

Avaliação no Limite Incompressível de uma Formulação para Qualquer Regime de Escoamento



ANTONIO F.C. DA SILVA* e CLÓVIS R. MALISKA*



Depto. Engenharia Mecânica — UFSC
Cx. Postal 476 - 88049 - Florianópolis - SC

SUMÁRIO

Uma formulação segregada generalizada válida para qualquer regime de escoamento é implementada em um programa computacional. O programa é aplicado na solução do escoamento de ar com número de Reynolds igual a 5 contra um obstáculo e o tempo de CPU para a obtenção da solução de regime permanente é comparado ao obtido através da formulação incompressível. Conclui-se que o esforço computacional é dependente do comportamento do método SIMPLEX para tratamento do acoplamento pressão-velocidade. O programa é testado resolvendo-se o escoamento de ar com Mach 2 contra o mesmo obstáculo.

INTRODUÇÃO

Tradicionalmente os modelos matemáticos desenvolvidos para a solução de problemas de escoamento de fluidos viscosos tem se dividido entre os destinados a solução de escoamentos compressíveis e os destinados a solução de escoamentos incompressíveis. Basicamente, os modelos diferem pela técnica empregada na linearização da equação discretizada da conservação da massa.

Nos modelos compressíveis as velocidades assumem valores conhecidos de um instante ou iteração anterior e a equação da continuidade resulta em uma equação para o cálculo da densidade. A pressão é então calculada através de uma equação de estado. No entanto, quando a densidade é constante ou uma função apenas da temperatura, a equação de estado não pode ser usada para o cálculo da pressão. Nestes casos é adotada a formulação incompressível em que na equação da continuidade a densidade é assumida constante e as velocidades são relacionadas ao campo de pressões através de expressões aproximadas. Assim, a equação da continuidade resulta em uma equação para o cálculo da pressão e a densidade é calculada através da equação de estado.

Infelizmente, se um mesmo escoamento apresenta regiões compressíveis e regiões incompressíveis nenhuma das duas famílias de métodos é capaz de resolver o problema.

Diversos trabalhos podem ser encontrados na literatura de autores que estenderam a aplicabilidade dos métodos compressíveis para escoamentos incompressíveis e vice-versa. Entre os primeiros se destaca o trabalho pioneiro de Chorin [1] que fez uso de uma densidade artificial nas equações do movimento. Issa e Lockwood [2] por sua vez adaptaram o modelo incompressível expressando na equação da continuidade também as variações de densidade em função de variações no campo de pressões.

Em recente trabalho, Van Doormaal [3] seguindo o mesmo procedimento básico de Issa e Lockwood [2] apresenta uma formulação segregada generalizada capaz de resolver escoamentos em que existem regiões supersônicas e regiões com baixo número de Mach.

É objetivo dos autores do presente trabalho o desenvolvimento de uma formulação geral para a solução deste tipo de problema através da discretização das equações governantes em um sistema de coordenadas curvilíneo generalizado coincidente com as fronteiras do domínio, mantendo as velocidades cartesianas como variáveis dependentes. Este trabalho relata a primeira etapa dessa atividade e consiste no teste da metodologia de Van Doormaal no limite incompressível e sua comparação com o desempenho da formulação exclusiva para escoamentos incompressíveis.

A seguir são apresentadas as equações governantes e os princípios básicos da formulação proposta em [3].

EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes do escoamento laminar bidimensional com k , μ e C_p constantes, forças de campo e dissipação viscosa desprezíveis, podem ser representadas em forma generalizada por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \Gamma^\phi \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S^\phi \quad (1)$$

onde os valores que ϕ , Γ^ϕ e S^ϕ assumem para as diversas equações de conservação são dados na Tab.1.

A eq. (1) para ϕ igual a 1, u , v e T mais uma equação de estado do tipo

$$\rho = \rho(P, T) \quad (2)$$

formam um conjunto de cinco equações e cinco incógnitas - u , v , P , T e ρ - que, submetidas às condições de contorno e inicial completam a formulação do problema.

Tabela 1. Valores assumidos por ϕ , Γ^ϕ e S^ϕ para as diversas equações de conservação

ϕ	Γ^ϕ	S^ϕ
1	0	0
u	μ	$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$
v	μ	$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$
T	k/C_p	$\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uP) + \frac{\partial}{\partial y}(vP) - P \frac{\partial u}{\partial x} - P \frac{\partial v}{\partial y} \right] / C_p$

DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações de conservação, em sua forma generalizada, são discretizadas através da integração em um volume de controle de dimensões $\Delta x, \Delta y, 1$ e do instante t ao instante $(t+\Delta t)$.

No presente trabalho, a região de solução é subdividida em volumes idênticos e a variável ϕ é armazenada no centro dos volumes.

As hipóteses assumidas no processo de integração

são bem conhecidas e podem ser vistas com detalhe em [4]. Adotando-se o transiente totalmente implícito a equação discretizada resulta então

$$[M\phi_P - M^0\phi_P^0]/\Delta t + (\dot{M}\phi)_e - (\dot{M}\phi)_w + (\dot{M}\phi)_n - (\dot{M}\phi)_s = [\Delta y \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}]_e - [\Delta y \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}]_w + [\Delta x \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}]_n - [\Delta x \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}]_s + S^\phi \Delta V \quad (3)$$

onde o superescrito "0" se refere ao instante t e o subíndice indica a face do volume de controle onde as quantidades são avaliadas.

Deve ser notado que para $\Gamma^\phi=0$, $S^\phi=0$ e $\phi=1$ é recuperada a forma discretizada da equação da conservação da massa, dada por

$$[M - M^0]/\Delta t + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (4)$$

Esta equação será alvo de discussão posterior.

A eq. (3) ainda não está na forma adequada pois envolve o valor da propriedade ϕ e suas derivadas nas faces do volume de controle, locais onde ϕ não é armazenada. Para a aproximação desses termos foi aplicado o esquema WUDS proposto por Raithby e Torrance [5]. Assim (3) resulta

$$[M^0/\Delta t + \Sigma a_{nb}^\phi] \phi_P = \Sigma (a^\phi)_{nb} + M^0 \phi_P^0/\Delta t + S^\phi \Delta V \quad (5)$$

Finalmente, expressando o termo $S^\phi \Delta V$ por uma expressão do tipo

$$S^\phi \Delta V = \Sigma (c^\phi)_P + r^\phi \phi_P + q^\phi \quad (6)$$

a eq. (5) resulta

$$a_P^\phi \phi_P = \Sigma (a^\phi)_{nb} + \Sigma (c^\phi)_P + M^0 \phi_P^0/\Delta t + q^\phi \quad (7)$$

onde

$$a_P^\phi = M^0/\Delta t + \Sigma a_{nb}^\phi - r^\phi \quad (8)$$

onde os valores de c^ϕ , r^ϕ e q^ϕ para u, v e T são dados na Tab. 2. A Fig. 1 mostra a posição na malha das variáveis envolvidas no cálculo desses coeficientes.

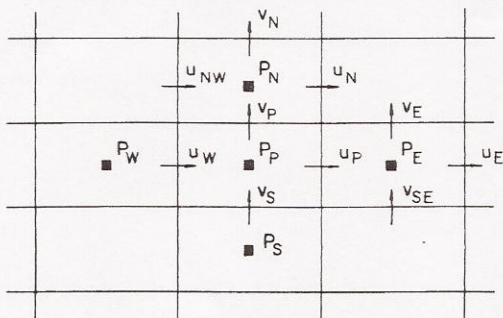


Fig.1 Variáveis envolvidas no cálculo de $S^\phi \Delta V$.

LINEARIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

A equação da conservação da massa, eq. (4), é não linear uma vez que na avaliação do fluxo de massa nas faces do volume de controle aparece o produto da velocidade e da densidade, ambas quantidades desconhecidas.

Tabela 2. Valores de c^ϕ , r^ϕ e q^ϕ na expressão de $S^\phi \Delta V$

ϕ	u	v	T
c_P^ϕ	$\Delta V/\Delta x$	$\Delta V/\Delta y$	$\frac{1}{2C_P} [2\Delta V/\Delta t - (u_P - u_W)\Delta y - (v_P - v_S)\Delta x]$
c_e^ϕ	$-\Delta V/\Delta x$	0	$u_P \Delta y / (2C_P)$
c_w^ϕ	0	0	$-u_W \Delta y / (2C_P)$
c_n^ϕ	0	$-\Delta V/\Delta y$	$v_P \Delta x / (2C_P)$
c_s^ϕ	0	0	$-v_S \Delta x / (2C_P)$
r^ϕ	$-2\mu \Delta y / 3\Delta x$	$-2\mu \Delta x / 3\Delta y$	0
q^ϕ	$\frac{\mu}{3} [(u_E + u_W)\Delta y / \Delta x + (v_N + v_S)\Delta x / \Delta y + (v_E + v_S - v_P - v_{SE})]$	$\frac{\mu}{3} [(v_N + v_S)\Delta x / \Delta y + (u_N + u_W - u_P - u_{NW})]$	$-\frac{\Delta V}{C_P \Delta t} P^0$

De forma diferente que nas formulações compressível ou incompressível, na formulação proposta em [3], o fluxo de massa é avaliado por uma expressão que, aplicada por exemplo na face este do volume de controle centrado em P da Fig. 1 resulta em

$$\dot{M}_e = \rho_e^* u_P \Delta y + \rho_e u_P^* \Delta y - \rho_e^* u_P^* \Delta y \quad (9)$$

onde as quantidades com o superscrito "*" são valores conhecidos de um nível iterativo anterior e o subscrito indica a face do volume em que a densidade é avaliada. Deve-se notar que esta equação recupera as linearizações da formulação compressível ou incompressível quando a velocidade ou a densidade tendem para valores constantes. Substituindo-se (9) e suas análogas em (4) a equação discretizada da conservação da massa resulta

$$m_P^0 \rho_P + m_e^0 \rho_E + m_w^0 \rho_W + m_n^0 \rho_N + m_s^0 \rho_S + m_e^u u_P + m_w^u u_W + m_n^v v_P + m_s^v v_S = b^C \quad (10)$$

A linearização dada por (9) garante que tanto a velocidade como a densidade permaneçam ativas na equação da conservação da massa.

TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

De forma idêntica à formulação incompressível, na presente formulação a equação da conservação da massa deve ser transformada numa equação para a pressão. Para tanto é necessário relacionar as densidades e as velocidades em (10) com o campo de pressões.

Sejam u_P^* e \bar{u}_P as velocidades resultantes dos campos de pressão P^* e \bar{P} respectivamente. De forma generalizada, um método para tratamento do acoplamento pressão-velocidade consiste na obtenção de uma expressão para \bar{u}_u de forma que

$$\bar{u}_P \approx u_P^* - \bar{d}_P^u (P'_E - P'_P) \quad (11)$$

onde

$$P' = \bar{P} - P^* \quad (12)$$

No presente estudo o método SIMPLEX [3] foi adotado para a avaliação de \bar{d}^u e \bar{d}^v .

Quanto às densidades, a partir de uma forma linearizada da equação de estado do tipo

$$\rho = c^{\rho} P + b^{\rho} \tag{13}$$

pode-se obter

$$\bar{\rho}_P = \rho_P^* + c^{\rho P'}_P \tag{14}$$

que relaciona as densidades $\bar{\rho}_P$ e ρ_P^* resultantes dos campos de pressão \bar{P} e P^* para um mesmo campo de temperaturas.

Obrigando os campos de velocidade e densidade gerados pelo campo de pressões \bar{P} a satisfazerem conjuntamente a conservação da massa, isto é, substituindo as expressões (11) e (14), e suas análogas em (10), obtém-se uma expressão para P' do tipo

$$a^{\rho P'}_P = a^{\rho P'}_E + a^{\rho P'}_W + a^{\rho P'}_N + a^{\rho P'}_S + b^{P'} \tag{15}$$

Detalhes da obtenção das eqs. (11)-(15) e do procedimento completo do esquema iterativo de solução segregada dos sistemas de equações governantes podem ser vistos em [6].

RESULTADOS

Com base na metodologia descrita acima, um programa computacional, escrito estritamente para discretização cartesiana, foi aplicado na solução do escoamento de ar com Mach igual a 2 contra um obstáculo como mostra a Fig. 2. Este problema é um dos resolvidos em [3] e foi escolhido com o propósito de conferir-se a correção do programa e seu desempenho. Apesar da aparente simplicidade do problema o mesmo é bastante complexo, apresentando regiões de recirculação com baixo número de Mach e regiões hiperbólicas com alto Mach.

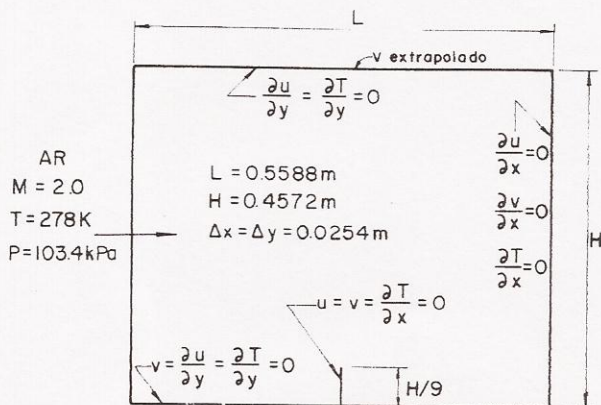


Fig.2 Problema escolhido para teste do programa computacional.

A Fig. 3 mostra isobáricas onde os valores assinalados se referem ao excesso de pressão acima da pressão de entrada. A Fig. 4 mostra linhas de corrente. Nenhuma diferença significativa pode ser detectada entre essas figuras e as apresentadas em [3] o que demonstra a correção das equações e do programa. Evidentemente os resultados apresentados não retratam adequadamente a realidade face a malha grosseira utilizada.

A Fig. 5 mostra o tempo de CPU para atingir-se a solução de regime permanente em função do intervalo de tempo adimensional Δt^* definido por

$$\Delta t^* = \Delta t u_{in} / L \tag{16}$$

onde u_{in} é a velocidade relativa a Mach igual a 2. Na mesma figura está plotada a curva extraída de [3]. As duas curvas foram obtidas utilizando-se método SIMPLEX para tratamento do acoplamento pressão-velocidade.

Evidentemente também o mesmo critério foi adotado para definir-se quando a solução pode ser considerada como a solução de regime permanente.

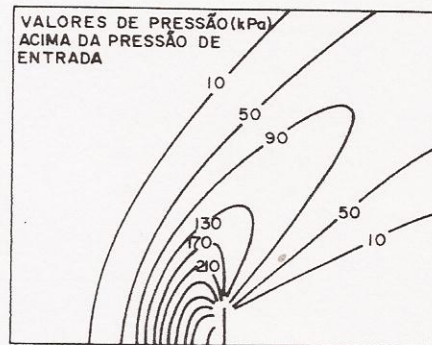


Fig. 3 Isobáricas.

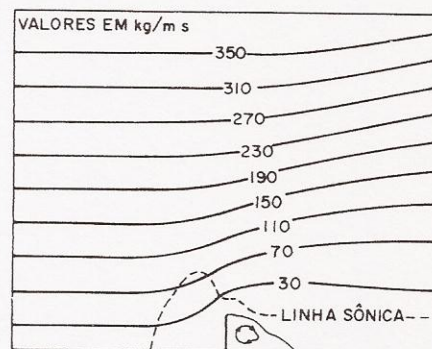


Fig. 4 Linhas de corrente.

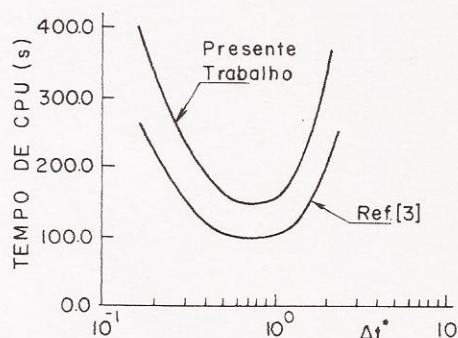


Fig. 5 Tempo de CPU para a solução do problema compressível.

As curvas mostram que o tempo gasto no presente trabalho esteve em torno de 50% superior ao tempo gasto em [3] para toda a região investigada. Embora ambos os programas tenham sido executados em computadores IBM 4341 acredita-se que a diferença nos tempos de computação deva ser creditada a diferenças de linguagem e possivelmente a um modelo mais rápido da CPU instalada no computador da universidade canadense. O comportamento apresentado pelo método é, entretanto, exatamente o mesmo para os dois programas. Estes resultados demonstram a correção do programa computacional.

A seguir, com o mesmo programa foi resolvido um problema incompressível análogo ao exposto na Fig.2 porém referente ao escoamento de ar com número de Reynolds, baseado na semi-altura do obstáculo, igual a 5. O mesmo problema foi resolvido também por um programa derivado do primeiro onde todos os termos associados a variações da densidade foram eliminados. Os resultados para o tempo de CPU dispendido para ambas as formulações estão mostrados na Fig. 6.

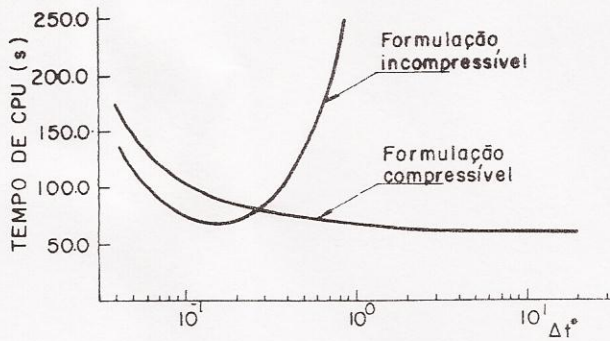


Fig. 6 Tempo de CPU para a solução do problema incompressível.

Embora os tempos mínimos das duas formulações sejam próximos, a formulação geral apresenta um comportamento claramente superior pois o tempo de CPU é menos sensível ao valor de Δt^* adotado.

Após uma análise detalhada dos dois programas a conclusão a que se chega é que a diferença de comportamento deve ser atribuída unicamente ao método SIMPLEC para tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Neste método, o termo \bar{d}^u é avaliado por

$$\bar{d}^u = \Delta y / [a_p^u - \sum a_{nb}^u] \quad (17)$$

Da definição de a_p^u dada por (8), com M^0 dado por $\rho^0 \Delta x \Delta y$, com Δt^* definido por (16) e com r^u da Tab. 2 obtém-se

$$\bar{d}^u = \frac{\Delta y}{\rho^0 \Delta x \Delta y u_{in} / L \Delta t^* + 2\mu \Delta y / 3 \Delta x} \quad (18)$$

Observa-se em (18) que \bar{d}^u só difere de volume para volume face a variações da densidade. Na Tab. 3 estão expostos valores de \bar{d}^u em função do intervalo de tempo adimensional Δt^* para um valor de ρ^0 igual a 1.3 Kg/m^3 .

No programa incompressível todos os termos associados a variações de densidade foram eliminados e portanto na expressão de \bar{d}^u inexistente o segundo termo do denominador. A Tab. 3 mostra também os valores de \bar{d}^u assim computados.

Verifica-se que para baixo Δt^* os valores de \bar{d}^u das duas formulações são semelhantes resultando em um esforço computacional próximo na Fig. 6. Verifica-se também que para a formulação compressível \bar{d}^u tem um comportamento assintótico justificando os resultados da Fig. 6. No entanto, na formulação incompressível, \bar{d}^u cresce indefinidamente com Δt^* . Assim, para um grande Δt^* , tem-se grandes valores de \bar{d}^u e conseqüentemente pequenas variações no campo de pressões são suficientes para alterar o campo de velocidades de forma a que a conservação da massa seja satisfeita, conforme a eq. (11). Entretanto, esse campo de pressões quando aplicado nas eqs. da quantidade de movimento e na equação de estado resultará em campos de velocidade e densidade próximos dos iniciais acarretando em um maior número de iterações para que a solução satisfaça simultaneamente as equações de conservação da massa e da quantidade de movimento.

Tabela 3. Valores de \bar{d}^u ($\text{m}^2\text{s/kg}$) para $\rho^0 = 1.3 \text{ kg/m}^3$ nos programas compressível e incompressível

Δt^*	Comp.	Incomp.
0.01	120	130
0.1	810	1300
1.0	1860	13000
10.0	2140	130000
∞	2180	∞

Como teste final, no programa compressível, a parte proporcional do termo fonte das equações de conservação da quantidade de movimento nas direções x e y, r^u e r^v respectivamente, foram deslocados para os termos q^u e q^v (ver Tab. 2). Como esperado, este passou a ter o mesmo comportamento do programa incompressível.

CONCLUSÕES

A formulação segregada generalizada apresentada em [3] para a solução de escoamentos compressíveis, incompressíveis ou escoamentos em que os dois tipos de comportamento estejam presentes, quando aplicada a um escoamento incompressível apresentou desempenho igual ou superior à formulação incompressível.

O presente trabalho demonstra que a forma de se trabalhar com o termo fonte nas equações da quantidade de movimento pode alterar o comportamento do método SIMPLEC de forma essencial. Maior atenção portanto deve ser dedicada por parte dos pesquisadores ao problema do acoplamento pressão-velocidade.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido dentro do projeto de cooperação técnico-científico com o Instituto de Atividades Espaciais do CTA. Os autores agradecem o apoio recebido.

REFERÊNCIAS

- [1] Chorin A.J., A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems, Journal of Computational Physics, Vol. 2, pp. 12-26, 1967.
- [2] Issa, R.I. and Lockwood, F.C., On the Prediction of Two-Dimensional Supersonic Viscous Interactions Near Walls, AIAA Journal, Vol. 15, no. 2, pp. 182-188, 1977.
- [3] Van Doormaal, J.P.; Raithby, G.D. and McDonald, E.H., The Segregated Approach to Predicting Viscous Compressible Fluid Flows, A.S.M.E. Paper, no. 86-GT-196, presented at the International Gas Turbine Conference and Exhibit, Dusseldorf, West Germany, June 8-12, 1986.
- [4] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw Hill, New York, 1980.
- [5] Raithby, G.D. and Torrance, K.E., Upstream-weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computer and Fluids, Vol. 2, pp. 12-26, 1967.
- [6] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., Desenvolvimento de Códigos Computacionais para a Solução de Problemas de Escoamentos de Alta Velocidade, Parte I, Relatório ao CTA / Instituto de Atividades Espaciais, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, junho, 1987.

ABSTRACT

A general formulation, designed for handling fluid flow problems in the supersonic and subsonic regimes, is used to test its incompressible limit solving a very low Mach number flow. The computational effort is compared with the one obtained using the well known incompressible formulation. The outcome of the analysis encourages deeper investigation of the behaviour of the SIMPLEC method used to deal with the pressure-velocity coupling. The supersonic flow around a flat plate at Mach number equal to 2 is solved for checking purposes of the code implementation.