1 \end{array} \right] = 0 \quad (7)$$

Detalhes sobre esta integração podem ser vistos em Schneider (1998).

### 2.4 Função de interpolação para a pressão

A função de interpolação tem o objetivo de avaliar o valor de uma propriedade genérica  $f$  na interface do volume de controle bem como suas derivadas. Quando se trata de uma propriedade genérica  $f$ , a idéia básica é aplicar esta função de interpolação na direção média do escoamento. A função de interpolação assume a forma de uma superfície

exponencial que é função do número de Peclet. Entretanto, para o caso da pressão, em função de sua natureza elíptica uma aproximação linear é satisfatória.

Para a obtenção desta equação, considere o elemento triangular  $I23$  da Fig. 1.b. Este elemento é parte integrante do volume de controle  $P_1$ , gerado na Fig. 1.a. Sobre os pontos  $1$ ,  $2$  e  $3$  são armazenados os valores das propriedades, inclusive os valores para a pressão. A função de interpolação para a pressão  $p$ , é obtida construindo-se um plano entre os pontos  $1$ ,  $2$  e  $3$  com os valores de  $p$  armazenados nestes pontos. Desta forma temos

$$p = dx + ey + f \quad (8)$$

onde

$$d = \frac{[(y_2 - y_3)p_1 + (y_3 - y_1)p_2 + (y_1 - y_2)p_3]}{\text{denom}} \quad (9)$$

$$e = \frac{[(x_3 - x_2)p_1 + (x_1 - x_3)p_2 + (x_2 - x_1)p_3]}{\text{denom}} \quad (10)$$

$$f = \frac{[(x_2y_3 - x_3y_2)p_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)p_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)p_3]}{\text{denom}} \quad (11)$$

$$\text{denom} = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 \quad (12)$$

Portanto, a Eq. (8) é uma função de interpolação que nos permite determinar um valor de pressão e de suas derivadas em qualquer ponto interno do elemento triangular  $I23$ , em função das coordenadas  $x, y$  deste ponto.

## 2.5 Avaliação dos gradientes de pressão

A integral da equação de conservação da quantidade de movimento é idêntica à da equação de conservação de  $f$  (Baliga e Patankar, 1988), exceto pela presença da integral envolvendo o gradiente de pressão. Para aproximar esses gradientes fazemos uso da Eq. (8), e as integrais resultam

$$\int_{1aoc} \frac{\partial p}{\partial x} dV = \frac{A_e}{3} d \quad (13)$$

$$\int_{1aoc} \frac{\partial p}{\partial y} dV = \frac{A_e}{3} e \quad (14)$$

onde  $A_e$  representa a área do elemento triangular  $I23$ .

As expressões resultantes das integrais das Eq. (13) e (14) são adicionadas ao termo fonte das equações de conservação de quantidade de movimento de  $u$  e  $v$ , respectivamente, em cada elemento triangular  $I23$  que compõe o volume elementar,. Esta é a formulação proposta em Baliga e Patankar (1988).

Uma forma alternativa de avaliar este termo fonte é calculando a integral diretamente no volume de controle, obtendo, para isso, um gradiente de pressão representativo para este volume como um todo. Os termos de pressão, dados pelas Eq. (13) e (14), podem ser substituídos por um termo fonte de pressão equivalente, avaliado diretamente na equação do volume de controle  $V$ , da seguinte forma

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_p \cdot V_p \quad (15)$$

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial y} dV = \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_p \cdot V_p \quad (16)$$

onde o gradiente em  $p$  é o gradiente representativo do volume de controle, e  $V_p$  é o volume da célula de integração. Uma forma de avaliar o gradiente em  $p$  é fazê-lo em função dos gradientes de cada um dos  $n$  elementos que compõe o volume. Podemos escrever este gradiente como

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_p = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_i \cdot |X_{máx} - X_{mín}|_i \right)}{\sum_{i=1}^n (|X_{máx} - X_{mín}|_i)} \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_p = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_i \cdot |Y_{máx} - Y_{mín}|_i \right)}{\sum_{i=1}^n (|Y_{máx} - Y_{mín}|_i)} \quad (18)$$

onde  $X, Y$  máximos e mínimos podem ser visualizados na Fig. 2.

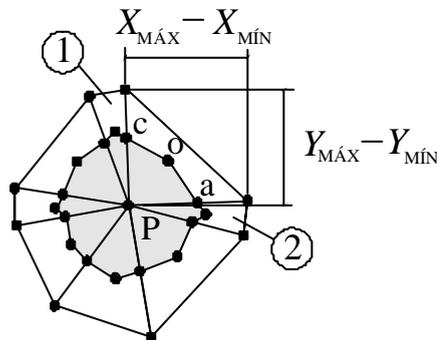


Figura 2 – Parâmetros para o cálculo do gradiente de pressão no volume

Note que esta formulação difere daquela proposta em Maliska (1995) e Cardoso (1997), onde os somatórios são realizados sobre segmentos. Aqui estes somatórios envolvem os elementos triangulares, onde o gradiente de pressão particular de cada elemento triangular  $i$  é obtido derivando a função de interpolação, como feito para as Eq. (13) e (14). A Figura 2 ilustra um volume de controle onde esta aproximação é usada para a determinação do gradiente de pressão.

A motivação para a proposição das Eq. (17) e (18) surgiu da observação de algumas situações particulares. Considere a Fig. 2 onde dois elementos triangulares de formato achatado estão nume rados. Note que um gradiente de pressão calculado na direção  $x$  para o volume centrado em  $P$ , através da Eq. (13), considera que os elementos 1 e 2 contribuem de forma igual, pois possuem a mesma área. Porém, o elemento de número 2 não deveria afetar fortemente o cálculo do gradiente de pressão, uma vez que possui dois pontos bem acima e afastados do centro  $P$  do volume. Já na Eq. (17) proposta, o elemento 1 terá uma maior contribuição para o cálculo do gradiente, pois os pesos serão dados em função das dimensões máximas dos elementos.

Vale lembrar que na discretização estruturada, a determinação deste gradiente é diretamente obtida por diferenças centrais, pois os pontos de pressão vizinhos estão alinhados com o centro do volume no qual se deseja determinar o gradiente, não necessitando um tratamento especial, como foi aqui descrito. Já para os diagramas de Voronoi uma formulação similar a esta é necessária, pois várias contribuições para o gradiente de pressão são dadas pelos diversos pontos que estão conectados ao ponto central, onde se deseja determinar o gradiente (Maliska, 1995). Outros trabalhos envolvendo este e outros aspectos podem ser vistos em Peters et al. (1997), Cardoso (1997) e Vasconcellos e Maliska (1998).

### 3. PROBLEMA TESTE: Convecção Forçada em Cavidade Quadrada

O problema de convecção forçada de um fluido incompressível em uma cavidade quadrada é resolvido para um escoamento bidimensional laminar e em regime permanente. Este problema é clássico na literatura para testes de novos algoritmos.

A cavidade tem dimensões unitárias e possui a tampa superior móvel e com velocidade horizontal também unitária. todas as demais velocidades são nulas nas faces. As equações governantes para este problema são as Eq. (1), (2) e (3), extraídos os termos temporais.

Este problema foi resolvido para dois valores do número de Reynolds,  $Re = 400$  e  $Re = 1000$ , em com uma malha:  $29 \times 29$  volumes, conforme a Fig. 3.

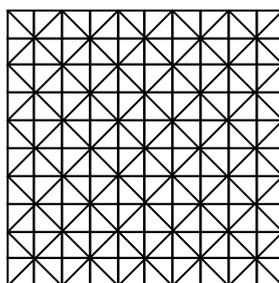


Figura 3 – Discretização do domínio

É importante destacar que a Fig. 3 têm caráter apenas ilustrativo e não representa o número de volumes exato utilizado na obtenção das soluções. As Figuras 4 à 7 apresentam os resultados obtidos.

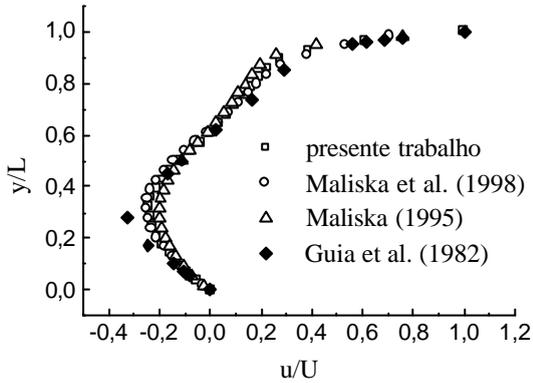


Figura 4 – Componente horizontal de veloc. em  $x/L = 0.5$ ,  $Re = 400$

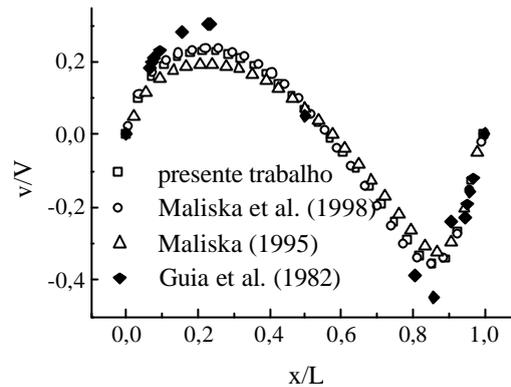


Figura 5 – Componente vertical de veloc. em  $y/L = 0.5$ ,  $Re = 400$

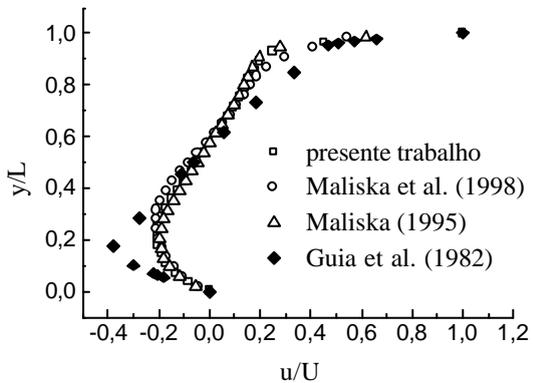


Figura 6 – Componente horizontal de veloc. em  $x/L = 0.5$ ,  $Re = 1000$

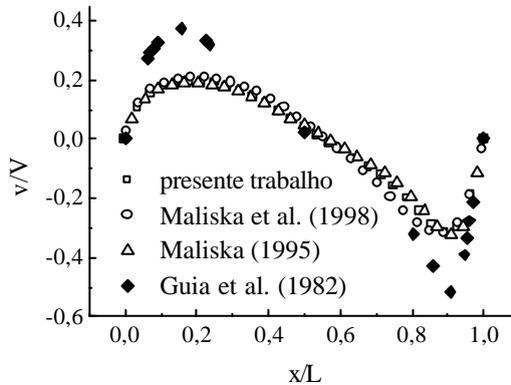


Figura 7 – Componente vertical de veloc. em  $y/L = 0.5$ ,  $Re = 1000$

De acordo com as figuras 4 à 7 podemos verificar que o modelo baseado na metodologia CVFEM apresentou um desempenho satisfatório para este caso em particular, uma vez que a solução numérica aproxima-se da solução de referência.

Tanto para Reynolds 400 como para Reynolds 1000, observa-se que a solução obtida pela metodologia Voronoi (Maliska et al., 1998) aproxima-se mais da solução de referência (Guia et al., 1982) que as soluções obtidas no presente trabalho e na metodologia estruturada (Maliska, 1995). Uma das causas deste resultado se deve a menor difusão

numérica introduzida através das funções de interpolação utilizadas na metodologia Voronoi, que, para a malha empregada, tem melhor desempenho que as demais.

Os resultados de Guia et al. (1982), são consideravelmente diferentes dos demais resultados pelo fato de utilizar uma malha mais refinada ( $129 \times 129$  volumes).

#### 4. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi a apresentação e testes iniciais de uma forma alternativa para o cálculo do gradiente de pressão em malhas não-estruturadas comumente encontradas na metodologia CVFEM descritas por Baliga e Patankar (1988). A implementação do método no presente trabalho foi similar a proposta pelo CVFEM.

A formulação proposta aqui para o cálculo do gradiente de pressão, foi realizada segundo os desenvolvimentos presentes nas metodologias que utilizam malhas não-estruturadas, como por exemplo, Maliska (1995) e Cardoso (1997), Maliska e Vasconcellos (1998).

A comparação foi realizada com a metodologia dos Diagramas de Voronoi (Maliska e Vasconcellos, 1998), que também utiliza malhas não-estruturadas, e a metodologia tradicional de volumes finitos para malhas estruturadas (Maliska, 1995). Esta comparação teve como intuito verificar o comportamento do algoritmo proposto neste trabalho em relação aos outros dois. Nas diferentes metodologias aplicadas, preservaram-se as formulações básicas de cada método, como funções de interpolação e acoplamento pressão-velocidade.

Os resultados obtidos neste trabalho mostraram que a formulação proposta para o cálculo do gradiente de pressão ameniza as discrepâncias geométricas que possam influir na aproximação destes gradientes, decorrentes de uma discretização bastante irregular. Estão sendo conduzidos testes comparativos entre a formulação proposta e a formulação CVFEM a fim de mensurar este comportamento.

A implementação do código computacional aqui apresentado para o cálculo do gradiente de pressão, não difere, em complexidade, da formulação original da metodologia CVFEM.

#### REFERÊNCIAS

- Baliga, B.R. & Patankar, S.V., 1980, A new finite element formulation for convection diffusion problems, Numerical Heat Transfer, vol. 3, pp. 393-409.
- Baliga, B.R. & Patankar, S.V., 1988, Elliptic systems: Finite-element method II, Handbook of Numerical Heat Transfer, pp. 421-455, John Wiley & Sons.
- Cardoso, F.C., 1997, Algoritmo para simulação numérica das equações do movimento pelo método dos volumes finitos usando diagramas de Voronoi, Dissertação de mestrado, Departamento de Informática e Estatística, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.
- Guia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T., 1982, High-Re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method, Journal of Computational Physics, vol. 48, pp. 387-411.
- Maliska, C.R., 1995, Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional, LTC, Rio de Janeiro.

- Maliska, C.R. & Vasconcellos, J.F.V., 1998, An unstructured finite volume procedure for simulating flows with moving fronts, In: IV WCCM – World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, CD-ROM edition.
- Mavriplis, D.J., 1992, Three dimensional unstructured multigrid for the Euler equations, AIAA Journal, vol. 30, pp. 1753-1761.
- Peters, S., Mariani, V.C. e Cardoso, F.C., 1997, Avaliação do desempenho de diferentes métodos de cálculo do gradiente de pressão em malhas não estruturadas de Voronoi, Anais XVIII CILAMCE – Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, vol. 1 , pp. 1297-1304, Brasília.
- Schneider, F.A., 1998, Solução numérica de escoamentos bidimensionais em malhas não-estruturadas pelo método dos volumes finitos, Dissertação de Mestrado, Coordenadoria de Pós -Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, SC, Brasil.
- Schneider, G.E. ,1988, Elliptic systems: Finite-element method I, Handbook of Numerical Heat Transfer, pp. 379-420, John Wiley & Sons.
- Taniguchi, N. & Kobayashi, T., 1991, Finite volume method on the unstructured grid system, Computers & Fluids, vol. 9, n. 34, pp. 287-295.
- Vasconcellos, J.F.V. & Maliska, C.R., 1998, Solução numérica de escoamentos incompressíveis usando malhas de voronoi, Anais VII ENCIT – Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas, pp. 890-896, Rio de Janeiro.
- Venkatakrisnan, V., 1996, Perspective on unstructure grid flow solvers, AIAA Journal, vol. 34, n.3, pp. 533-547.

**Title: Pressure Gradient Evaluation in Non-structured Grids for Incompressible Flows**

**Abstract:** *This work reports a numerical scheme for the evaluation of the pressure gradient in the momentum equations when non-structured grids are used. The methodology is based on the well-known CVFEM of Baliga and Patankar. The proposition aims to minimize the effects of the distortion of the grid on the pressure gradient calculation. The results are compared with the classical formulation of finite-volume using structured grids and the non-structured formulation using Voronoi diagrams.*

**Key-word:** *Pressure gradient evaluation, Non-structured grids, Incompressible flows*