

INFLUÊNCIA DO GRADIENTE DE PRESSÃO NA FUNÇÃO INTERPOLAÇÃO DO
MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

por

S. M. A. G. Ulson de Souza¹, e C. R. Maliska²

RESUMO -- Neste trabalho é analisada a influência do gradiente de pressão na função interpolação bidimensional, que contém a contribuição dos termos transiente, convectivo, difusivo e fonte, no contexto de volumes finitos, com o arranjo de variáveis co-localizadas. O caso teste escolhido é o problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada, com $Re = 400$ e $Re = 1000$.

INTRODUÇÃO

Uma dificuldade que se encontra no desenvolvimento de métodos gerais e eficientes é a obtenção de uma função de interpolação que leve em conta os aspectos físicos relevantes no problema em estudo, para avaliação da variável na face do volume de controle. Neste contexto, Raithby (1976) apresenta uma análise sobre o problema de difusão numérica causada pela utilização de função interpolação inadequada.

Esquemas recentes que simultaneamente avançam para o uso de variáveis co-localizadas e utilizam funções de interpolação alternativas, empregando o método de volumes finitos na solução de problemas de escoamentos incompressíveis, podem ser vistos em Peric, Kessler e Scheuerer (1987), Camarero e Reggio (1986), Schneider (1986) e Majumdar (1988).

Para escoamentos compressíveis, com variáveis co-localizadas, modelos são propostos em Marchi, Maliska e Bortoli (1989) e Bortoli (1990).

Professora de Engenharia Química, Universidade Federal de Santa Catarina, Caixa Postal 476 - Campus Universitário Trindade CEP 88049 Florianópolis - SC - Brasil

Professor de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Caixa Postal 476 - Campus Universitário Trindade CEP 88049 Florianópolis - SC - Brasil

No âmbito de elementos finitos, Schneider e Raw (1987) utilizam uma nova alternativa para a avaliação das variáveis nas faces dos volumes de controle, obtida a partir da própria equação de conservação. Nestes trabalhos, foi garantida a conservação das variáveis relevantes do problema, a nível elementar.

Neste trabalho é proposta a utilização do arranjo de variáveis co-localizadas com uma função interpolação completa, que contém a influência dos termos transiente, convectivo, difusivo, de pressão e fonte, visando a minimização dos erros numéricos através de uma adequada avaliação das variáveis nas faces do volume de controle. É analisado o desempenho da função interpolação proposta, contendo ou não o gradiente de pressão, no caso de teste escolhido, ou seja, convecção forçada em uma cavidade quadrada, com a parede superior se movimentando, para $Re = 400$ e $Re = 1000$.

FORMULAÇÃO PROPOSTA

Transformação das Equações

Visando a obtenção de uma maior flexibilidade da formulação para tratamento de problemas em geometrias arbitrárias, a equação de conservação, escrita no sistema cartesiano de coordenadas, é transformada para o sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η) , que se adaptam à fronteira, fornecendo a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & [\partial(\rho\phi)/\partial t]/J + \partial(\rho U\phi)/\partial\xi + \partial(\rho V\phi)/\partial\eta + \hat{P}\phi = \\ & \partial(C_1\delta\phi/\partial\xi + C_2\delta\phi/\partial\eta)/\partial\xi + \partial(C_3\delta\phi/\partial\eta + C_4\delta\phi/\partial\xi)/\partial\eta + \hat{S}\phi \end{aligned} \quad (1)$$

onde U e V são as componentes contravariantes do vetor velocidade, sem normalização métrica e J é o jacobiano da transformação.

Discretização das Equações

A equação (1) é utilizada para a obtenção da equação discretizada, através da realização de uma integração espacial e temporal sobre o volume de controle delimitado por duas linhas de ξ constante e duas linhas de η constante do domínio computacional, que fornece

$$\begin{aligned} & [(\rho\phi)_p - (\rho\phi)_p^0] \Delta\xi\Delta\eta / J_p + \left[\dot{m}_{re}\phi_e - \dot{m}_{rw}\phi_w + \dot{m}_{rn}\phi_n - \right. \\ & \left. - \dot{m}_{rs}\phi_s \right] \Delta t = \left\{ [C_1\delta\phi/\partial\xi + C_2\delta\phi/\partial\eta]_e - [C_1\delta\phi/\partial\xi + C_2\delta\phi/\partial\eta]_w \right\} \Delta\eta\Delta t + \\ & + \left\{ [C_2\delta\phi/\partial\xi + C_3\delta\phi/\partial\eta]_n - [C_2\delta\phi/\partial\xi + C_3\delta\phi/\partial\eta]_s \right\} \Delta\xi\Delta t + \\ & + \left[\hat{S}_p^0 - \hat{P}_p^0 \right] \Delta\xi\Delta\eta\Delta t \end{aligned} \quad (2)$$

Avaliação das variáveis nas faces do volume de controle

Os métodos numéricos tradicionais utilizam esquemas "upwind", central ou híbrido, para avaliação da variável ϕ nas faces do volume de controle e, portanto, levam em conta somente a influência dos dois pontos vizinhos à face do volume de controle em questão, apresentando grandes erros devido à difusão numérica, quando a malha não se encontra alinhada com o vetor velocidade. É proposta, então, a utilização de uma função interpolação obtida da própria equação de conservação, escrita para a face do volume de controle, com os termos transiente, convectivo, difusivo e de pressão, visando levar em conta os aspectos físicos relevantes do problema em estudo.

A equação da conservação da quantidade de movimento, escrita para a face leste do volume de controle, pode ser expressa por

$$\begin{aligned} & \left[\rho(\partial\phi/\partial t)/J \right]_e + \left[\rho U \partial\phi/\partial\xi \right]_e + \left[\rho V \partial\phi/\partial\eta \right]_e + \left[\hat{P}^\phi \right]_e \\ & = \left[\partial(C_1 \partial\phi/\partial\xi)/\partial\xi \right]_e + \left[\partial(C_2 \partial\phi/\partial\eta)/\partial\eta \right]_e \end{aligned} \quad (3)$$

O termo transiente é aproximado por diferença para trás. Os termos convectivo, difusivo e de pressão são aproximados utilizando-se o esquema de diferença central. Assim, a equação (3) pode ser aproximada, fornecendo a seguinte equação:

$$\begin{aligned} a_e^\phi \phi_e &= a_e^0 \phi_e^0 + a_p^\phi \phi_p + a_e^\phi \phi_e + a_s^\phi \phi_s + a_n^\phi \phi_n + \\ &+ a_{ne}^\phi \phi_{ne} + a_{se}^\phi \phi_{se} + b_e^\phi \end{aligned} \quad (4)$$

onde os termos do gradiente de pressão se encontram no termo b_e^ϕ .

Sostituindo-se a equação (4) e as equações análogas à equação (4) para as faces oeste, norte e sul do volume de controle, bem como as expressões obtidas para avaliação das derivadas da variável ϕ nas faces do volume de controle, na equação (2), obtém-se

$$\begin{aligned} a_p \phi_p &= a_p^0 \phi_p^0 + (a_e^0)^\phi \phi_e^0 + (a_w^0)^\phi \phi_w^0 + (a_s^0)^\phi \phi_s^0 + (a_n^0)^\phi \phi_n^0 + \\ &+ a_e \phi_e + a_n \phi_n + a_w \phi_w + a_s \phi_s + a_{ne} \phi_{ne} + a_{nw} \phi_{nw} + \\ &+ a_{se} \phi_{se} + a_{sw} \phi_{sw} + b_p^\phi \end{aligned} \quad (5)$$

Para a solução do sistema de equações lineares, é utilizado o método MSI ("Modified Stronly Implicit") modificado, proposto por Schneider e Zedan (1981).

Para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade, foi utilizado o método SIMPLEX, proposto por Van Doormaal e Raithby (1984), aplicado ao arranjo de variáveis co-localizadas e para a avaliação dos fluxos de massa que tomam parte da equação da conservação da massa, foi utilizada a metodologia proposta por Marchi, Maliska e Bortoli (1989).

RESULTADOS OBTIDOS

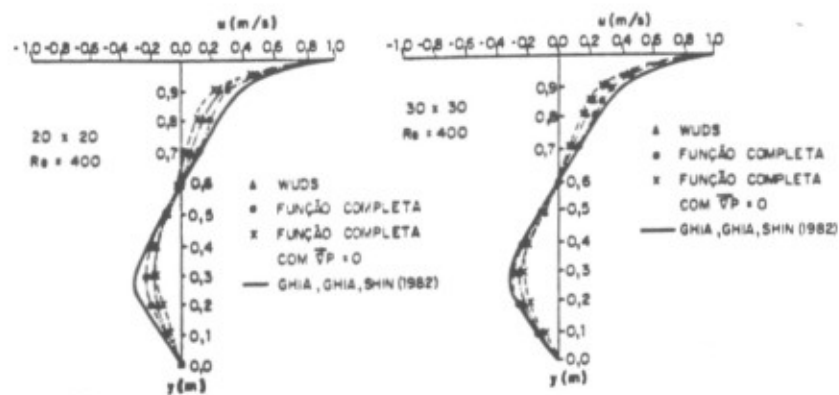
O caso teste escolhido para avaliar a influência do gradiente de pressão na função interpolação é o problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada, onde a parede superior é movimentada com uma velocidade constante, U.

Ghia, Ghia e Shin (1982) apresentaram a solução deste problema obtida com uma malha bastante refinada (129x129), para números de Reynolds iguais a 400 e 1000. Estes números de Reynolds estão baseados na velocidade de movimentação da parede superior (U) e na largura da cavidade (L), ou seja, $Re = \rho UL/\mu$.

Para a obtenção da solução do problema em estudo, foram utilizadas as malhas cartesianas 20x20, 30x30 e 40x40. Os resultados obtidos com a função interpolação completa e com a imposição de gradiente de pressão nulo, para avaliação das variáveis armazenadas nas faces do volume de controle, são apresentados na FIGURA 1 e FIGURA 2, para $Re = 400$ e 1000, respectivamente sendo comparados com os resultados apresentados por Ghia, Ghia e Shin (1982) e com os resultados obtidos utilizando-se o esquema WUDS, proposto por Raithby e Torrance (1974). O perfil da componente de velocidade cartesiana, u, é apresentado para a linha central vertical da cavidade.

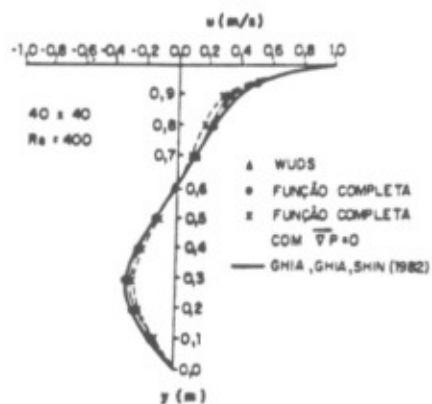
Conforme se pode verificar na FIGURA 1b e FIGURA 1c, para malhas 30x30 e 40x40, respectivamente, no caso de $Re = 400$, os resultados obtidos com a utilização da função interpolação completa apresentam excelente concordância com os dados de Ghia, Ghia e Shin (1982), enquanto que os resultados obtidos impondo-se o gradiente de pressão nulo na função interpolação distanciam-se bastante dos dados de Ghia, Ghia e Shin (1982). A maior discrepância é observada com a utilização da malha 20x20, conforme ilustra a FIGURA 1a.

Para $Re = 1000$, ocorre a predominância da convecção no processo de transferência de quantidade de movimento. Conforme se pode verificar, não existe boa concordância entre os resultados obtidos com malhas 20x20, 30x30 e 40x40, ilustrados na FIGURA 2a, 2b e 2c, respectivamente, com gradiente de pressão nulo na função interpolação e os dados obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982), com malha 129x129.



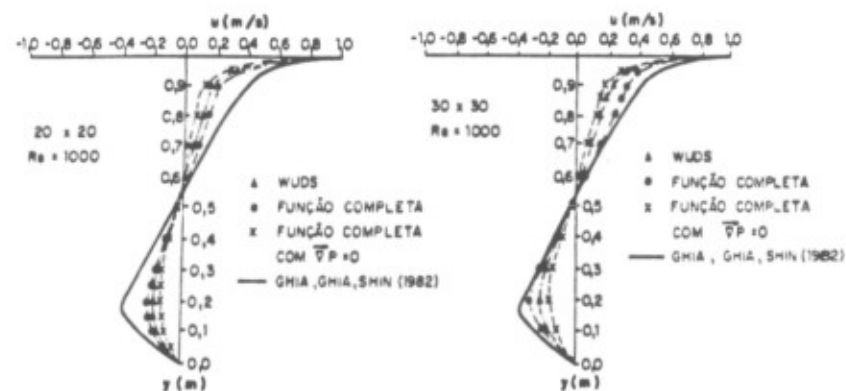
a) malha 20x20

b) malha 30x30



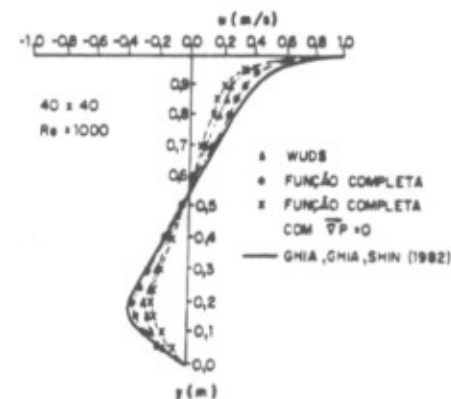
c) malha 40x40

FIGURA 1. Perfil de velocidade obtido no problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada com $Re = 400$ e malhas 20×20 , 30×30 e 40×40 .



a) malha 20x20

b) malha 30x30



c) malha 40x40

FIGURA 2. Perfil de velocidade obtido no problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada com $Re = 1000$ e malhas 20×20 , 30×30 e 40×40 .

Os resultados obtidos com a utilização do esquema WUDS, ilustrados nas FIGURAS 1 e 2, para $Re = 400$ e $Re = 1000$, não apresentam boa concordância com os dados obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982), apesar de apresentarem uma menor discrepância quando comparados com os resultados obtidos, impondo-se o gradiente de pressão nulo na função interpolação. Os resultados obtidos com o esquema WUDS apresentam um desvio muito maior do que os resultados obtidos com a função interpolação completa, quando comparados com os dados de Ghia, Ghia e Shin (1982).

Analisando-se a FIGURA 2, verifica-se que os dados obtidos com a função interpolação completa apresentam boa concordância com os dados obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982), mostrando a fundamental importância da presença do gradiente de pressão na função interpolação utilizada no método de volumes finitos, gradiente este que tem sido desprezado pelas formulações tradicionais.

CONCLUSÃO

A formulação proposta, com o arranjo de variáveis co-localizadas e uma função de interpolação completa, obtida das equações de conservação, foi utilizada para o desenvolvimento de um código computacional, apresentando boas condições de estabilidade, economia de memória computacional e facilidade de manipulação dos índices dos volumes de controle, quando comparada com a formulação que utiliza o arranjo de variáveis desencontradas.

Os resultados obtidos com a imposição do gradiente de pressão nulo na função interpolação e com o esquema WUDS apresentam grande discrepância, quando comparados com os resultados apresentados por Ghia, Ghia e Shin (1982).

A utilização da função interpolação completa é responsável pela obtenção do perfil da componente cartesiana de velocidade, com uma malha 40×40 , $Re = 1000$, com excelente concordância com os resultados obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982), com uma malha 129×129 , apresentando uma enorme economia de memória computacional, ressaltando a grande influência do gradiente de pressão na função interpolação.

BIBLIOGRAFIA

- Bortoli, A. L., "O Uso de Variáveis Co-localizadas na Solução de Escoamentos Supersônicos sobre Corpos de Geometrias Arbitrárias", Tese de Mestrado, UFSC, Florianópolis-SC (1990).
- Camarero, R. and Reggio, M., "Numerical Solution Procedure for Viscous Incompressible Flows", Numerical Heat Transfer, volume 10, pages 131-146 (1986).

- Ghia, U. Ghia, K. N. and Shin, C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using The Navier-Stokes Equations and a Multi-Grid Method", Journal of Computational Physics, volume 48, pages 387-411 (1982).
- Majumdar, S., "Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Non-Staggered Grids", Numerical Heat Transfer, volume 13, pages 125-132 (1988).
- Marchi, C. H., Maliska, C. R. and Bortoli, A. L., "The Use of Co-located Variables in the Solution of Supersonic Flows", X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM 89 (1989).
- Peric, M. Kessler, R. Scheuerer, G., "Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids", Submitted to Computers and Fluids, #87-114 (1987).
- Raithby, G. D. and Torrance, K. E., "Upstream-weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", Computers and Fluids, volume 2, pages 191-206 (1974).
- Raithby, G. D., "A Critical Evaluation of Upstream differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, volume 9, pages 75-103 (1976).
- Schneider, G. E. and Zedan, M., "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", Numerical Heat Transfer, volume 4, pages 1-19 (1981).
- Schneider, G. E., "A Novel Co-located Finite Difference Procedure for the Numerical Computation of Fluid Flow", AIAA - 4th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Boston, Massachusetts (1986).
- Schneider, G. E. and Raw, M. J., "Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables - 1. Computational Procedure", Numerical Heat Transfer, volume 11, pages 363-390 (1987).
- Schneider, G. E. and Raw, M. J., "Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables - 2. Application and Validation", Numerical Heat Transfer, volume 11, pages 391-400 (1987).
- Van Doornaal, J. P. and Raithby, G. D., "Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", Numerical Heat Transfer, volume 7, pages 147-163 (1984).