

7º CONGRESSO BRASILEIRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO EM PETRÓLEO E GÁS



TÍTULO DO TRABALHO:

ANÁLISE DE MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO DO GRADIENTE EM MALHAS POLIGONAIS EMPREGADAS NA DISCRETIZAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

AUTORES:

Giovani Cerbato, Clóvis R. Maliska, António Fábio Carvalho da Silva, Fernando Sandro Velasco Hurtado

INSTITUIÇÃO:

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

ANÁLISE DE MÉTODOS DE RECONSTRUÇÃO DO GRADIENTE EM MALHAS POLIGONAIS EMPREGADAS NA DISCRETIZAÇÃO DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

Abstract

Polygonal grids are unstructured grids which are formed by control volumes with an arbitrary number of faces and therefore are able to represent complex geometries efficiently. Considering such type of grids, this paper focuses on the analysis of gradient reconstruction methods that can be applied to the discretization of flow models in petroleum reservoirs. The purpose of these methods is to approximate the gradient vectors associated with all the control volumes on a polygonal grid using discrete values of pressure, which are located at control volume centroids. The considered methods belong to two main groups: one of them uses the Green-Gauss formula, derived from the divergence theorem, and the other one employs the least squares method. Tests are performed in order to determine the gradient reconstruction methods that give more accurate numerical results in reasonable computational times. These numerical results are analyzed according to the convergence order of the pressure gradient and also according to the magnitude of the truncation error norm associated with the reconstruction process. Several tests are performed on polygonal grids with different distortion degrees, and also considering different types of pressure variation on the domain. The main objective of this work is to determine which reconstruction methods show a good cost/benefit ratio. This knowledge could contribute to develop more efficient numerical simulators using polygonal grids.

Keywords : polygonal grids, gradient reconstruction methods, cost/benefit ratio.

Introdução

As malhas poligonais são assim denominadas pelo fato de seus volumes de controle serem formados por um número arbitrário de faces. Na simulação de reservatórios, esses tipos de malhas não-estruturadas podem se adaptar às complexas características geométricas existentes nos reservatórios [1].

Atualmente, o uso de malhas poligonais para a discretização de domínios físicos bidimensionais está se tornando cada vez mais comum. Surge assim a necessidade do desenvolvimento de métodos de discretização que possam considerar volumes de controle genéricos. Um dos métodos de discretização possível de ser aplicado atendendo essa restrição é o baseado na reconstrução explícita do gradiente. Segundo este método, o fluxo através da face de um volume de controle é aproximado empregando-se gradientes de pressão, determinados a partir dos comumente denominados métodos de reconstrução.

Os métodos de reconstrução do gradiente tem como tarefa fundamental fornecer vetores gradiente, associados aos volumes de controle da malha, a partir de valores discretos de uma variável escalar, a pressão no caso em análise. Neste trabalho considera-se um esquema *cell-centered*, logo, esses valores discretos são associados ao centroide dos volumes de controle. A fim de poder aplicar um método de reconstrução do gradiente, considera-se que os valores discretos são conhecidos. Na figura 1 está ilustrada a representação da aplicação dos métodos de reconstrução.

No presente trabalho são descritos os princípios de três métodos de reconstrução do gradiente. Os resultados de alguns testes são também apresentados com o intuito de avaliar o desempenho desses métodos e com isso identificar aqueles que apresentam a melhor relação custo/benefício.

Metodologia

Os métodos de reconstrução analisados podem ser divididos em dois grupos: o primeiro se utiliza da fórmula de Green-Gauss, derivada do teorema da divergência, e o segundo emprega o princípio do método dos mínimos quadrados.

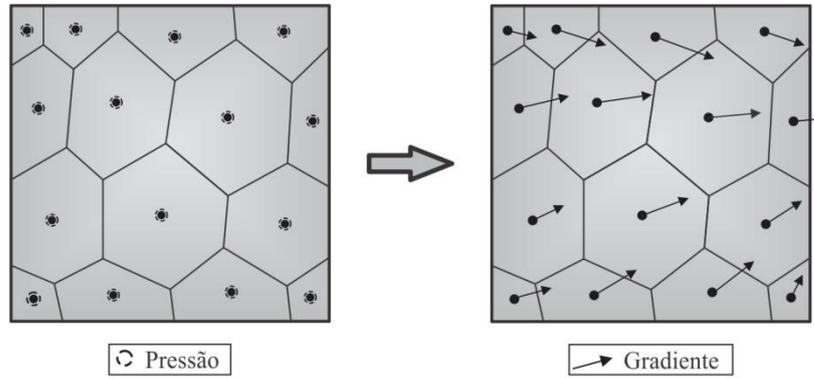


Figura 1: Representação da aplicação dos métodos de reconstrução em uma malha poligonal.

Com a fórmula de Green-Gauss, é possível determinar aproximadamente o valor do gradiente de pressão em um volume de controle arbitrário da malha através de

$$(\nabla P)_p = \frac{1}{\Delta V_p} \sum_{f \in p} P_f \Delta \mathbf{S}_f, \quad (1)$$

sendo ΔV_p o volume desta entidade da malha, P_f o valor de pressão no centroide de cada face no contorno desse volume de controle e $\Delta \mathbf{S}_f$ o vetor área de cada uma dessas faces. Vale lembrar que, como um esquema *cell-centered* é considerado, para se obter o valor da pressão no centroide da face é imprescindível realizar uma interpolação. Duas opções de interpolação são apresentadas na literatura, a primeira denominada de abordagem *cell-based* e a outra de *vertex-based*.

O primeiro método de reconstrução considerado é aquele que emprega a fórmula de Green-Gauss em conjunto com a abordagem *cell-based*. Esta abordagem se utiliza dos valores conhecidos de pressão, associados aos volumes de controle adjacentes a uma dada face, para determinar o valor da variável no centroide da face. De uma maneira geral, a expressão que caracteriza a referida abordagem pode ser escrita por

$$P_f = (1 - \beta_f)P_p + \beta_f P_n, \quad (2)$$

onde P_f , P_p e P_n são os valores de pressão no centroide da face e nos volumes de controle p e n , respectivamente. É bom ressaltar que a referida face pertence a ambos os volumes p e n .

O termo β_f , apresentado na equação anterior, é o fator de ponderação. Esse fator pode ser calculado considerando uma média ponderada pela distância através da seguinte relação

$$\beta_f = \frac{\mathbf{r}_{p,n} \cdot \mathbf{r}_{p,f}}{|\mathbf{r}_{p,n}|^2}, \quad (3)$$

sendo que $\mathbf{r}_{p,n}$ representa o vetor que conecta os centroides dos volumes de controle p e n e $\mathbf{r}_{p,f}$ representa o vetor que une os centroides da face e do volume p .

O outro método que utiliza a fórmula de Green-Gauss emprega a abordagem *vertex-based*. O seu princípio é determinar os valores de pressão no centroide das faces através de valores nos vértices destas. Para que isso seja possível, emprega-se a interpolação encontrada em [6]

$$P_v = \frac{\sum_{k=1}^{nv} w_k P_{p_k}}{\sum_{k=1}^{nv} w_k}. \quad (4)$$

Na expressão anterior, nv é o número de volumes de controle cercando um vértice da malha, P_{p_k} representa os valores de pressão associados a esses volumes e w_k representa os fatores de ponderação. A cada valor de pressão envolvido na equação (4) associa-se um fator de ponderação w_k .

Segundo o procedimento do pseudolaplaciano, proposto inicialmente por [3], o intuito é determinar os valores para esses fatores de ponderação que quando aplicados na equação (4) garantam

precisão de segunda ordem na aproximação dos valores de pressão nos vértices. Para isso, deve ser satisfeita a condição de pseudolaplaciano nulo, dada por

$$\sum_{k=1}^{nv} w_k (\mathbf{r}_{p_k} - \mathbf{r}_v) = 0, \quad (5)$$

onde \mathbf{r}_{p_k} representa o vetor posição do centroide de um volume de controle circundante ao vértice em análise e \mathbf{r}_v o vetor posição desse vértice.

De posse dos valores de pressão nos vértices da malha e sabendo que para um caso bidimensional cada face tem sempre dois vértices associados, os valores nos centroides das faces são determinados através de uma média aritmética simples. Isso se justifica já que esses centroides estão exatamente no ponto médio entre os vértices envolvidos. Determinados então os valores de pressão nos centroides das faces, basta utilizar a equação (1) para finalmente obter o vetor gradiente de pressão associado ao volume de controle que contém essas faces.

O segundo grupo dos métodos de reconstrução considerados emprega o princípio do método dos mínimos quadrados. Com este método, assume-se que há uma variação linear de pressão na vizinhança de um volume de controle. Ao considerar que essa variação se dá entre um volume de controle p e seu vizinho n_k , a pressão neste último pode ser escrita por

$$P_{n_k} \approx P_p + (\nabla P)_p \cdot \mathbf{r}_{p,n_k}, \quad (6)$$

sendo \mathbf{r}_{p,n_k} o vetor que conecta os centroides dos volumes p e n_k e cujas componentes cartesianas são Δx_k e Δy_k . A expressão é válida para $k = 1, 2, \dots, n_{vc}$, onde n_{vc} é o número de volumes vizinhos a p . O erro da aproximação anterior é de segunda ordem já que a expressão parte de uma expansão em série de Taylor truncada, em que os termos de segunda ordem e ordens mais altas foram desconsiderados.

Escrevendo a equação (6) em uma forma alternativa e a particularizando para todos os volumes de controle vizinhos a p , obtém-se um sistema linear de equações. Ao considerar uma ponderação pela distância, assim como encontrado em [5], esse sistema pode ser escrito da seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \Delta x_1 & \lambda_1 \Delta y_1 \\ \lambda_2 \Delta x_2 & \lambda_2 \Delta y_2 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_m \Delta x_m & \lambda_m \Delta y_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_p \\ \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 (P_{n_1} - P_p) \\ \lambda_2 (P_{n_2} - P_p) \\ \vdots \\ \lambda_m (P_{n_m} - P_p) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

no qual $m = n_{vc}$ e λ_k são fatores de ponderação. Esses fatores são usualmente fatores geométricos que levam em consideração a distância entre volumes de controle adjacentes. Neste trabalho, uma ponderação pelo quadrado do inverso da distância é considerada, isto é, $\lambda_k = 1/|\mathbf{r}_{p,n_k}|^2$. Com isso, tem-se que os coeficientes da matriz no lado esquerdo da equação (7) dependem apenas de fatores geométricos conhecidos. O vetor no lado direito da igualdade está também determinado, pois, conforme mencionado anteriormente, os valores de pressão associados aos volumes de controle da malha devem ser conhecidos.

Analisando o sistema linear apresentado na equação (7) percebe-se que as incógnitas serão sempre as duas componentes do vetor gradiente de pressão. Porém, o número de equações, que representa o número de volumes vizinhos ao volume p analisado, será normalmente maior que o número de incógnitas. Sistemas lineares com essa característica são denominados de sobredeterminados e podem ser resolvidos utilizando o método dos mínimos quadrados. Na literatura existem inúmeros métodos para determinar uma solução para um problema de mínimos quadrados. O método utilizado neste trabalho foi o que utiliza a fatoração QR da matriz dos coeficientes.

A fim de identificar de forma mais compacta os três métodos de reconstrução do gradiente descritos, eles serão denominados a partir de agora por siglas. GGCB representa o método de

reconstrução que emprega a fórmula de Green-Gauss com abordagem *cell-based*, GGVB representa o método de reconstrução que utiliza Green-Gauss com abordagem *vertex-based* e finalmente LS representa o método que utiliza mínimos quadrados.

Resultados e Discussão

Com os métodos apresentados, procura-se neste momento determinar qual deles apresenta o melhor comportamento com relação à precisão na aproximação do gradiente bem como com relação ao tempo computacional associado. O primeiro desses aspectos foi analisado considerando malhas poligonais ditas regulares, formadas principalmente por hexágonos do mesmo tamanho e forma, e também em malhas poligonais com algum tipo de distorção geométrica. Já o tempo computacional foi analisado somente nas malhas regulares. Exemplos dessas malhas podem ser visualizados na figura 2. A fim de analisar o comportamento do erro à medida que as malhas são refinadas, em cada um desses tipos de malha são considerados cinco graus de refino.

A estratégia considerada nos testes realizados é a de aplicar os métodos de reconstrução do gradiente a valores discretos de pressão obtidos a partir de funções analíticas. Realizando a diferenciação dessas funções obtêm-se os valores exatos dos gradientes associados a cada volume de controle da malha. De posse desses valores exatos, pode-se então mensurar o erro associado a cada método de reconstrução e analisar o seu comportamento ao se refinar progressivamente as malhas. Dessa forma pode-se estimar a ordem de convergência associada a cada método, sendo que métodos mais precisos apresentarão ordens de convergência maiores.

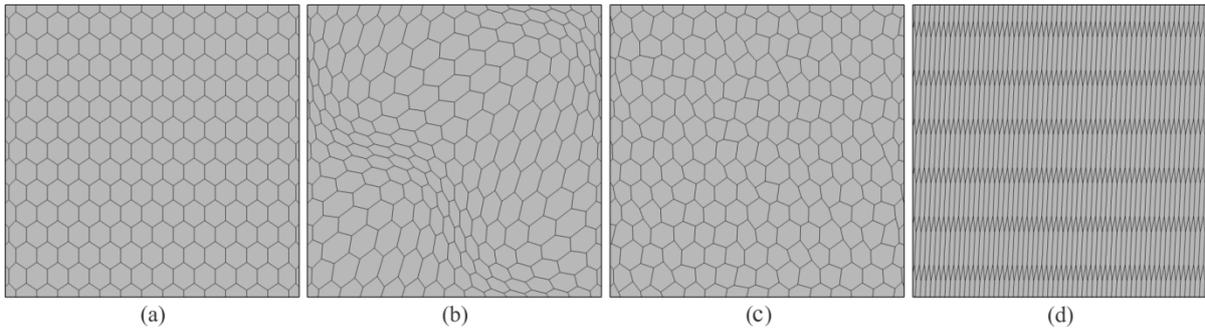


Figura 2: (a) Malha regular; (b) Malha com distorção senoidal; (c) Malha com distorção aleatória; (d) Malha com razão de aspecto alta.

Considerando que o domínio analisado é um quadrado unitário com a origem localizada no canto inferior esquerdo, as expressões das funções analíticas utilizadas, linear e oscilatória, são, respectivamente

$$P(x, y) = 5x - 3y, \quad (8)$$

$$P(x, y) = 5x - 3y + 2[\text{sen}(7x + 1)\text{sen}(4y + 1)]. \quad (9)$$

A fim de quantificar o erro na aproximação do gradiente em toda uma malha, a forma adimensional da norma L_2 deste erro foi utilizada, assim como encontrado em [4]

$$\varepsilon_{grad} = \left(\frac{\sum_{i=1}^{nc} |\nabla P_i^{num} - \nabla P_i^a|^2 \Delta V_i}{\sum_{i=1}^{nc} |\nabla P_i^a|^2 \Delta V_i} \right)^{1/2}, \quad (10)$$

onde nc e ΔV_i representam o número de volumes de controle da malha e o volume de cada uma dessas entidades. Já ∇P_i^{num} e ∇P_i^a representam o gradiente numérico e o gradiente analítico em um volume de controle específico.

Finalmente, para estimar a ordem de convergência associada a cada método, que pode ser entendida também como a taxa de caimento da norma do erro do gradiente, basta definir um comprimento característico para uma malha

$$h = \frac{\sum_{i=1}^{nc} (\Delta V_i)^{1/2}}{nc}, \quad (11)$$

com o somatório abrangendo novamente todos os volumes de controle da malha.

Os resultados obtidos com os diferentes métodos de reconstrução são apresentados em forma de gráficos $\varepsilon_{grad} \times h$. Nesses gráficos são incluídas também linhas obtidas por meio de ajustes, cuja inclinação está diretamente relacionada com a ordem de convergência de cada método. As linhas tracejadas são apenas linhas de referência incluídas para fins de comparação, que indicam quedas do erro de primeira e segunda ordem, respectivamente.

Com o primeiro conjunto de testes procurou-se verificar a influência de diferentes tipos de variação de pressão no comportamento do erro do gradiente ao empregar os três métodos de reconstrução considerados. Neste primeiro momento, somente as malhas regulares foram utilizadas.

Constatou-se através dos testes realizados com a função linear que os métodos que utilizam mínimos quadrados (LS) e Green-Gauss com abordagem *vertex-based* (GGVB) forneceram valores de gradiente exatos em todo o domínio analisado. A explicação para estes resultados pode ser encontrada em [2]. Já para o método GGCB, um erro na determinação do gradiente foi evidenciado. O valor estimado da ordem de convergência foi de 0.55 para este método de reconstrução.

Na figura 3(a) está apresentado o gráfico que mostra a redução da norma do erro considerando os valores de pressão obtidos com a função oscilatória. Como a função não é mais linear, os métodos GGVB e LS já não apresentam gradientes exatos. O valor estimado da ordem de convergência para esses dois métodos é bastante próximo. Já com o método GGCB, obtém-se os maiores valores da norma do erro e o menor valor da ordem de convergência, que é próximo a um.

O intuito nos testes a seguir apresentados é verificar a sensibilidade dos métodos aos diferentes tipos de distorção presentes nas malhas poligonais ilustradas na figura 2. Por praticidade, essas malhas serão denominadas pelas seguintes siglas: RE – malhas regulares, RA – malhas com razão de aspecto alta, DA- malhas com distorção aleatória e DS – malhas com distorção senoidal. Em todas essas malhas, o campo de pressão considerado foi obtido a partir da função oscilatória.

O gráfico da figura 3(b) apresenta o comportamento da norma do erro do gradiente ao se empregar o método GGCB. Observa-se que este método não consegue tratar de maneira adequada as malhas DA. O declínio do valor da norma do erro com o refinamento é bastante reduzido, sendo a linha de tendência uma reta praticamente horizontal. Para as demais malhas, percebe-se que há uma inclinação das linhas de tendência, porém, ela não chega sequer a aproximar-se a primeira ordem. Conforme será verificado nos próximos gráficos, os valores da norma do erro para o método GGCB são os maiores dentre os métodos analisados.

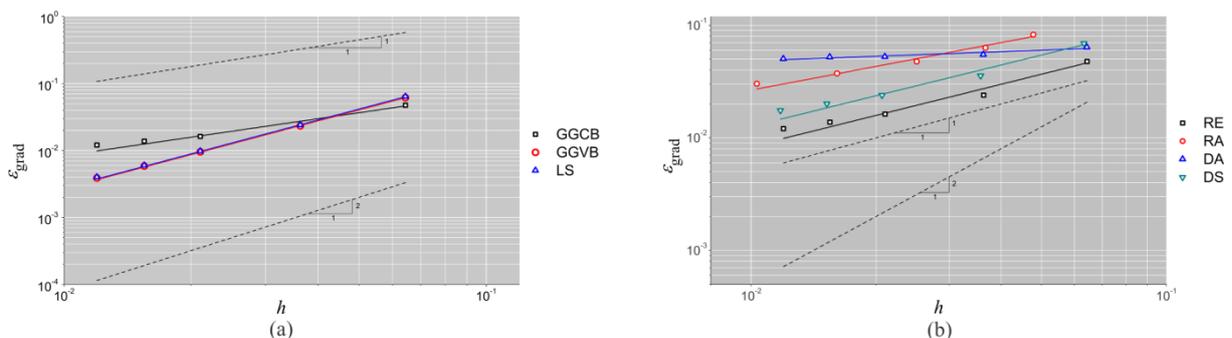


Figura 3: (a) Convergência do gradiente de pressão considerando as malhas regulares e a função oscilatória; (b) Convergência do gradiente de pressão nas diferentes malhas considerando o método GGCB.

Na figura 4(a) encontra-se o gráfico que exibe os resultados referentes ao método GGVB. O desempenho do método é mais uniforme ao variar os tipos de malhas poligonais. Os valores estimados da ordem de convergência são superiores à unidade em todos os casos. Observa-se que a dificuldade encontrada no método GGCB em tratar as malhas DA não existe mais. Com isso, pode-se concluir que o método GGVB é menos sensível às distorções nas malhas que o outro método que também emprega a fórmula de Green-Gauss.

O melhor desempenho dentre os métodos considerados é observado na figura 4(b), que corresponde ao método LS. Nota-se a insensibilidade do método com relação às distorções das malhas. Pode-se verificar que para todas as malhas as inclinações são praticamente as mesmas, variando somente o nível da norma do erro. O comportamento verificado no gráfico era esperado, pois o método não depende da geometria dos volumes de controle, e sim apenas das posições dos centroides destas entidades geométricas.

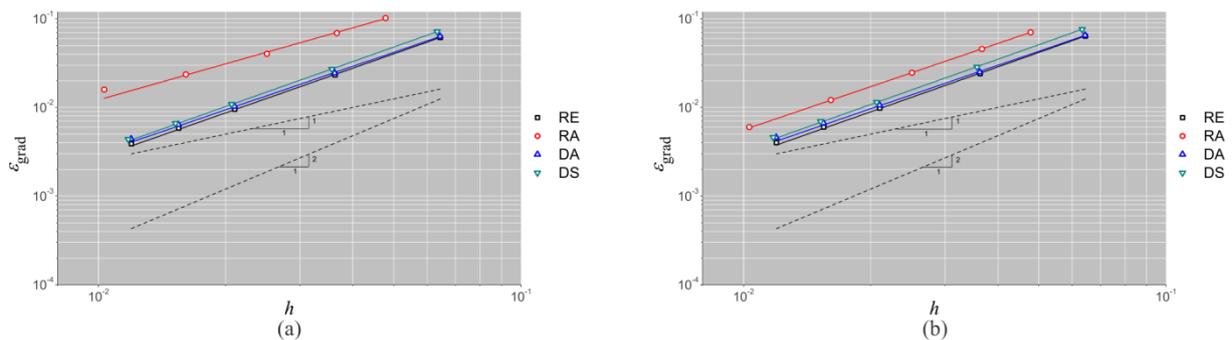


Figura 4: (a) Convergência do gradiente de pressão nas diferentes malhas considerando o método GGVB; (b) Convergência do gradiente de pressão nas diferentes malhas considerando o método LS.

Analisada a precisão dos métodos para reconstruir o gradiente, procura-se agora comparar os tempos de computação a eles associados. A comparação será feita através de gráficos de tempo versus comprimento característico da malha, considerando-se as malhas RE e a função oscilatória, apresentadas anteriormente. A fim de caracterizar o tempo computacional, foram empregados dois novos conceitos: o tempo de inicialização e o tempo de reconstrução. O primeiro deles é o tempo gasto com o cálculo de parâmetros fixos, que não se alteram na simulação, dependentes de fatores geométricos. Os fatores de ponderação β_f e w_k , presentes nas equações (2) e (4), são exemplos de parâmetros fixos. Já o tempo de reconstrução é aquele gasto nas operações de reconstrução do gradiente utilizando os parâmetros calculados na inicialização e os valores atuais de pressão. Por exemplo, o tempo de reconstrução associado ao método GGVB considera o cálculo do valor de pressão nos vértices, no centroide das faces e também a substituição desses valores na fórmula de Green-Gauss, para finalmente obter o gradiente de pressão.

Na figuras 5(a) e 5(b) são apresentados os gráficos de tempo de inicialização e reconstrução referentes aos métodos GGCB, GGVB e LS. Ao comparar os tempos de reconstrução, constata-se que não há uma diferença significativa entre esses tempos para os diferentes métodos. Essa constatação é um ponto positivo, pois isso quer dizer que os métodos mais precisos e robustos, GGVB e LS, não consomem um tempo de computação muito maior para reconstruir o gradiente. O maior custo computacional desses métodos está concentrado na fase de inicialização, assim como pode ser visto na figura 5(a). Porém, como os parâmetros calculados nessa fase são fixos, ela é executada somente uma vez e não chegará a produzir uma diferença substancial nos tempos quando os métodos de reconstrução forem aplicados à solução de equações diferenciais.

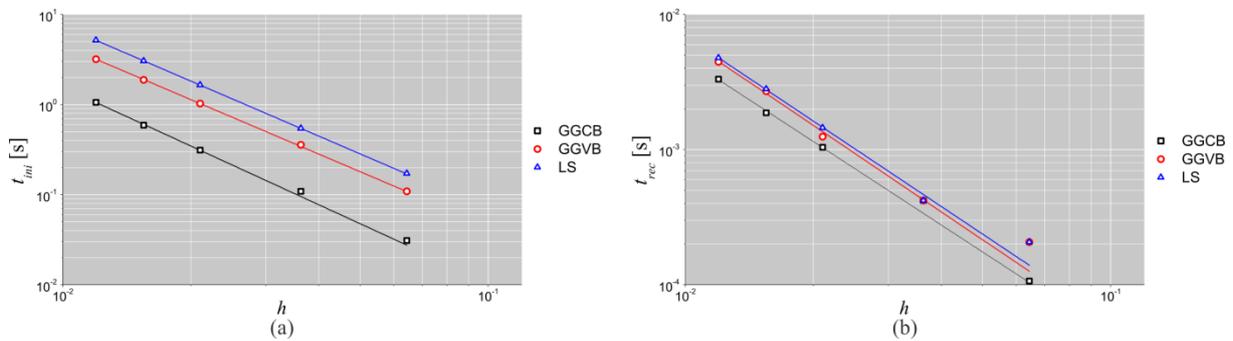


Figura 5: (a) Comparação dos tempos de inicialização dos métodos GGCB, GGVB e LS; (b) Comparação dos tempos de reconstrução dos métodos GGCB, GGVB e LS.

Conclusões

Neste trabalho foram analisados alguns métodos de reconstrução do gradiente, com o intuito de se determinar quais seriam mais adequados para uma futura aplicação na discretização de um modelo de escoamento em reservatórios.

Os métodos de reconstrução que se destacaram apresentando uma boa relação custo/benefício, isto é, bons resultados numéricos obtidos em tempos de computação razoáveis, foram: o método que emprega o princípio dos mínimos quadrados e o método que utiliza Green-Gauss com abordagem *vertex-based*. Essa superioridade é confirmada pelo fato de eles serem mais precisos, robustos e não demandarem um tempo computacional muito maior que o outro método de reconstrução analisado. Ao aplicar os métodos de reconstrução em malhas com um nível de distorção maior que os apresentados, espera-se que aquele que emprega mínimos quadrados se sobressaia, já que, conforme comentado, ele não depende da geometria dos volumes de controle da malha.

Agradecimentos

À Agência Nacional do Petróleo (ANP) pelo apoio financeiro concedido através da bolsa de estudos e aos integrantes do projeto de cooperação SIGER - II entre a Petrobrás e o Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor - SINMEC.

Referências Bibliográficas

- [1] BREZZI, F.; LIPNIKOV, K.; SHASHKOV, M.; SIMONCINI, V. **A new discretization methodology for diffusion problems on generalized polyhedral meshes.** *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pp. v. 196, pp. 3682-3692, 2007.
- [2] CERBATO, G. **Esquemas numéricos para a reconstrução do gradiente em malhas poligonais.** Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.
- [3] HOLMES, D.G.; CONNELL, S.D. **Solution of the 2D Navier-Stokes equations on unstructured adaptive grids.** *Proceedings of the AIAA 9th Computational Fluid Dynamics Conference*, Buffalo, USA, pp. 25-39, 1989.
- [4] HURTADO, F.S.V. **Formulação tridimensional de volumes finitos para a solução de reservatórios de petróleo em malhas não-estruturadas híbridas.** Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.
- [5] JAYANTA, P.A.; TURNER, I.W. **A comparison of gradient approximations for use in finite-volume computational models for two-dimensional diffusion equations.** 2001.
- [6] LEE, H.; JEONG, J.J.; CHO, H.K.; YOON, H.Y. **An improved numerical scheme to evaluate the pressure gradient on unstructured meshes for two-phase flow analysis.** *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 37, pp. 1273-1279, 2010.