

SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE ESCOAMENTO DE FLUIDO ENTRE DUAS PLACAS  
PLANAS PARALELAS COM RESTRIÇÃO DE SECÇÃO

A. A. Ulson de Souza\*, S. M. A. G. Ulson de Souza\*, C. R. Maliska\*

\* UFSC, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil

RESUMO

Neste trabalho, é apresentada a solução do problema de escoamento de fluidos entre duas placas planas paralelas com restrição de secção. Esta solução é obtida pela utilização de coordenadas generalizadas, no método de volumes finitos, com diversas malhas não ortogonais, para vários números de Reynolds, visando a análise do desempenho da formulação proposta.

1. INTRODUÇÃO

Dentro do contexto do método de volumes finitos, o desenvolvimento da metodologia em coordenadas generalizadas vem possibilitar a solução do problema físico em um domínio computacional fixo, independentemente da forma geométrica do contorno do problema de interesse, sendo o intercâmbio, entre as informações do domínio físico e computacional, feito através das métricas das transformações. O uso desta metodologia possibilita a solução de problemas com geometrias variadas através de um único programa computacional, desenvolvido para um domínio retangular fixo [1].

Para a obtenção das equações de conservação discretizadas, é necessária a utilização de função de interpolação para a avaliação das variáveis nas faces do volume de controle. O esquema híbrido, desenvolvido por Spalding [2], foi proposto visando agrupar as vantagens dos esquemas CDS e UDS. Baseando-se neste trabalho, foi proposto o esquema exponencial (EDS), por Raithby e Torrance [3]. Estes esquemas se reduzem ao UDS ou CDS, dependendo da faixa do número de Reynolds ou Peclet de interesse. Outras funções de interpolação também são amplamente empregadas, seguindo esta mesma idéia básica, como por exemplo, o esquema WUDS, descrito por Raithby [4], ou o esquema "power law", proposto por Patankar [5].

A falsa difusão pode ser substancialmente reduzida através do uso do esquema de diferenciação "skew upwind", proposto por Raithby [6]. Entretanto, este procedimento produz oscilação na solução através da introdução de coeficientes negativos na equação de conservação discretizada.

Leonard [7,8] propôs um esquema em diferenças finitas baseado na interpolação a montante quadrática, o qual reduz consideravelmente os problemas de coeficientes negativos. Entretanto este esquema é sensivelmente mais complexo para ser implementado. Hassan et al. [9] propuseram um procedimento numérico que evita o problema de coeficientes negativos, pela restrição da faixa do fator peso, de modo que sua influência nos coeficientes impossibilita que estes tornem-se negativos. Este procedimento é baseado fundamentalmente em uma restrição matemática sobre o fator peso a montante e é diretamente aplicado somente no contexto de diferenças finitas.

Hughes e Brooks [10] propuseram um esquema "upwind" ao longo das linhas de fluxo, objetivando a minimização da falsa difusão, mas este procedimento, assim como os anteriormente citados acima, não está baseado em balanços a nível de volume de controle, e isto faz com que a característica, fortemente desejável de garantir a conservação em todas as células da malha, seja violada.

Um novo esquema proposto por Baliga et al. [11], baseado em volume de controle, reduz significativamente a difusão numérica. Entretanto este esquema

apresenta problemas de coeficientes negativos, limitando a sua aplicação a elementos finitos triangulares.

Patel et al. [12] apresenta um esquema "upwind", sendo que a atenção, no cálculo de  $\phi$ , é concentrada nos vértices dos volumes de controle, ao invés das faces do volume de controle, como o esquema apresentado por Raithby [6]. A idéia básica é distribuir os fluxos de massa e propriedades transportadas de acordo com o ângulo entre a abscissa e o vetor velocidade.

2. AVALIAÇÃO DAS VARIÁVEIS NAS FACES DO VOLUME DE CONTROLE

A escolha da estratégia a ser adotada para a realização das aproximações nas faces do volume de controle é um fator de grande importância para assegurar a estabilidade e a precisão do esquema numérico. No presente trabalho será usada uma função de interpolação com suporte nas leis de conservação, levando em conta os efeitos difusivos, convectivos e a influência do termo fonte e de pressão. Esta função é obtida escrevendo-se a equação da conservação da quantidade de movimento para a face do volume de controle, como apresentada a seguir.

A equação (1) escrita para a face leste do volume de controle, considerando-se estado estacionário e malhas quasi-ortogonais,  $\beta = 0$ , resulta

$$\rho U_e \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - C_{1e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + B^*e = 0 \tag{1}$$

onde  $B^*e$  é dado pela equação

$$B^*e = \hat{P}^*e - C_{4e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \rho U_e \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \hat{S}^*e \tag{2}$$

Esta equação diferencial ordinária de segunda ordem, unidimensional, contém as informações dos termos difusivo e convectivo na direção  $\eta$ , pressão e a influência do termo fonte no coeficiente  $B^*e$ .

Adimensionalizando-se a equação (1) chega-se a

$$-Pe^*e \frac{\partial \phi}{\partial \xi^*} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^{*2}} + B^*e = 0 \tag{3}$$

cuja solução, relativamente à face leste, é

$$\phi = F_1 + F_2 \exp \left( P^*e \xi^* \right) + \frac{B^*e}{P^*e} \xi^* \tag{4}$$

O parâmetro  $Pe^*e$  é o número de Peclet, avaliado na face leste do volume de controle. Escrevendo-se a equação (4), para a face leste do volume de controle, obtém-se

$$\phi_e = \phi_P \frac{\left\{ e^{Pe^*e} - e^{(Pe^*e/2)} \right\}}{e^{Pe^*e} - 1} + \phi_E \frac{\left\{ e^{Pe^*e/2} - 1 \right\}}{e^{Pe^*e} - 1} + B^*e \left\{ \left[ \frac{-e^{(Pe^*e/2)}}{e^{Pe^*e} - 1} \right] + \frac{1}{2} \right\} \frac{1}{P^*e} \tag{5}$$

Fazendo-se a aproximação do termo fonte, utilizando diferenças centrais, obtém-se a seguinte equação:

$$B^*e = \frac{-\hat{P}^*e}{C_{1e}} + \frac{1}{C_{1e}} \left( \frac{\hat{S}^*u|_P + \hat{S}^*u|_E}{2} \right) + \frac{C_{4e}}{2C_{1e}} (\phi_N + \phi_{NE} + \phi_S + \phi_{SE} - 2\phi_P - 2\phi_E) - \frac{\rho V_e}{2C_{1e}} (\phi_N + \phi_{NE} - \phi_S - \phi_{SE}) \tag{6}$$

3. ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS PLANAS E PARALELAS COM RESTRIÇÃO DE SECÇÃO

O problema resolvido é o escoamento bidimensional de um fluido incompressível e isotérmico com propriedades físicas constantes entre duas placas planas paralelas de largura infinita, com restrição de secção. A escolha deste problema tem como objetivo a análise do desempenho da formulação proposta, em coordenadas generalizadas para o caso de malhas não ortogonais e não igualmente espaçadas. Em virtude da restrição de secção existente neste problema, os efeitos da pressão são marcantes, sendo portanto analisada a influência do gradiente de pressão na função de interpolação proposta.

O desenho esquemático deste problema, apresentando os parâmetros geométricos, é mostrado na FIGURA 1, onde  $2H = 0,0191$  m,  $L = 0,05$  m,  $Zh = 0,0102$  m. Peric et al. [13]. resolvem um problema semelhante utilizando as mesmas condições geométricas.

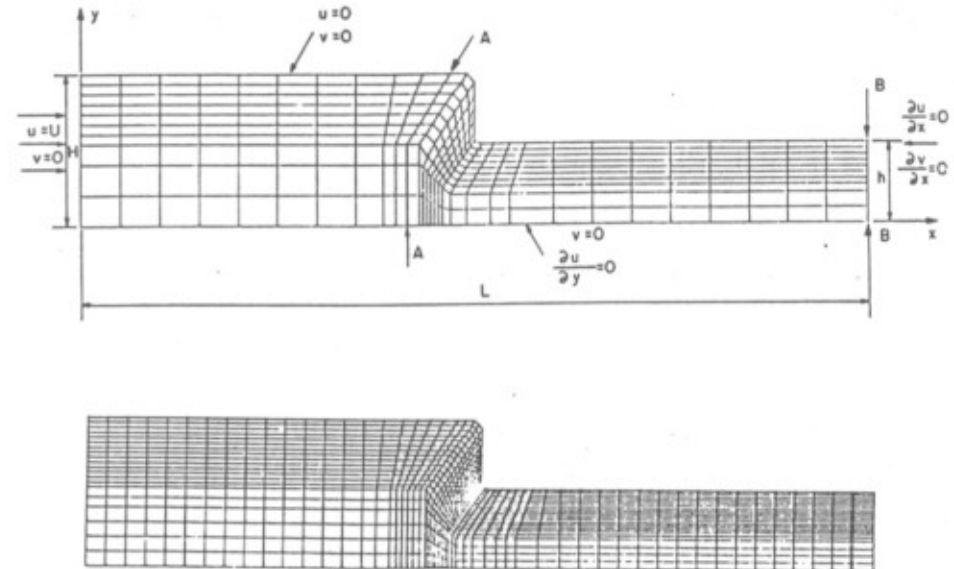


FIGURA 1 - Esquema de escoamento entre duas placas planas paralelas com restrição de secção, com malhas 10x30 e 20x60.

As paredes superior e inferior são impermeáveis, sendo a condição de entrada, em  $x = 0$ , dada por um escoamento com velocidade constante,  $U$ , unitária e a condição de saída é parabólica. Devido à simetria do problema, será feito um corte longitudinal e resolvida somente a metade do domínio de cálculo, sendo prescrita derivada nula para a velocidade no contorno sul.

Na solução deste problema foram empregadas malhas não uniformes e não ortogonais, com diferentes tamanhos de malha como  $10 \times 30$ ,  $20 \times 60$  e  $40 \times 120$ . O número de Reynolds para este problema é definido com base em  $U$  e no parâmetro geométrico igual a  $2H$ .

Os resultados numéricos ao longo da secção B-B, obtidos com malha  $10 \times 30$ ,  $Re = 400$ , como a formulação proposta, com o esquema WUDS e com a imposição do gradiente de pressão nulo na função de interpolação são apresentados na FIGURA 2, onde a linha contínua representa os resultados obtidos com malha bastante refinada,  $40 \times 120$ . Na FIGURA 3, são apresentados os resultados obtidos com estes esquemas, com malha  $20 \times 60$ . Os resultados obtidos, para  $Re = 1000$ , ao longo da secção B-B, com malhas  $10 \times 30$  e  $20 \times 60$  são apresentados nas FIGURAS 4 e 5, respectivamente.

Observa-se nas FIGURAS 2 e 3 que os resultados obtidos utilizando-se a malha  $10 \times 30$  apresentam maior discrepância do que os obtidos com malha  $20 \times 60$ , com relação à solução obtida com a malha  $40 \times 120$ . Este comportamento é mais evidente nos resultados apresentados nas FIGURAS 4 e 5, devido ao aumento do número de Peclet da malha.

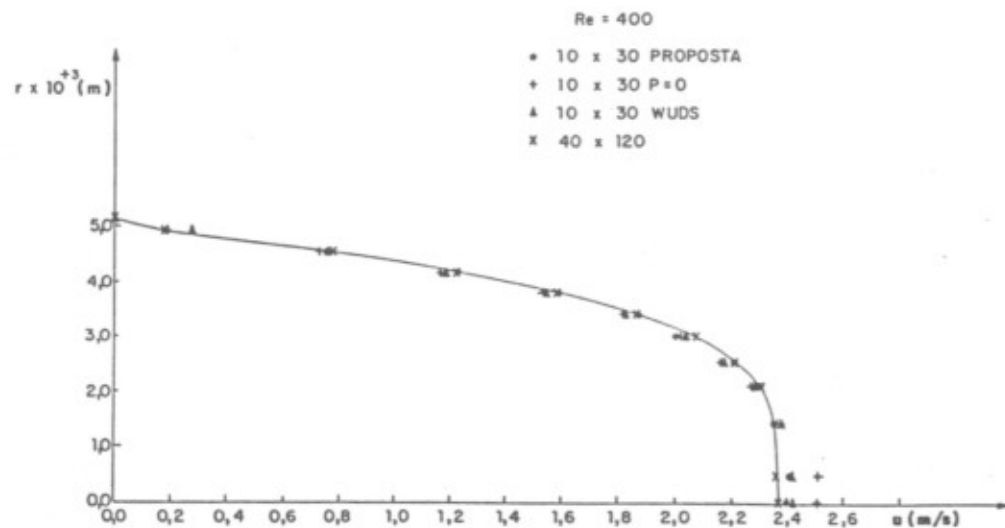


FIGURA 2 - Resultados numéricos obtidos com a formulação proposta, ao longo da secção B-B com  $Re = 400$ , para a malha  $10 \times 30$ .

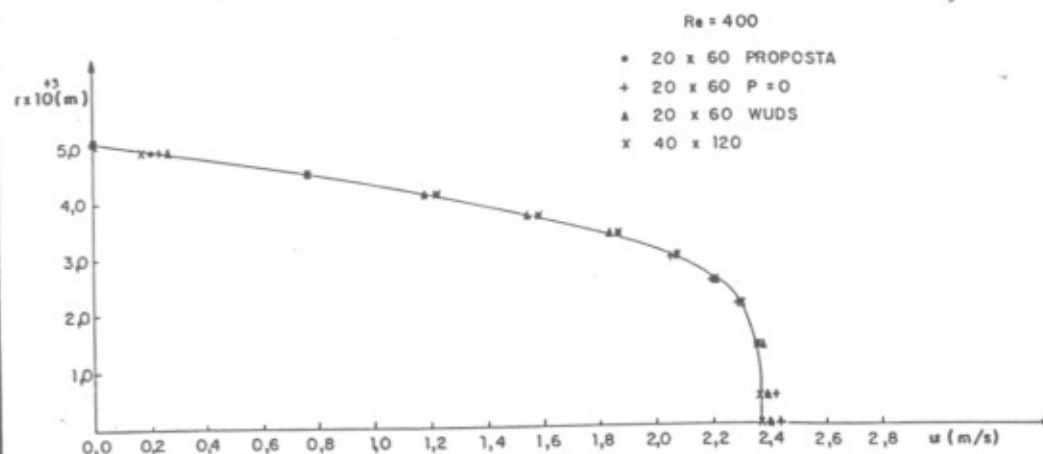


FIGURA 3 - Resultados numéricos obtidos ao longo da secção B-B com  $Re = 400$ , para a malha  $20 \times 60$ .

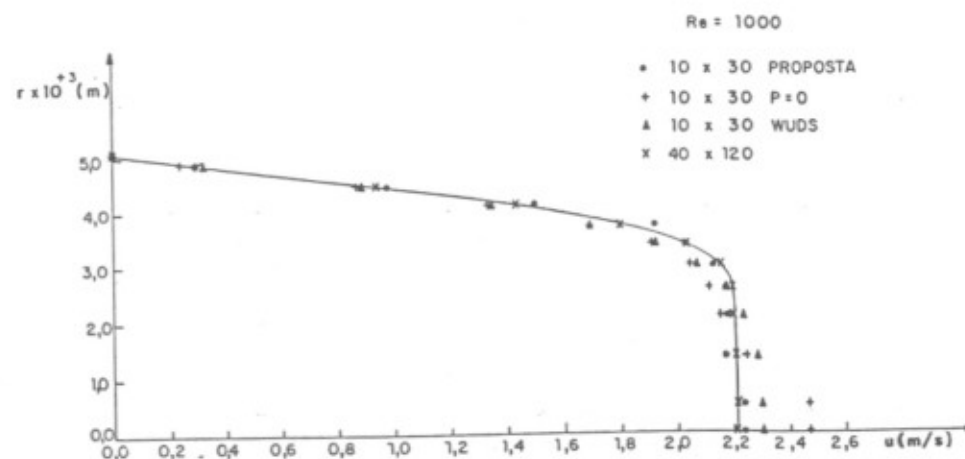


FIGURA 4 - Resultados numéricos obtidos ao longo da secção B-B, com  $Re = 1000$ , para a malha  $10 \times 30$ .

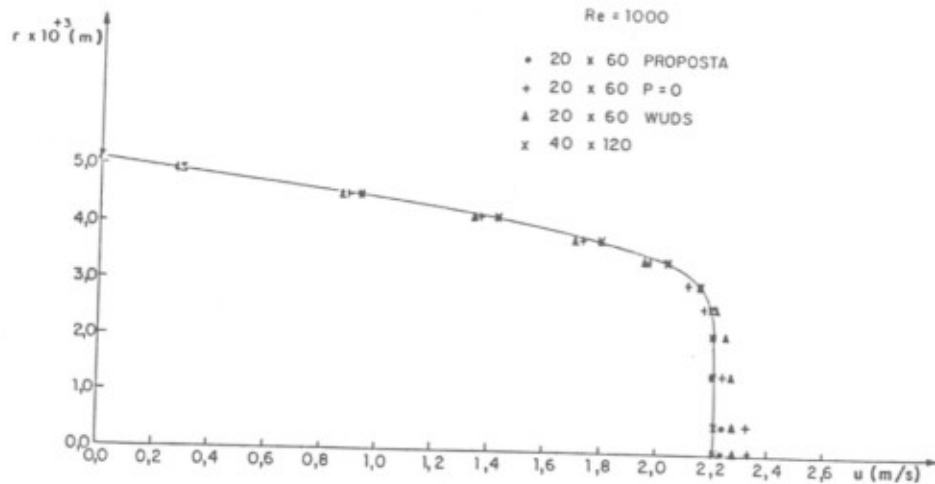


FIGURA 5 - Resultados numéricos obtidos ao longo da secção B-B, com  $Re = 1000$ , para a malha  $20 \times 60$ .

Os erros relativos máximos com relação à velocidade máxima, obtidos neste trabalho, com o esquema WUDS e a imposição do gradiente de pressão nulo na função de interpolação, tendo como referência a solução obtida com a malha  $40 \times 120$ , ao longo da secção B-B, são apresentados nos QUADRO 1 e QUADRO 2, para os casos de  $Re = 400$  e  $1000$ , respectivamente.

QUADRO 1 - Erros relativos máximos obtidos para a secção B-B no escoamento entre placas paralelas com restrição de secção, com  $Re = 400$ .

| FORMULAÇÃO | MALHA | ERRO REL. MAX. (%) |
|------------|-------|--------------------|
| PROPOSTA   | 10x10 | 3,0                |
|            | 20x60 | 1,5                |
| P = 0      | 10x30 | 6,5                |
|            | 20x60 | 2,5                |
| WUDS       | 10x30 | 3,0                |
|            | 20x60 | 4,0                |

QUADRO 2 - Erros relativos máximos obtidos para a secção B-B, no escoamento entre placas paralelas com restrição de secção, com  $Re = 1000$ .

| FORMULAÇÃO | MALHA | ERRO REL. MAX. (%) |
|------------|-------|--------------------|
| PROPOSTA   | 10x10 | 4,5                |
|            | 20x60 | 1,0                |
| P = 0      | 10x30 | 11,0               |
|            | 20x60 | 5,5                |
| WUDS       | 10x30 | 4,5                |
|            | 20x60 | 4,0                |

Analisando-se as FIGURAS 2 e 3, bem como o QUADRO 1, para  $Re = 400$ , verifica-se que os resultados obtidos com o esquema WUDS apresentam maior discrepância comparativamente aos obtidos com o esquema proposto. Este comportamento também é encontrado no caso de  $Re = 1000$ , conforme mostram as FIGURAS 4 e 5, bem como o QUADRO 2.

Os resultados obtidos impondo-se o gradiente de pressão nulo na função de interpolação proposta apresentam uma grande discrepância com relação aos resultados obtidos com malha  $40 \times 120$ , comparativamente aos obtidos neste trabalho, para ambos os números de Reynolds estudados, mostrando a grande importância da presença do gradiente de pressão na função de interpolação.

#### 4. CONCLUSÃO

Neste problema estudado, a formulação proposta apresentou bom desempenho sem problemas de convergência, para os casos de malha e números de Reynolds estudados. Considerando-se que as malhas utilizadas para a obtenção das soluções são não uniformes e não ortogonais, neste problema pode testar-se com sucesso a formulação em coordenadas generalizadas.

A função de interpolação proposta tem a vantagem de ser baseada exclusivamente nas equações de conservação, sem utilização de funções peso, que não possuem fundamentação física consistente. A função de interpolação proposta preserva no termo fonte a influência dos termos convectivo, difusivo e de pressão, remanentes da equação de conservação.

A função de interpolação proposta é simples, de fácil implementação, sendo obtida a partir da equação diferencial que se deseja resolver, contendo todas as influências físicas relevantes para a avaliação das variáveis nas faces do volume de controle.

#### 5. BIBLIOGRAFIA

- Maliska, C.R., A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canadá, 1981.

- 2 Spalding, D.B., A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives, Int. Journal Num. Meth. Eng., 4, pp. 551-559, 1972.
- 3 Raithby, G.D. and Torrance, K.E., Upstream-Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computers and Fluids, 2, pp. 191-206, 1974.
- 4 Raithby, G.D., Prediction of Dispersion by Surface Discharge, Basin Investigation and Modelling Section, Canada Centre for Inland Waters, Burlington, Ontario Canada, 1976.
- 5 Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Cooperation, Washington, DC., USA, 1980.
- 6 Raithby, G.D., Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow, Comp. Meth. Applied Mech. Eng., 9, pp. 153-164, 1976.
- 7 Leonard, B.P., A Survey of Finite Differences of Opinion on Numerical Muddling of the Incomprehensible Defective Confusion Equation, in T.J.R. Hughes (ed.), Proc. Symp. Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, ASME Winter Ann. Mtg., New York, pp. 1-17, 1979.
- 8 Leonard, B.P., A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 19, pp. 59-98, 1979.
- 9 Hassan, Y.A., Rice, J.G. and Kim, J.H., A Stable Mass-Flow-Weighted Two-Dimensional Skew Upwind Scheme, Numer. Heat Transfer, 6, N<sup>o</sup> 4, pp. 395-408, 1983.
- 10 Hughes, T.J.R., and Brooks, A., A Multi-Dimensional Upwind Scheme with No Crosswind Diffusion, in T.J. Hughes (ed.), Proc. Symposium Finite Element Methods for Convection Dominate Flows, ASME Winter Ann. Mtg., New York, pp. 19-35, 1979.
- 11 Baliga, B.R., Pham, T.T. and Patankar, S.V., Solution of Some Two-Dimensional Incompressible Fluid Flow and Heat Transfer Problems, Using a Control Volume Finite Element Method, Numer. Heat Transfer, 6, N<sup>o</sup> 3, pp. 263-282, 1983.
- 12 Patel, M.K., Markatos, N.C. and Cross, M., Method of Reducing False-Diffusion Errors in Convection-Diffusion Problems, Technical Note, Appl. Math. Modelling, 9, pp. 302-306, 1985.
- 13 Peric, M. Kessler, R. Scheuerer, G., Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids, Submitted to Computers and Fluids, # 87-114, 1987.

## SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONVECÇÃO FORCADA EM UMA CAVIDADE COM ENTRADA E SAÍDA DE MASSA

S.M.A.G. Ulson de Souza\*, A.A. Ulson de Souza\*, C.R. Maliska\*

\* UFSC, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil

### RESUMO

Neste trabalho é apresentada a solução obtida pela utilização do método de volumes finitos do problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada, com a imposição de um termo fonte na equação da conservação de quantidade de movimento, com entrada e saída de massa. Na literatura, é apresentada a solução analítica deste problema sendo utilizada para confrontação com os resultados numéricos obtidos.

### 1. INTRODUÇÃO

A maioria dos métodos numéricos pode ser derivada do método de resíduos ponderados. O método de diferenças finitas [1,2] resulta quando a função peso escolhida é a função delta, centrada no ponto P. O método clássico de elementos finitos de Galerkin [3,4,5] utiliza, como função peso, as funções tentativas do problema. O método de volumes finitos [1,2,6,7] utiliza a função peso unitária para o volume de controle centrado em P e nula para o restante do domínio de integração. Desde que os métodos discretos mais empregados diferem somente na escolha da função peso e desde que nenhum único peso fornecerá sempre valores das variáveis mais precisos ou equações mais fáceis para solução, pode dizer-se que nenhum método discreto é inerentemente superior a outro [8].

A minimização do resíduo, no método de volumes finitos, é equivalente a satisfazer o balanço de conservação das variáveis do problema sobre cada volume de controle. Quando não ocorrer sobreposição do volume de controle com seus vizinhos, será fácil criar um conjunto de equações discretas que satisfaçam o balanço global de conservação. A garantia de que os princípios de conservação serão satisfeitos, a nível elementar e global, é que torna o método de volumes finitos atrativo. Além disto, provavelmente, o grande impulso observado no desenvolvimento de métodos numéricos, para solução de problemas que envolvem escoamento de fluidos, aconteceu quando a concepção dos algoritmos começou a ser fundamentada na fenomenologia física do problema em questão. As dificuldades associadas ao acoplamento e às não linearidades das equações foram sempre alvo dos trabalhos dos pesquisadores, o que ocasionou um grande avanço na área.

### 2. ARRANJO DE VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS VERSUS DESENCONTRADAS

A importância da escolha adequada da disposição das variáveis na malha computacional deve ser enfatizada devido às consequências desta escolha na forma das equações discretizadas, facilidade e precisão de solução. Um estudo das alternativas de localização das variáveis dependentes na malha, para sistemas de coordenadas generalizadas, pode ser encontrado nos trabalhos de Maliska [7], de Shih, Tan e Hwang [9] e, mais recentemente, no trabalho de Silva [10].

A FIGURA 1a apresenta a configuração de variáveis co-localizadas ("colocated"), onde todas as variáveis dependentes estão armazenadas no mesmo ponto, possuindo todas o mesmo volume elementar, enquanto que, na FIGURA 1b, é mostrado o arranjo de variáveis desencontradas ("staggered"), onde as componentes da velocidade estão defasadas em relação a outras variáveis do