

## Condução Anisotrópica Bidimensional em Geometrias Irregulares



ANDRÉ LUIZ SEIXLACK\*

Depto. Engenharia Mecânica - UNESP  
15378 - Ilha Solteira - SP

CLÓVIS RAIMUNDO MALISKA\*

Depto. Engenharia Mecânica — UFSC  
Cx. Postal 476 - 88049 - Florianópolis - SC



### SUMÁRIO

Um modelo numérico é desenvolvido para a solução de problemas de condução de calor anisotrópica em geometrias arbitrárias. É usado um sistema de coordenadas generalizadas e a equação governante é aproximada para os volumes finitos, pelo método do volume de controle, permitindo uma análise física do problema. As formulações implícita e explícita são investigadas e consideram-se três espécies de condições de contorno. Obtêm-se as soluções de problemas transientes, anisotrópicos e heterogêneos, usando-se malhas ortogonais e não-ortogonais para todos os casos.

### INTRODUÇÃO

A condução de calor considerando a condutividade térmica variável com a posição, é característica de vários materiais que apresentam importantes aplicações em setores da engenharia.

A bibliografia apresenta vários métodos de solução para problemas de condução de calor. Valiosas contribuições com soluções analíticas são apresentadas em [1] e [2]. A complexidade desses problemas, à medida em que tratam com geometrias arbitrárias e materiais anisotrópicos e/ou heterogêneos, com condições de contorno não-homogêneas e não-uniformes, tem exigido cada vez mais o uso de métodos numéricos. Desses, os mais usados são o método dos Volumes finitos (diferenças finitas), dos elementos finitos e dos elementos no contorno.

A técnica dos volumes finitos juntamente com o uso de coordenadas que se adaptam às fronteiras, devido à sua grande versatilidade no tratamento de geometrias arbitrárias, tem sido muito usada na solução de problemas de engenharia nos últimos anos e é aplicada neste trabalho. A equação da condução inicialmente no sistema de coordenadas cartesianas, é transformada para o sistema generalizado e aproximada para os volumes finitos, pelo método do volume de controle. Esse método permite uma análise física do problema e origina um esquema numérico conservativo a nível de volumes elementares. As equações aproximadas são resolvidas no plano transformado retangular, mostrado na Figura 1.b, usando as formulações explícita e implícita.

O sistema de coordenadas cujas linhas coincidem com as fronteiras do domínio irregular, é conhecido como sistema natural. Com o uso desse sistema evitam-se interpolações na aplicação das condições de contorno, possibilitando o desenvolvimento de um código computacional independente da geometria do problema físico. Três tipos de condições de contorno que são de interesse em problemas de engenharia, são considerados.

Uma região anular é escolhida para testar o modelo, resolvendo-se problemas transientes e permanentes, anisotrópicos e heterogêneos. A geometria usada nos testes, apesar de simples, é um excelente teste, pois sendo as malhas empregadas não-ortogonais, todos os termos da formulação, envolvendo a ortogonalidade e a não-ortogonalidade, são testados.

Verifica-se a influência da forma da malha na precisão dos resultados, um detalhe importante em modelos não-ortogonais. Para mostrar a generalidade do método, é obtida a solução do regime permanente para uma região retangular com furo circular e condições de fluxos prescritos.

O modelo também está apto para tratar problemas onde a condutividade térmica e/ou as condições de contorno variem com a temperatura.

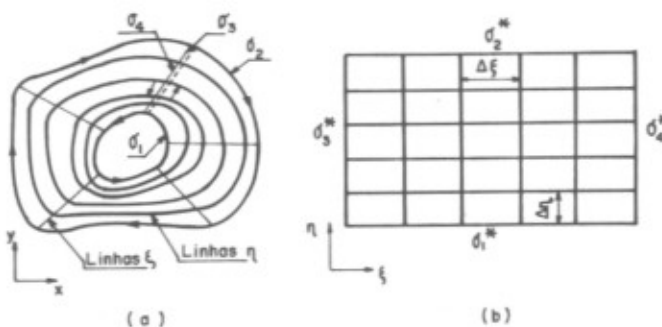


Figura 1. (a) Domínio físico e (b) Plano transformado.

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A equação diferencial da condução para domínios bidimensionais, anisotrópicos e heterogêneos com geração de energia, no sistema cartesiano x-y, é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T) = \frac{\partial}{\partial x} (k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y}) + u''' \quad (1)$$

onde T é a temperatura, t é o tempo,  $\rho$  é a massa específica, c é o calor específico,  $k_{ij}$  são as componentes do tensor condutividade térmica e  $u'''$  é a taxa de geração de energia por unidade de tempo e volume que pode ser função do espaço e/ou tempo.

As condições de contorno, aplicadas ao domínio físico mostrado na Figura 1.a, ao longo das fronteiras  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , para  $t > 0$ , são dadas por

$$T = f_i(x, y, t) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

$$\pm k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_j = \pm q''(x, y, t) \quad , \quad (i, j) = 1, 2 \quad (3)$$

$$\pm k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_i} n_j - h(T_{fi} - T_\infty) = 0 \quad , \quad (i, j) = 1, 2 \quad (4)$$

onde  $n_j$  é o cosseno diretor,  $q''$  é a densidade escalar de fluxo de calor na fronteira ( $W/m^2$ ),  $h$  é o coeficiente de transferência de calor,  $T_{fi}$  a temperatura na fronteira  $\sigma_i$  e  $T_\infty$  é a temperatura ambiente.

Para obter a solução do regime transiente, a distribuição de temperaturas no domínio considerado é conhecida no instante em que se estabelece a origem da coordenada tempo, como

$$T = f(x, y, 0) \quad (5)$$

Se o interesse é somente a solução do regime permanente, a técnica do transiente distorcido é usada, partindo-se de uma distribuição arbitrária de temperaturas. Nessa técnica usam-se diferentes avanços de tempo em todo o domínio, acelerando-se a convergência para o regime permanente. Caso o interesse seja a solução do regime transiente, a equação (5) representa a condição inicial do problema.

O método para a geração do sistema natural de coordenadas é devido a Thompson et al. [3]. Esse método considera a solução de um sistema de equações de Poisson no plano retangular fixo, Figura 1.b, usando condições de contorno de Dirichlet. Exemplos de malhas não-ortogonais para uma região anular são mostrados na Figura 2.

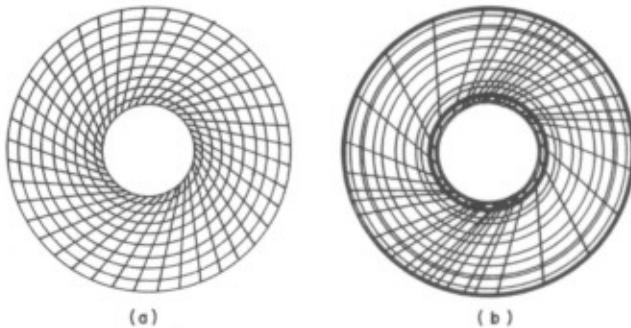


Figura 2. Exemplos de sistemas de coordenadas não ortogonais com espaçamentos (a) uniformes e (b) não-uniformes.

A solução de equação (1) constitui uma etapa independente da geração de coordenadas. Essa equação é transformada para o sistema natural de coordenadas e é também solucionada no plano retangular fixo. A equação transformada torna-se mais complexa, mas as condições de contorno ficam especificadas sobre linhas retas, facilitando o trabalho numérico. A transformação geral do plano físico  $x-y$ , para o transformado  $\xi-\eta$  é dada por

$$\xi = \xi(x, y) \quad (6)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad (7)$$

A equação (1) sujeita à transformação de coordenadas definida pelas equações (6) e (7), mantém sua forma conservativa, resultando

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_3 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{u'''}{J} \quad (8)$$

onde os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  contêm as informações com respeito à anisotropia e à geometria no plano físico, e podem ser encontrados em [4].

A forma conservativa em que se apresenta a equação (8), evita a geração de fontes e/ou sumidouros de energia nas interfaces dos volumes elementares.

## EQUAÇÕES APROXIMADAS

No método do volume de controle, as equações são obtidas através de balanços de conservação da propriedade envolvida. Para os pontos interiores do domínio, integra-se a equação (8) no tempo e no espaço, sobre a volume de controle do plano transformado. A equação aproximada para os volumes finitos interiores é

$$\begin{aligned} \left( \frac{\rho c_p \Delta V}{J \Delta t} \right) T_p^{n+1} + A_p^* T_p^{n+\theta} = A_e T_e^{n+\theta} + A_w T_w^{n+\theta} \\ + A_n T_n^{n+\theta} + A_s T_s^{n+\theta} + A_{ne} T_{ne}^{n+\theta} + A_{nw} T_{nw}^{n+\theta} \\ + A_{se} T_{se}^{n+\theta} + A_{sw} T_{sw}^{n+\theta} + \left( \frac{\rho c_p \Delta V}{J \Delta t} \right) T_p^n + \frac{u'''}{J} \Delta V_t \quad (9) \end{aligned}$$

onde  $\Delta t$  é o avanço de tempo,  $\Delta V_t$  é o volume de uma célula no plano transformado e os coeficientes  $A_i$  também são mostrados em [4].  $\theta$  é um fator que varia entre zero e um, com extremos caracterizando a faixa entre as formulações explícita e totalmente implícita.

Para os volumes que possuem alguma face coincidente com as fronteiras, promovem-se balanços de energia, onde os termos que representam as trocas de calor na fronteira são incluídos ao termo fonte. Com isso, a mesma estrutura dos pontos internos é mantida para todos os coeficientes dos volumes de fronteira. As equações aproximadas para esses volumes são similares à equação (9), [4].

As condições de contorno, dadas em termos da quantidade de calor trocada na fronteira, são englobadas ao termo fonte, tornando-se de simples adaptação. Além disso, permite-se que os coeficientes das equações aproximadas sejam os mesmos para as diferentes condições.

## RESULTADOS

Os testes do modelo consideram uma região anular, com malhas ortogonais e não-ortogonais.

Os resultados para o problema com a região anular anisotrópica e homogênea, estão apresentados em [5]. Comforme discutido naquele trabalho, o problema homogêneo em coordenadas cilíndricas passa a ser heterogêneo em coordenadas cartesianas, testando completamente o método numérico para o problema proposto.

Neste trabalho, são apresentados os resultados obtidos nas soluções de um problema transiente, com as formulações explícita e implícita e problemas com três tipos de condições de contorno incluídas ao modelo.

Comparam-se as soluções numérica e analítica [6], de um problema unidimensional no regime transiente para a região anular isotrópica, com razão de diâmetros de  $D_2/D_1=3$ . Nesse caso, a equação (1) em coordenadas cilíndricas e as condições inicial e de contorno, são

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad R_1 < r < R_2 \quad (10)$$

$$T(r, \theta, 0) = T_0 \quad (11)$$

$$T(R_1, \theta, t) = T_1 \quad (12)$$

$$T(R_2, \theta, t) = T_2 \quad (13)$$

onde  $a = k/\rho c_p$  é a difusividade térmica e os subíndices 1 e 2 referem-se às superfícies interna e externa da região anular.

Nas Figuras 3 e 4 são mostradas as comparações entre as soluções analítica e numérica explícita e implícita, respectivamente. As soluções numéricas são obtidas com a malha não-ortogonal  $17 \times 40$ , mostrada na Figura 2.a. A concordância entre os resultados é muito boa em ambos os casos, sendo que os maiores desvios ocorrem no início do transiente.

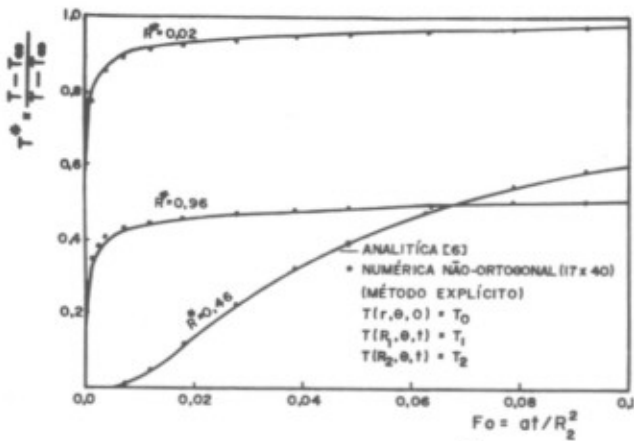


Figura 3. Perfis de temperaturas  $T^*$  do regime transiente; soluções analítica [6] e numérica explícita.

Observa-se que no caso explícito, o avanço de tempo usado é de  $1.3 \times 10^{-3}$  e no caso implícito é de  $0.4 \times 10^{-3}$ . Salienta-se que o valor de  $\Delta t$  usado no método implícito, não se relaciona com a estabilidade da solução como no caso explícito, discutida em [7], mas sim com a precisão da mesma. Esse valor no qual a solução avança, é análogo à discretização no espaço em termos de precisão, ou seja, a solução obtida em um avanço de tempo pode não corresponder à real, analogamente àquela obtida com uma malha grosseira.

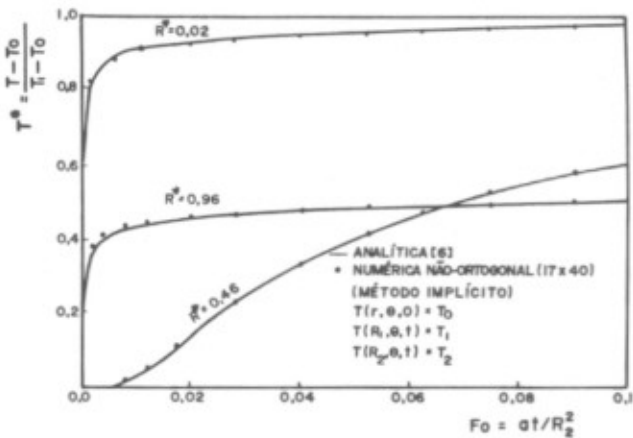


Figura 4. Perfis de temperaturas  $T^*$  do regime transiente; soluções analítica [6] e numérica implícita.

Para testar as condições de contorno de fluxo prescrito e convecção, são obtidas as soluções de dois problemas de condução de calor no regime permanente para a região anular com esses tipos de condições. As formulações desses problemas são dadas, respectivamente, por

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad , \quad R_1 < r < R_2 \quad (14)$$

caso a

$$-k \frac{dT}{dr} = q_1'' \quad , \quad r = R_1 \quad -k \frac{dT}{dr} = q_2'' \quad , \quad r = R_2 \quad (15)$$

caso b

$$T(R_1, 0) = T_1 \quad \frac{dT}{dr} + \frac{h}{k} (T - T_\infty) = 0 \quad , \quad r = R_2 \quad (16)$$

onde  $q_1''$  e  $q_2''$  são as densidades de fluxo de calor ( $W/m^2$ ) nas fronteiras interna e externa, respectivamente, mostradas na Figura 5. Esses problemas simples são escolhidos pois o objetivo, como dito acima, é simplesmente testar o tipo de condição de contorno. Os resultados dos numéricos comparados aos analíticos são mostrados nas figuras 5 e 6 para os casos a e b, respectivamente. Os desvios máximos ocorrem para as temperaturas baixas, da ordem de  $10^{-2}$  da máxima.

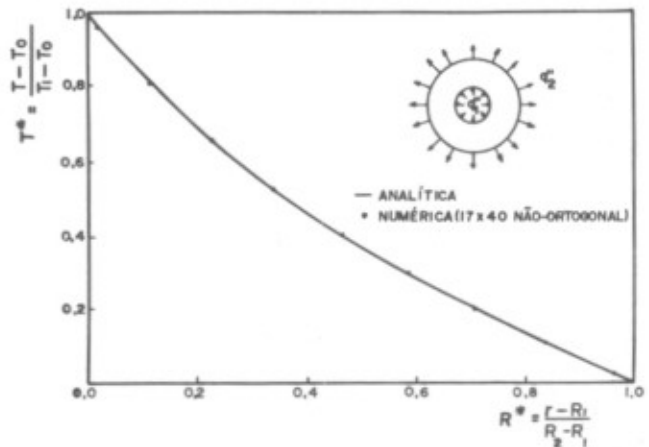


Figura 5. Perfis de temperaturas  $T^*$ ; fluxos de calor prescritos nas fronteiras.

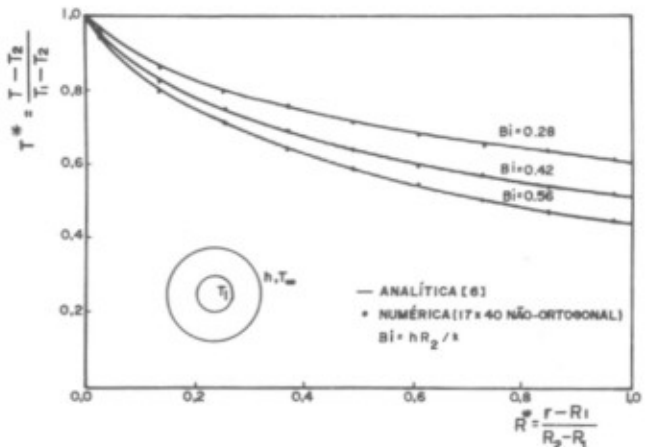


Figura 6. Perfis de temperaturas  $T^*$ ; temperatura prescrita na face interna e convecção na face externa.

A solução do regime permanente para uma região retangular com furo circular e condições de fluxos de calor prescritos constantes nas fronteiras, mostrada na Figura 7, é também obtida. Esse teste objetiva mostrar a generalidade do método. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos, onde se observa a simetria do campo de temperaturas. Nenhuma comparação é feita com outras soluções neste caso.

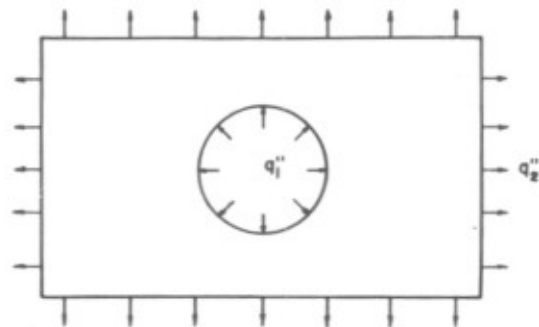


Figura 7. Domínio retangular com furo circular.

A solução de um problema de condução de calor, usando a geometria mostrada na Figura 7 com três tipos de condições de contorno, está sendo obtida. Os resultados serão comparados com aqueles apresentados em [8], onde é usado o método dos elementos no contorno.

Tabela 1. Temperaturas  $T^*$  para uma região retangular com furo circular.

$\theta$	$T^*$	$\theta$	$T^*$	$\theta$	$T^*$
51.68	0.8251	53.97	0.5794	56.08	0.2000
68.07	0.8215	68.68	0.5821	69.25	0.2188
85.56	0.8296	85.62	0.6045	85.69	0.2601
94.44	0.8296	94.38	0.6045	94.31	0.2601
111.93	0.8215	111.32	0.5821	110.75	0.2188
128.32	0.8251	126.03	0.5794	123.92	0.2000

Para verificar a influência da não-ortogonalidade entre as linhas coordenadas na precisão dos resultados, obtém-se a solução do problema dado pelas equações (14) e (15), usando-se a malha não-ortogonal  $17 \times 40$  com espaçamentos não-uniformes, mostrada na Figura 2.b. A Tabela 2 mostra os resultados comparados com aqueles para a malha de mesmo tamanho não-ortogonal com espaçamentos uniformes, segundo diferentes posições radiais. Nessa tabela as temperaturas adimensionais  $T^*$  são mostradas na vertical abaixo de  $R^*$ . É importante notar que, para a malha com espaçamentos uniformes, as temperaturas são constantes para qualquer  $\theta$  e um determinado  $R^*$ . Para a malha não-uniformemente espaçada, isso não acontece.

Esse problema deve-se a alta não uniformidade da malha, uma característica comum a qualquer sistema de coordenadas e não apenas aos não ortogonais. A solução para esse problema é evitar malhas que tenham uma razão de variação muito grande. Esse é um ponto que começa a receber atenção dos pesquisadores. Detalhes relativos à análise de malhas distorcidas são apresentados por Ferreri [9] e Maliska et al. [10].

Tabela 2. Temperaturas  $T^*$  segundo o mesmo raio  $R^*$  e  $\theta$  variável; malhas não-ortogonais com espaçamentos: A - uniformes, B - não-uniformes.

A		B	
$\theta$	$R^* = 0.02$	$\theta$	$R^* = 0.07$
1.65	0.9529	7.74	0.9406
46.65	0.9529	58.36	0.9041
97.35	0.9529	91.68	0.9011
115.35	0.9529	106.80	0.9068
151.35	0.9529	128.32	0.9202
178.50	0.9529	169.69	0.9546

## CONCLUSÕES

Os testes do modelo aqui desenvolvido, para os três tipos de condições de contorno com malhas ortogonais e não-ortogonais, apresentam bons resultados comparados às soluções analíticas.

As condições de contorno englobadas às equações aproximadas, tornam o esquema numérico muito versátil quanto à aplicação de diferentes condições de contorno. Além disso, como foi observado, mantêm-se constantes os coeficientes da equação aproximada com a mudança da condição de contorno. Essas, são características não encontradas em outros trabalhos que usam coordenadas generalizadas.

Critérios para limitar o grau de não-ortogonalidade das malhas, não são ainda conhecidos e poucos são os trabalhos na literatura, disponíveis nesse sentido. Esse assunto deve merecer, portanto, atenção dos pesquisadores no futuro.

O método não é restrito a duas dimensões e é importante sua expansão para domínios tridimensionais.

## REFERÊNCIAS

- [1] Chang, Y.P., Analytical Solution for Heat Conduction in Anisotropic Media in Infinite, Semi-Infinite and Two-Plane-Bounded Regions, *International Journal of Heat Mass Transfer*, vol. 20, pp. 1019-1028, 1977.
- [2] Chang, Y.P. e Tsou, R.C., Heat Conduction in an Anisotropic Medium Homogeneous in Cylindrical Regions-Unsteady State, *Journal of Heat Transfer-ASME*, vol. 1, pp. 41-46, 1977.
- [3] Thompson, J.F., Thames, F.C. e Mastin, C.W., Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Fields Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, *Journal of Comp. Physics*, vol. 15, pp. 299-319, 1974.
- [4] Seixlack, A.L., Solução Numérica de Problemas de Condução Anisotrópica em Geometria Arbitrárias, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1986.
- [5] Maliska, C.R. e Seixlack, A.L., Condução Bidimensional Transiente Anisotrópica Heterogênea em Regiões Irregulares Duplamente Conexas, *Anais do II Congresso de Transferência de Calor e Massa*, vol. 1, pp. 284-296, 1986.
- [6] Carslaw, H.S. e Jaeger, J.C., *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Clarendon Press, 1959.
- [7] Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation McGraw-Hill Book Company, 1980.
- [8] Mey, G.D., Temperature Distribution in Floor Heating Systems, *International Journal of Heat Mass Transfer*, vol. 23, pp. 1289-1291, 1980.
- [9] Ferreri, J.C. e Ventura, M.A., On the Accuracy of Boundary-Fitted Finite-Difference Calculations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 4, pp. 359-375, 1984.
- [10] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., Local Effects of Highly Nonorthogonal Grids in Solution of Heat Transfer Problems in Cusped Corners, *Proceedings of the First International Conference on Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*, Landshut, West Germany, 1986.

## ABSTRACT

The anisotropic heat conduction problem in arbitrary two-dimensional regions is solved using numerical techniques. The finite volume method is employed in a boundary-fitted coordinate frame.

The implicit and explicit formulations are used for three kinds of boundary conditions.

Solutions for unsteady regime considering anisotropic and heterogeneous materials are obtained, employing orthogonal and non-orthogonal grids. The results agree very well with the ones available in the literature rendering to the method confidence in the solution of engineering problems.