

Convecção Natural em Cavidades Triangulares: Tratamento da Condição de Contorno Singular



S. POLINA, P.C.S. JUCÁ, A.F.C. SILVA* e C.R. MALISKA*



Depto. Engenharia Mecânica — UFSC
Cx. Postal 476 - 88049 - Florianópolis - SC

RESUMO

O tratamento da condição de contorno singular que aparece na simulação da convecção natural em áticos é analisado neste trabalho. Para tratar adequadamente esta condição o problema conjugado convecção/condução é resolvido, usando-se o método dos volumes finitos em coordenadas generalizadas. Os resultados são comparados com os experimentais demonstrando que o problema é simulado com fidelidade. O problema é resolvido para números de Rayleigh na faixa de 0 a 5.3×10^6 e para diferentes ângulos do ático e os resultados são correlacionados através de $k_{eq} = a Ra^b \theta^c$.

INTRODUÇÃO

Na engenharia existem muitas situações que requerem a previsão da transferência de calor por convecção natural em espaços confinados com o objetivo de se executar corretamente projetos térmicos. Diversos são as formas geométricas desses espaços e suas aplicações são vastas. Devido a complexidade do sistema de equações governantes e a irregularidade das geometrias as soluções analíticas ficam limitadas fazendo com que parâmetros de projeto sejam obtidos experimentalmente ou através de técnicas numéricas. Esta última tem se revelado uma ferramenta altamente promissora face a confiabilidade dos modelos matemáticos que cada vez tornam-se mais completos com o advento de computadores de maior porte.

Em vista do exposto, a solução numérica de problemas de convecção natural vem despertando maior interesse por parte dos pesquisadores.

Uma revisão bibliográfica mostra que a quase totalidade dos trabalhos com técnicas numéricas tem se dedicado a geometrias que se adaptam a discretização cartesiana e cilíndrica enquanto que as geometrias irregulares pouca atenção tem recebido.

Com o surgimento do método dos volumes finitos com sistema de coordenadas coincidentes com as fronteiras, as geometrias irregulares podem ser resolvidas com relativa facilidade. Acredita-se com isso que problemas de maior interesse do ponto de vista prático passem a receber maior atenção.

Um dos problemas de grande aplicação é o da convecção natural em cavidades triangulares, comuns em áticos de edificações. Por se tratar de uma geometria de difícil discretização poucos trabalhos numéricos a ela são dedicados. Poulikakos e Bejan [1] realizaram um estudo teórico baseado em uma análise assintótica e também numérico, com discretização cartesiana. Estes mesmos autores também atacaram o problema experimentalmente [2], com cavidades triangulares formadas por triângulos retângulos. Flack et al. [3] realizaram um estudo experimental para cavidades formadas por triângulos isósceles com uma das paredes inclinadas aquecida e a outra resfriada, enquanto que a base era mantida isolada. Flack [4], repetiu o experimento mas com os lados inclinados aquecidos e a base resfriada.

Por outro lado, os autores do presente trabalho tem aplicado com sucesso a metodologia desenvolvida em [6] na solução de diversos problemas de convecção natural em cavidades, e a geometria triangular consiste em um excelente teste para a metodologia face às malhas altamente não ortogonais geradas na discretização do domínio de cálculo.

Com esta motivação, em trabalho recente, Maliska

et al. [5] apresentaram resultados para este tipo de cavidade. Nesse trabalho as duas faces inclinadas do triângulo eram mantidas a temperatura constante e a face horizontal isolada. Procurou-se reproduzir as condições de contorno de [3] simulando-se o experimento.

Neste trabalho a situação analisada experimentalmente em [3] e posteriormente em [5], através de técnicas numéricas, é reavaliada com o objetivo de simular mais realisticamente o fenômeno físico. Em [5] ficou claro que a adoção de um perfil linear perto do ápice da cavidade não conseguiu reproduzir adequadamente a distribuição de fluxo local. Uma maneira mais correta para a aplicação desta condição de contorno é realizada neste trabalho.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E METODOLOGIA NUMÉRICA

O objetivo do presente trabalho é a análise da transferência de calor por convecção natural laminar, bidimensional em cavidades triangulares sujeitas as condições de contorno mostradas na figura 1. As equações diferenciais que governam o problema, considerando a aproximação de Boussinesq, escritas em um sistema de coordenadas generalizadas $\xi - \eta$ são

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U u) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V u) = - \frac{\partial P}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial P}{\partial \eta} \xi + \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial u}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial u}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial u}{\partial \xi}) \quad (2)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V v) = - \frac{\partial P}{\partial \eta} \xi + \frac{\partial P}{\partial \xi} \eta + \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial v}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial v}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial v}{\partial \xi}) + \frac{1}{J} [\rho g \beta (T - \bar{T})] \quad (3)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho U T) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho V T) = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta} + C_5 \frac{\partial T}{\partial \xi}) \quad (4)$$

onde

$$U = \eta u - x_\eta v$$

$$V = x_\xi v - y_\xi u$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \Gamma^\phi J \alpha & C_2 &= -\Gamma^\phi J \beta \\
C_4 &= \Gamma^\phi J \gamma & C_5 &= -\Gamma^\phi J \delta \\
\alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2 & \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\
\gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 & J &= 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \\
\Gamma^\phi &= \mu \text{ para eq.(2) e (3)} & \Gamma^\phi &= k/C_p \text{ para eq.(4)}
\end{aligned}
\tag{5}$$

Este sistema de equações diferenciais, integrado em volumes de controle elementares gerados pela discretização do domínio através do uso de um sistema de coordenadas que se ajusta às fronteiras, resulta em sistemas de equações algébricas. Detalhes da geração do sistema de coordenadas, da integração das equações, do método para tratamento do acoplamento pressão-velocidade e do procedimento completo de solução pode ser vistos em [6].

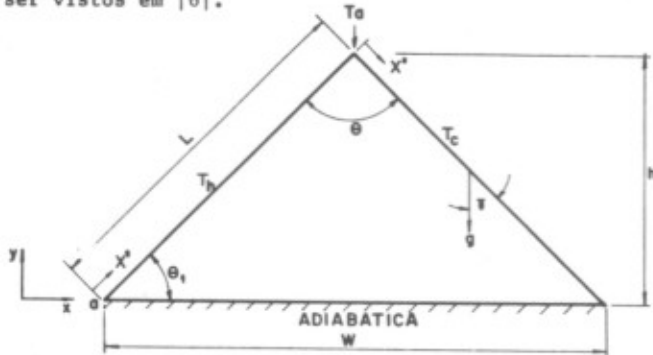


Fig. 1 Geometria do problema e condições de contorno

DETERMINAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO PARA TEMPERATURA

A solução analítica do problema proposto, para o caso de condução, mostra que o fluxo de calor tende ao infinito no ápice da cavidade [1], [7]. Isto é fácil de se observar uma vez que quanto mais próximo do ápice, menor é a resistência de condução, a qual tende a zero, enquanto a diferença de temperatura é constante.

Esta singularidade na condição de contorno deve ser evitada para que a solução do problema seja obtida numericamente. Este problema foi contornado de forma superficial [1] desprezando o fluxo de calor nos 10% do comprimento das paredes próximos à singularidade. Em [5] foi proposto um perfil linear de temperatura na região do ápice, conforme mostra a figura 4. Como descrito naquele trabalho, desprezar o calor trocado em 10% da parede não é aconselhável, uma vez que não apenas o fluxo local tende ao infinito no ápice, mas também o fluxo médio obtido através da integração do fluxo local. Propor um perfil linear como realizado em [5] reproduz com mais fidelidade a realidade, mas ainda não corresponde ao perfil de temperatura correto.

Neste trabalho, particular atenção é dedicada a esta condição de contorno, procurando determinar sua importância e influência na solução numérica do problema. Para se estabelecer um perfil de temperatura adequado próximo ao ápice, o problema conjugado convecção/condução, conforme a figura 2, foi resolvido, considerando apenas a placa quente, (alumínio com 1,27 cm de espessura).

A temperatura T_a foi assumida como 25° C, que é a média aritmética entre as temperaturas da parede quente e fria.

O estabelecimento desta temperatura em apenas uma pequena região da parede procura reproduzir o experimento [3] onde teoricamente existe apenas uma

linha em contato com a parede fria. Obviamente o valor desta temperatura não é conhecido e necessitaria ser determinado pela solução do problema conjugado que envolvesse também a placa fria. É, entretanto, uma simulação bastante próxima da realidade, como será visto pelos resultados.

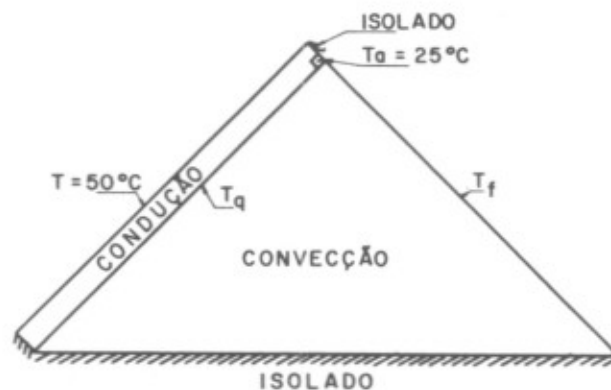


Fig. 2 Problema conjugado convecção/condução.

O procedimento adotado para determinação do perfil de temperatura foi impor inicialmente um perfil linear como sugerido em [5] para a região do ápice da cavidade e resolver o problema de convecção natural com esta condição de contorno. O fluxo de calor obtido na parede quente era então imposto sobre a placa, e determinado um perfil de temperatura correspondente. Este perfil era então transferido para a parede quente da cavidade para obtenção de um novo fluxo de calor. Este procedimento prosseguia até que o perfil de temperatura não mais se alterasse.

Como comentado, o procedimento iterativo entre a placa e a cavidade leva em conta apenas a parede quente. Para a parede fria, o perfil assumido (T_f) é "simétrico" ao obtido para o lado quente (T_q) e obedece a relação

$$T_f = T_a - \left[\frac{T_a - T_c}{T_H - T_a} \right] (T_q - T_a) \tag{6}$$

onde as temperaturas T_H e T_C são respectivamente 49°C e 1°C para permitir a comparação com o experimento de [3].

PARÂMETROS DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR

As equações de conservação (1 a 4) estão escritas na sua forma dimensional e as propriedades físicas, para obtenção dos números de Rayleigh e Prandtl, são calculadas na temperatura de 300K.

O número de Grashof é definido por

$$Gr = g \beta \cos \gamma (T_H - T_C) L^3 / \nu^2 \tag{7}$$

Os resultados para troca de calor por convecção natural em cavidades são usualmente expressos em termos de uma condutibilidade térmica equivalente definida por

$$k_{eq} = \frac{Q}{Q_{cond}} \tag{8}$$

onde Q é o calor efetivamente trocado na cavidade e Q_{cond} é o calor que seria trocado na cavidade por

condução pura. É comum também a exposição dos resultados em termos do número de Nusselt

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h} L}{k} \quad (9)$$

onde o coeficiente de transferência de calor por convecção é definido por

$$\overline{h} = \frac{Q}{L \ell (T_H - T_C)} \quad (10)$$

com ℓ igual a profundidade da cavidade ($\ell=1$). Substituindo-se (10) em (9) obtém-se

$$\overline{Nu} = \frac{Q}{k \ell (T_H - T_C)} \quad (11)$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

O domínio da cavidade triangular foi discretizado em uma malha de 24 x 24 volumes com concentração das linhas coordenadas nas fronteiras, como mostrado na figura 3. Para a placa a malha é de 10 x 24, cartesiana com o espaçamento no sentido longitudinal da placa coincidente com a cavidade triangular e uniforme no sentido transversal.

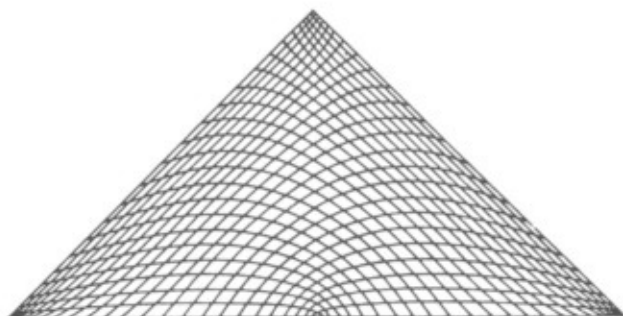


Fig. 3 Discretização do domínio de cálculo

O procedimento descrito para obtenção do perfil de temperaturas foi executado para cada número de Rayleigh imposto para solução do problema. A figura 4 apresenta os perfis de temperatura obtidos e que são as condições de contorno para a parede quente (T_q) da cavidade, enquanto que para a parede fria (T_f) o perfil é determinado pela equação (6). Observou-se que o perfil de temperatura para a placa não sofre alterações significativas com a variação do número de Rayleigh.

A figura 5 mostra o fluxo de calor local nas paredes quente e fria da cavidade, incluindo os resultados obtidos experimentalmente [3] e numericamente [5] com perfil linear de temperaturas na região do ápice. Observa-se nesta figura que o fluxo de calor local da parede fria possui um máximo em torno de 330 w/m^2 para $x^*/L=0$, em [3].

O perfil linear assumido em [5] possui um máximo em torno de 500 w/m^2 para $x^*/L=0.12$. Com o perfil de temperatura obtido segundo o procedimento aqui proposto, o fluxo máximo de calor é de 380 w/m^2 em $x^*/L=0.086$, e exibe ao longo da parede o mesmo comportamento apresentado pelos resultados experimentais. Comparando-se os resultados obtidos numericamente observa-se que o procedimento agora adotado representa uma sensível melhoria na previsão

do fluxo de calor local. Os resultados obtidos para a parede quente também se aproximam mais do resultado experimental, principalmente para $x^*/L=1.0$ onde se observa também a tendência a repetição dos resultados experimentais.

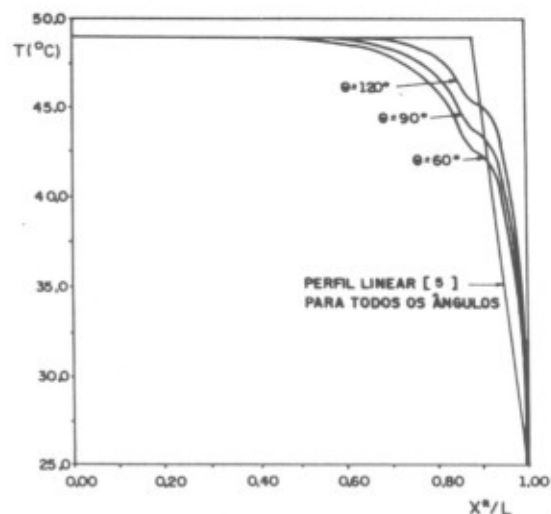


Fig. 4 Perfis de temperaturas para as condições de contorno nas paredes

A figura mostra ainda que o fluxo de calor medido experimentalmente no ápice é praticamente o mesmo para as paredes quente e fria. A solução numérica reproduz este resultado. A melhor determinação deste perfil nesta região, como realizado neste trabalho, aproxima a solução numérica do comportamento experimental. Para um perfil linear, a relação entre o fluxo de calor da parede fria e da parede quente, no ápice, é de 2.80 vezes, enquanto que para a presente simulação é de 1.32.

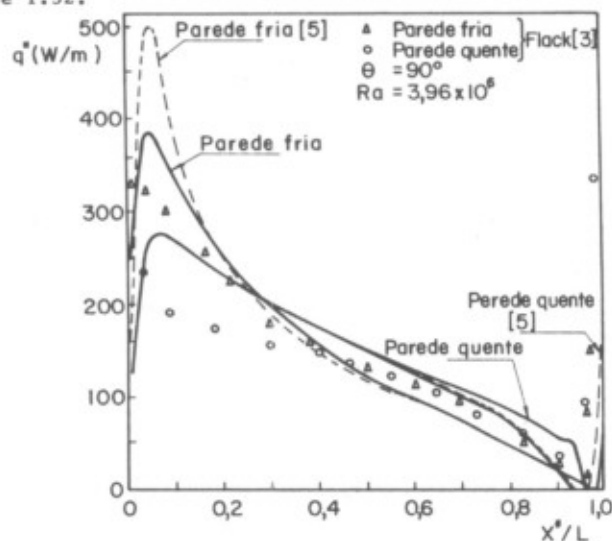


Fig. 5 Fluxo de calor local nas paredes

Finalmente, Flack [3] mediu o fluxo de calor médio na parede quente (140,2 w/m^2) e na parede fria (145,7 w/m^2), com os quais o resultado numérico (146,7 w/m^2) concorda muito bem.

A tabela 1 apresenta o número de Nusselt médio calculado de acordo com a equação (11), além dos resultados obtidos em [3] e [5], e apresenta uma boa concordância o resultado experimental [3], com exceção da cavidade com $\theta=60^\circ$. Entretanto para esta geometria este é o único resultado experimental disponível para comparação o que impede uma melhor análise.

A figura 6 apresenta o comportamento da condutibilidade térmica equivalente, como definida pela equação (8), em função do número de Rayleigh para valores de $\theta=60^\circ$, 90° e 120° . Observa-se que para Rayleigh menores que 10^8 o calor transferido é predominantemente por condução. Além disto a

Tabela 1. Nusselt médio (comparação)

Ra	6,38x10 ⁶	5,21x10 ⁶	3,96x10 ⁶	3,55x10 ⁶	2,75x10 ⁶
θ	60°	90°	90°	120°	120°
ref.					
-	15,16	13,50	12,50	11,18	10,30
3	19,00	14,50	13,30	11,00	10,00
5	15,82	13,97	12,91	11,26	10,43

condutibilidade térmica equivalente cresce com o aumento do ângulo, de onde se conclui que a recirculação na cavidade devido as forças de empuxo é mais efetiva para ângulo maiores.

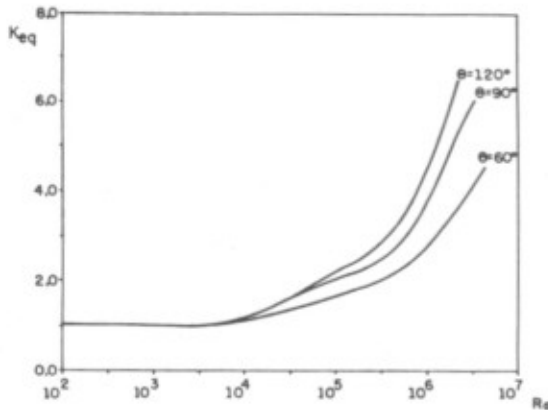


Fig. 6 Condutibilidade térmica equivalente

Através dos dados obtidos para os três diferentes ângulos e para os vários números de Rayleigh, foi realizado um ajuste das curvas da figura 6, segundo a equação

$$K_{eq} = a Ra^b \theta^c \quad (12)$$

Os valores de a, b e c estão definidos na tabela 2, e são válidos para Rayleigh entre 1×10^5 e 5×10^6 . A mesma tabela mostra os valores de \bar{Nu} para condução pura. Com estes valores de Nusselt o calor trocado por condução pode ser calculado através da equação (11). Com a condutibilidade térmica equivalente calculado com a equação (12) o calor trocado por convecção pode ser calculado pela equação (8).

Tabela 2. Valores para as equações (11) e (12)

θ	a	b	c	\bar{Nu}
60°	0,005	0,251	0,700	3,979
90°	0,007	0,276	0,550	2,238
120°	0,005	0,302	0,550	1,780

CONCLUSÕES

Os resultados apresentados neste trabalho são ainda dependentes da temperatura arbitrada para o vértice da cavidade. Dependem também da extensão do topo da placa, sobre a qual esta temperatura é prescrita. Para que estas questões fossem definitivamente eliminadas seria necessário a solução do problema combinado de convecção na cavidade e de condução nas placas (aquecida e resfriada) envolvendo provavelmente uma resistência de contato. Sem dúvida, maiores detalhes do problema físico seriam

necessários.

Se no entanto o objetivo é o cálculo do fluxo médio de calor nas paredes da cavidade, tanto o perfil linear de temperatura adotado em [5] como o determinado neste trabalho o satisfazem e apresentam boa concordância com os resultados experimentais relatados em [3]. Se a intenção é analisar o fluxo local nas paredes, o perfil de temperatura aqui proposto, obtido através da interação entre as soluções da condução em uma placa e a convecção na cavidade, reproduz melhor o comportamento verificado experimentalmente, principalmente na região do ápice.

Entretanto o procedimento aqui adotado é um tanto trabalhoso, exigindo maior tempo computacional para obtenção dos resultados.

REFERÊNCIAS

- [1] Poulikakos, D. e Bejan, A., The Fluid Dynamics of an Attic Space, Journal of Fluid Mechanics, 131, pp. 251-269, 1983.
- [2] Poulikakos, D. e Bejan, A., Natural Convection Experiments in a Triangular Enclosure, ASME Journal of Heat Transfer, 105, pp. 652-655, 1983.
- [3] Flack, R.D., Konopnicki, T.T. e Rooke, J.H., The Measurement of Natural Convective Heat Transfer in Triangular Enclosures, ASME Journal of Heat Transfer, 101, pp. 648-658, 1979.
- [4] Flack, R.D., The Experimental Measurement of Natural Convection Heat Transfer in Triangular Enclosures Heated or Cooled From Below, ASME Journal of Heat Transfer, 102, pp. 770-772, 1980.
- [5] Maliska, C.R., Polina, S. e Silva, A.F.C., Natural Convection in Triangular Enclosures, I Simpósio Brasileiro de Transferência de Calor e Massa, Campinas, S.P., Julho 1987.
- [6] Maliska, C.R. e Raithby, G.D., A Method for Computing Three-Dimensional Flows Using Non-orthogonal Boundary-fitted Coordinates, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 4, pp. 519-537, 1984.
- [7] Arpaci, V.S., Conduction Heat Transfer, Addison-Wesley, Massachusetts, 1966.

ABSTRACT

The treatment of the singular boundary condition encountered in simulating the natural convection in attic space is addressed. To properly deal with this boundary condition the conjugate convection/conduction problem is solved numerically using a finite volume method in boundary fitted coordinates. The results are compared with the ones from a laboratory experiment, described in the literature, demonstrating that the strategy adopted in this work simulates realistically the experiment. The problem is solved for Rayleigh number ranging from 0 to 5.3×10^6 and for different angles of the attic space and the results correlated with an equation of the form $k_{eq} = a Ra^b \theta^c$.