

CONDUÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE ANISOTRÓPICA  
HETEROGÊNEA EM REGIÕES IRREGULARES DUPLAMENTE CONEXAS

C.R. Maliska e A.L. Seixiack  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Florianópolis-SC

SUMÁRIO

A solução numérica de problemas de condução de calor anisotrópica e heterogênea, no regime transitório, para geometrias arbitrarias bidimensionais e duplamente conexas, é apresentada. Desenvolve-se um modelo numérico, utilizando-se coordenadas generalizadas coincidentes com a região arbitrária. As equações são aproximadas através de balanços de energia, permitindo a análise física do problema e resultando em um esquema numérico conservativo, a nível de volumes elementares.

1. INTRODUÇÃO

O estudo da condução de calor em materiais anisotrópicos, devido às suas importantes aplicações nos vários setores da ciência e engenharia, tem recebido grande atenção dos pesquisadores.

Os trabalhos experimentais, devido às dificuldades na obtenção de medições precisas, assim como o número de soluções analíticas de problemas envolvendo a difusão de calor em meios anisotrópicos e heterogêneos, são limitados. Importantes contribuições com soluções analíticas, tem sido fornecidas por Chang et al. (1973), (1977, a), (1977, b) e

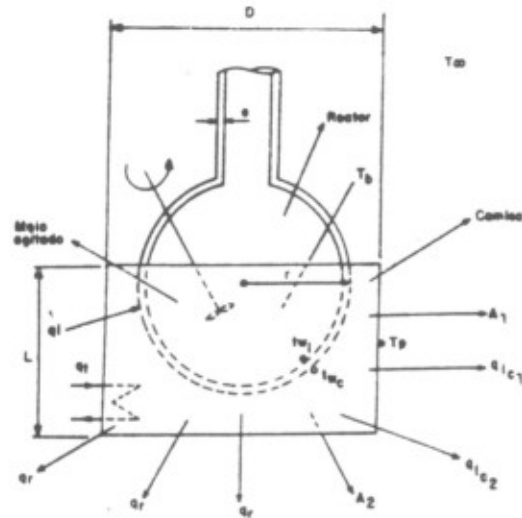


FIGURA 2 - ESQUEMA DO REATOR E DA CAMISA DE AQUECIMENTO

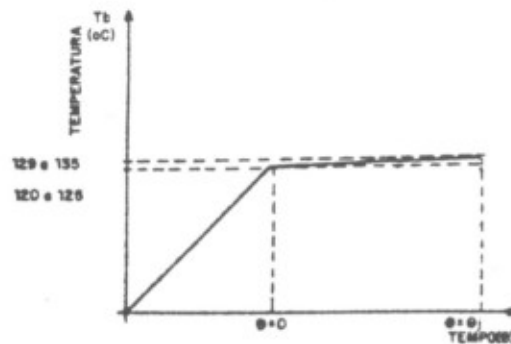


FIGURA 3 - VARIAÇÃO DE  $T_b$  COM O TEMPO (CURVA TÍPICA)

Özsisik e Shouman (1980).

Técnicas numéricas, utilizando aproximações por diferenças finitas e elementos finitos, tem sido muito utilizadas no tratamento de domínios irregulares. Quando se trabalha com diferenças finitas, é interessante a utilização de um sistema de coordenadas, cujas linhas adaptem-se à geometria, coincidindo com todas as fronteiras do domínio físico. Com isto, tornam-se desnecessárias interpolações das condições de contorno e possibilita-se a generalização da metodologia. Tal sistema é conhecido por sistema natural de coordenadas.

A bibliografia apresenta alguns trabalhos sobre a condução de calor anisotrópica, empregando coordenadas naturais. Um estudo da condução de calor permanente, anisotrópica em domínios irregulares, é devido a McWhorter et al. (1980). Projhan et al. (1981) apresentam um trabalho sobre a condução de calor permanente em meios compostos anisotrópicos de geometrias arbitrárias. Uchikawa e Takeda (1985) analisam um problema transiente, anisotrópico em domínios arbitrários e heterogêneos, aplicando o método na análise da solidificação de aço em moldes de fundição.

Neste trabalho, problemas de condução de calor transiente, anisotrópica e heterogênea em geometrias arbitrárias, bidimensionais e duplamente conexas, utilizando coordenadas não-ortogonais, são analisados. A equação inicialmente no sistema de coordenadas cartesianas, é transformada para o sistema de coordenadas generalizadas e aproximada para os volumes finitos, pelo método do volume de controle. Este método, ao contrário do que acontece com outras técnicas numéricas, obtém as equações aproximadas expressando o princípio de conservação para a energia a nível de volumes elementares. Condições de contorno das três espécies, estão incluídas na metodologia.

Para testar o método foi escolhida uma região anular, resolvendo-se problemas transientes e permanentes, anisotrópicos e heterogêneos. Observa-se que o fato de a geometria testada ser regular é indiferente para o método de

solução, uma vez que as malhas utilizadas são não-ortogonais e portanto, todos os termos da equação aproximada são não nulos, desde os termos devido a não-ortogonalidade até aqueles devido a não-isotropia do meio. A escolha dessa geometria é justificada pelo fato de se dispor de soluções analíticas, para efeito de comparações. Os resultados obtidos apresentam boa concordância com as soluções analíticas, estando ainda o esquema numérico, apto para tratar problemas com geração de calor e condutividade térmica variando com a temperatura.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE

A equação da condução de calor bidimensional, transiente, anisotrópica e heterogênea, em sua forma conservativa no sistema cartesiano  $(x, y)$ , é dada por

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y}) + \dot{q} \quad (2.1)$$

onde  $T$  = temperatura,  $t$  = tempo,  $k_{ij}$  são as componentes do tensor condutividade térmica,  $\rho$  = massa específica,  $c_p$  = calor específico e  $\dot{q}$  = taxa de geração de energia. As condições de contorno são englobadas ao termo fonte na equação aproximada.

As componentes do vetor fluxo de calor nas direções  $x$  e  $y$ , são dadas por:

$$q_x = -(k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{12} \frac{\partial T}{\partial y}) \quad q_y = -(k_{21} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial T}{\partial y}) \quad (2.2)$$

Uma vez gerado o sistema de coordenadas, cujo método deve-se a Thompson et al. (1974), a equação da condução será transformada do sistema cartesiano para o novo sistema de coordenadas e solucionada no plano transformado, figura

lb, independente da geometria do plano físico, figura 1a. Portanto, a equação (2.1), escrita no sistema generalizado  $(\xi, \eta)$  e mantendo sua forma conservativa, é dada por

$$\frac{\rho C}{J} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_3 \frac{\partial T}{\partial \xi} + C_4 \frac{\partial T}{\partial \eta}) + \frac{\dot{q}}{J} \quad (2.3)$$

onde  $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ , é o jacobiano da transformação de coordenadas. Os subíndices indicam diferenciação parcial. Os coeficientes  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são dados por:

$$C_1 = J(k_{11} y_\eta^2 - 2k_{12} x_\eta y_\eta + k_{22} x_\eta^2) \quad (2.4)$$

$$C_2 = C_3 = -J[k_{11} y_\xi y_\eta - k_{12} (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) + k_{22} x_\xi x_\eta] \quad (2.5)$$

$$C_4 = J(k_{11} y_\xi^2 - 2k_{12} x_\xi y_\xi + k_{22} x_\xi^2) \quad (2.6)$$

Os coeficientes (2.4) a (2.6) contêm as informações que dizem respeito à anisotropia e à geometria do plano físico. Observa-se na equação (2.3) que os termos não-ortogonais estão envolvidos nos coeficientes  $C_2$  e  $C_3$ .

### 3. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA OS VOLUMES FINITOS

A equação (2.3), em sua forma aproximada, é obtida integrando-se a equação diferencial no volume elementar mostrado na figura 2b. Isto é equivalente à realização de um balanço de energia na célula. Para os pontos da fronteira promovem-se balanços de energia nos volumes de controle, considerando a condição de contorno existente, que dessa maneira é incorporada à equação algébrica. O método, portanto, baseia-se na análise física do problema e origina esquemas numéricos conservativos, a nível de volumes elementares em todo o domínio.

A equação aproximada para os volumes internos, é dada

por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho C}{J \Delta t} \Delta V_t\right) T_p^{n+1} + A_p^* T_p^{n+\theta} = A_e T_e^{n+\theta} + A_w T_w^{n+\theta} + A_n T_n^{n+\theta} + A_s T_s^{n+\theta} + \\ + A_{ne} T_{ne}^{n+\theta} + A_{nw} T_{nw}^{n+\theta} + A_{se} T_{se}^{n+\theta} + A_{sw} T_{sw}^{n+\theta} + F^T \Delta V_t + \left(\frac{\rho C}{J \Delta t} \Delta V_t\right) T_p^n \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde,  $\Delta V_t$  é o volume da célula no plano transformado. Os coeficientes  $A_i$  e o termo fonte, são dados por:

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{C_{2n} - C_{2s}}{4} + C_{1e} & A_w &= \frac{C_{2s} - C_{2n}}{4} + C_{1w} \\ A_n &= \frac{C_{2e} - C_{2w}}{4} + C_{1n} & A_s &= \frac{C_{2w} - C_{2e}}{4} + C_{1s} \\ A_{ne} &= \frac{C_{2e} + C_{2n}}{4} & A_{nw} &= -\frac{(C_{2w} + C_{2n})}{4} \\ A_{se} &= -\frac{(C_{2e} + C_{2s})}{4} & A_{sw} &= \frac{C_{2w} + C_{2s}}{4} \\ A_p^* &= A_e + A_w + A_n + A_s \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$F^T = \frac{\dot{q}}{J} \quad (3.3)$$

O fator  $\theta$  varia entre zero e um, caracterizando a faixa entre as formulações explícita e implícita. O avanço de tempo a ser utilizado pode, genericamente, ser estabelecido como:

$$(\Delta t)^p = E \left( \frac{\rho C \Delta V_t}{J A_p^*} \right) \quad (3.3)$$

onde  $E$  é um multiplicador de tempo, que na formulação explícita deve ser  $E \leq 1$ , não sofrendo restrições na formulação implícita. Na obtenção do transiente real o avanço de tempo deve ser o mesmo em todo o domínio e portanto,  $E$  deverá variar de célula para célula. Se o interesse for somente a solução do regime permanente, o valor de  $E$  será constante em todo domínio e o transiente é então chamado de transiente distorcido.

#### 4. APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

As condições de contorno são englobadas ao termo fonte da equação (3.1), por meio de balanços de conservação de energia nos volumes de controle das fronteiras. Nestes volumes o fluxo de calor da face coincidente com a fronteira,  $Q_f$ , é calculado segundo a condição de contorno existente. Para a condição de temperatura prescrita,  $Q_f$  é dado por uma aproximação de segunda ordem do gradiente de temperatura na fronteira. Para o fluxo de calor prescrito,  $q$  ( $W/m^2$ ),  $Q_f$  é obtido, simplesmente multiplicando  $q$  pela respectiva área da face do volume elementar. Se a condição de contorno é de convecção,  $Q_f$  pode ser obtido de duas maneiras: aproximando por parábola a temperatura na fronteira,  $T_f$ , ou determinando  $T_f$  por uma aproximação dos gradientes de temperatura na fronteira.

As condições de contorno englobadas ao termo fonte, tornam-se de simples adaptação, além de permitir que as expressões dos coeficientes sejam as mesmas para as diferentes condições, obtendo-se portanto, generalidade no esquema numérico.

#### 5. RESULTADOS

O método é testado para uma região anular concêntrica, com razão de diâmetros  $D_2/D_1 = 3$ , obtendo-se soluções dos regimes transiente e permanente e utilizando-se os métodos explícito e implícito com malhas ortogonais, figura 3a, e não-ortogonais, figura 3b.

Os resultados foram obtidos para os problemas:

A - Regimes transiente e permanente, para o caso isotrópico, com as condições de contorno, especificadas em coordenadas polares, como:

$$T(R_1, \theta) = T_1 \quad T(R_2, \theta) = T_2 \quad (5.1)$$

onde os índices 1 e 2 referem-se às faces interna e externa respectivamente. A figura 4 mostra os perfis de tempera

tura do regime transiente, obtidos segundo a formulação explícita, para duas malhas,  $9 \times 40$  e  $17 \times 40$ . Os perfis de temperatura referem-se a pontos próximos a fronteira interna,  $R^* = 0.05$  para a malha  $9 \times 40$  e  $R^* = 0.03$  para malha  $17 \times 40$ . A figura 4a mostra os resultados para malhas ortogonais e a figura 4b, para malhas não-ortogonais, comparadas com a solução analítica obtida por Carslaw e Jaeger (1959). Os resultados apresentam excelente concordância com a solução analítica, sendo que os maiores erros, da ordem de 0.68% para malha  $9 \times 40$  e 0.58% para  $17 \times 40$ , ocorrem no início do transiente. Para tempos subsequentes, os erros diminuem para 0.16% com malha  $9 \times 40$  e 0.15% com malha  $17 \times 40$ . A figura 5 apresenta a solução do regime permanente, obtida pelo transiente distorcido com  $E = 0.40$ , considerando a malha  $17 \times 40$  ortogonal e não-ortogonal. O erro máximo obtido, em ambos os casos, foi de 0.29%.

B - Regime permanente para a região anular anisotrópica, com as temperaturas nas faces interna e externa mantidas a:

$$T(R_1, \theta) = T_1 \quad T(R_2, \theta) = T_2 \sin \theta \quad (5.2)$$

os resultados estão comparados com a solução analítica segundo Chang e Tsou (1977,b), obtida para uma região anular anisotrópica e homogênea em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta)$ . Assim, como o modelo foi construído utilizando-se os coeficientes de condutividade no sistema cartesiano, há necessidade da transformação do tensor condutividade térmica do sistema cilíndrico para o cartesiano, pois as componentes do tensor, expressas neste último sistema de coordenadas são necessárias nas equações (2.4), (2.5) e (2.6). Com isso, tais coeficientes são expressos no sistema cartesiano  $(x, y)$ , através da transformação usual de um tensor de segunda ordem. Com a transformação, o meio passa de homogêneo em coordenadas cilíndricas, para heterogêneo em coordenadas cartesianas, mantendo-se assim no plano transformado.

As figuras 6 e 7 mostram as soluções para os casos ortotrópico e anisotrópico respectivamente. Os perfis de temperatura mostrados, referem-se a três posi

ções em uma malha 19x60 distorcida. A tabela I apresenta os resultados com os erros ocorridos para os três casos, segundo as diferentes posições radiais. A primeira temperatura refere-se à solução analítica e a segunda, à solução numérica. Nesta tabela, observa-se que os erros máximos ocorrem para temperaturas da ordem de  $10^{-3}$  da máxima temperatura.

## 6. CONCLUSÕES

Problemas de condução de calor envolvendo meios anisotrópicos e/ou heterogêneos, são tratados analiticamente em um número limitado de casos. As causas devem-se a dificuldades na solução da equação da condução, associada às condições de contorno e à geometria da região a ser estudada.

Com o método aqui desenvolvido, é possível tratar-se domínios irregulares, bidimensionais e duplamente conexos, empregando um sistema de coordenadas que se adapta à geometria deste domínio. Todos os cálculos, quer sejam para gerar o sistema de coordenadas, quer para a solução do problema físico, são realizados em um plano retangular fixo, tornando desnecessárias as interpolações das condições de contorno nas fronteiras. Além disso o problema físico é solucionado independentemente da geometria do domínio.

O método é versátil quanto a mudança das condições de contorno e a inclusão da condutibilidade térmica, variável não só com a direção e no espaço, mas também com a temperatura.

A metodologia desenvolvida é aplicável a problemas gerais de difusão. Em futuros trabalhos pretende-se o estudo da difusão simultânea de massa e calor em meios porosos. O método não é restrito a duas dimensões e é aplicável a problemas generalizados, Maliska (1981).

Outros resultados, utilizando condições de contorno de segunda e terceira espécies, foram obtidos e serão publicados futuramente.

## 7. REFERÊNCIAS

- 1 - CARSLAW, H.S. e JAEGER, J.C. "Conduction of heat in solids", Oxford: Clarendon Press, (1959).
- 2 - CHANG, Y.P., KANG, C.S. e CHEN, D.J. "The use of fundamental Green's functions for the solution of problems of heat conduction in anisotropic media", Int. J. Heat and Mass Transfer 16,1905 (1973).
- 3 - CHANG, Y.P. e TSOU, R.C.H. "Heat conduction in an anisotropic medium homogeneous in cylindrical regions-unsteady state", J. of Heat Transfer-ASME, 41(1977,a).
- 4 - CHANG, Y.P. e TSOU, R.C.H. "Heat conduction in an anisotropic medium homogeneous in cylindrical regions-steady state", J. of Heat Transfer-ASME, 132(1977,b).
- 5 - MALISKA, C.R. "A solution method for three-dimensional parabolic fluid flow problems in nonorthogonal coordinates", Ph.D. Thesis, Waterloo Univ., Ontario, Canadá, (1981).
- 6 - McWHORTER III, J.C. e SADD, M.H. "Numerical anisotropic heat conduction solutions using boundary-fitted coordinate systems", J. of Heat Transfer 102, 308(1980).
- 7 - ÖZISIK, M.N. e SHOUMAN, S.M. "Transient heat conduction in an anisotropic medium in cylindrical coordinates", J. of The Franklin Institute 309,457(1980).
- 8 - PROJAHN, O., RIEGER, H. e BEER, H. "Heat conduction in anisotropic composites of arbitrary shape (a numerical analysis)", Wärme und Stoffübertragung 15, 223(1981).
- 9 - THOMPSON, J.F., THAMES, F.C. e MASTIN, C.W. "Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies", J. of Comp. Phy. 15, 299(1974).
- 10- UCHIKAWA, S. e TAKEDA, R. "Use of a boundary-fitted coordinate transformation for unsteady heat conduction problems in multiconnected regions with arbitrary shaped boundaries", J. of Heat Transfer-ASME 107, 494 (1985).

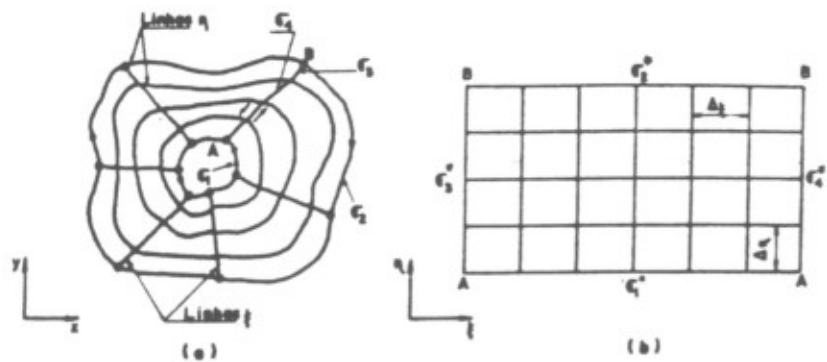


Figura 1 (a) Sistema natural de coordenadas-domínio físico; (b) domínio transformado.

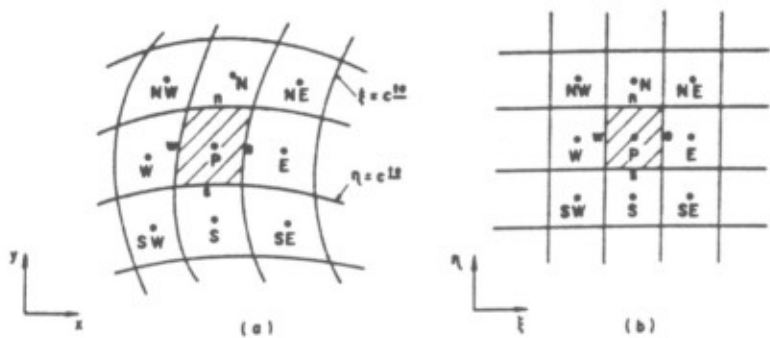


Figura 2 - Volumes de controle: a) domínio físico; b) domínio transformado.

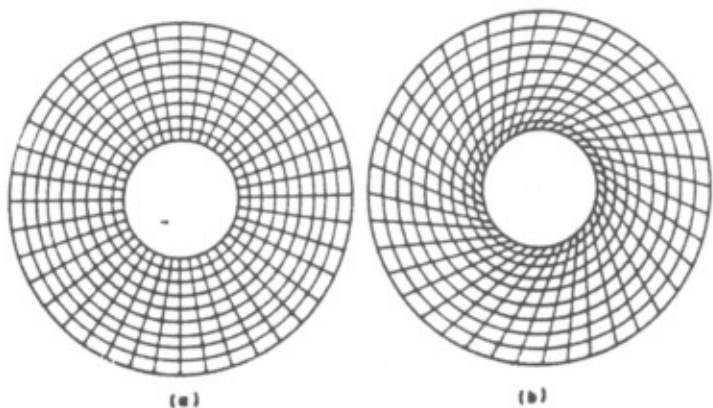


Figura 3 - Geometria utilizada nos testes: a) malha ortogonal; b) malha não-ortogonal.

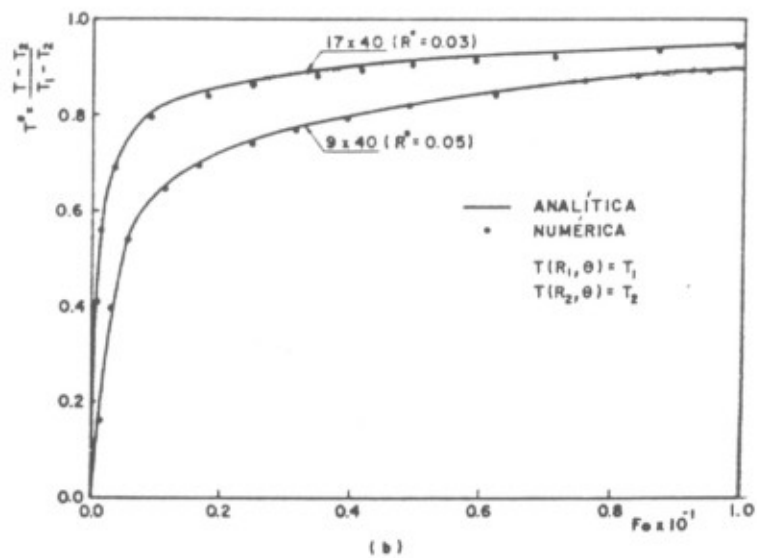
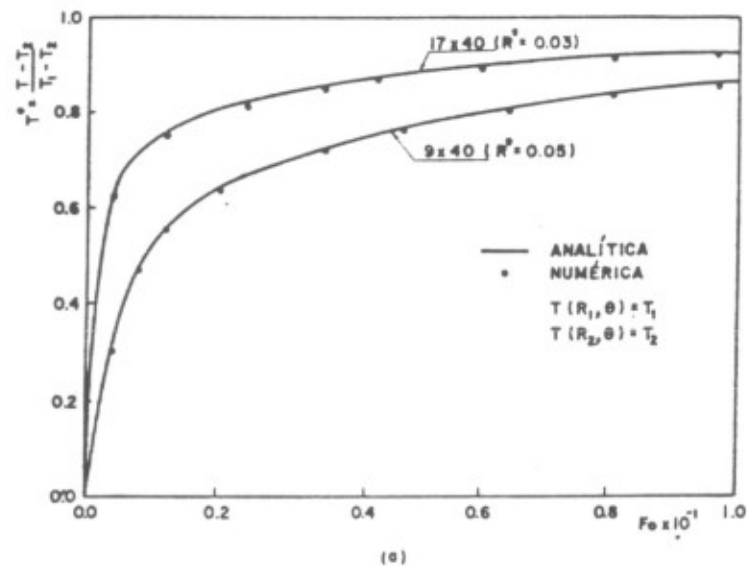


Figura 4 - Temperatura adimensional - Regime transiente: a) malha ortogonal; b) malha não-ortogonal.

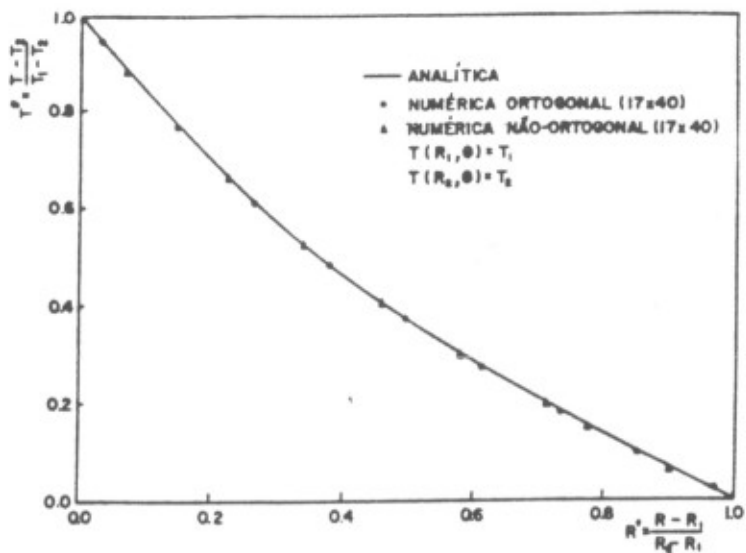


Figura 5 - Temperatura adimensional. Regime permanente

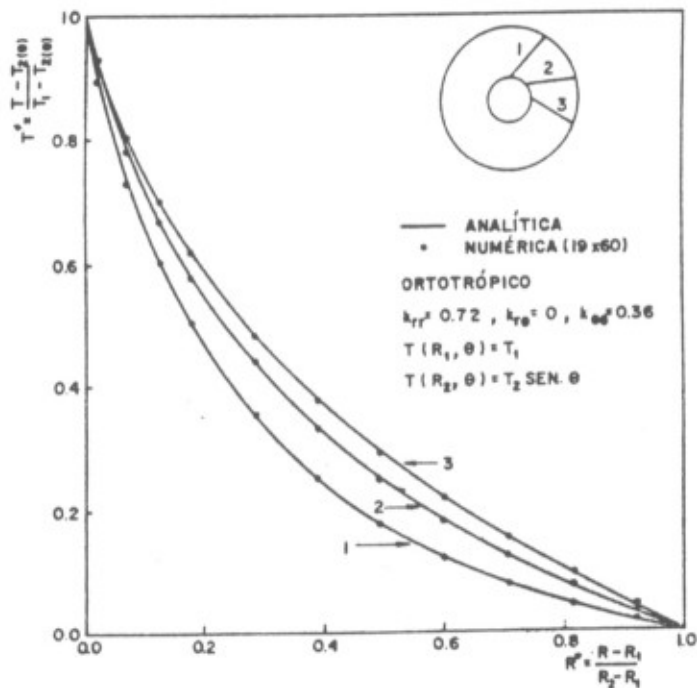


Figura 6 - Perfis de temperatura. Caso ortotrópico.

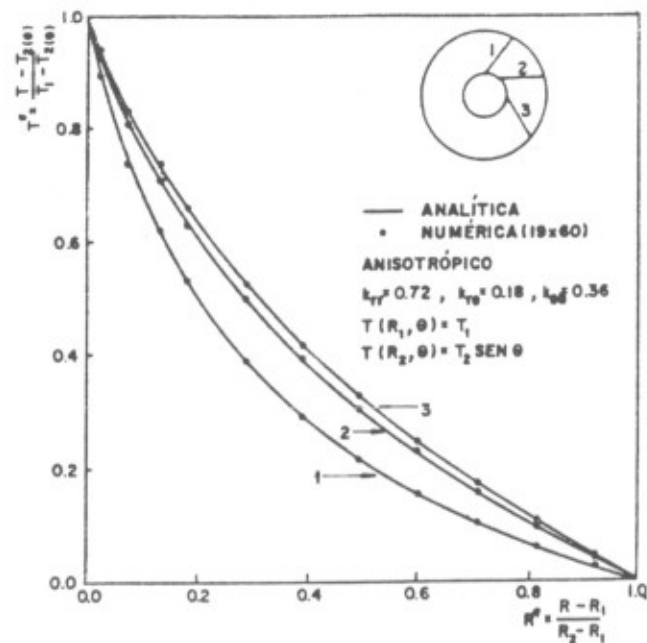


Figura 7 - Perfis de temperatura - caso anisotrópico.

Tabela I - Distribuição de temperatura  $T^*$ , para  $k_{rr} = 0,72, k_{\theta\theta} = 0,18, k_{\theta r} = 0,36$ ; malha 19x60 não ortogonal.

$R^*$	ISOT.	ER. %	ORTOR.	ER. %	ANISOT.	ER. %
0.02	0.9116 0.9103	0.14	0.9183 0.9173	0.11	0.9302 0.9292	0.11
0.23	0.4813 0.4806	0.15	0.5037 0.5031	0.12	0.5618 0.5607	0.20
0.44	0.2680 0.2674	0.22	0.2892 0.2887	0.17	0.3468 0.3457	0.32
0.65	0.1351 0.1345	0.44	0.1503 0.1497	0.40	0.1915 0.1904	0.57
0.97	0.0079 0.0074	6.33	0.0093 0.0087	6.45	0.0131 0.0118	9.92