

## ARRANJO DE VARIÁVEIS CO-LOCALIZADAS NO MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

*Selene Maria de Arruda Guelli Ulson de Souza*

Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Engenharia Química  
C.P. 476 - Florianópolis - SC - Brasil

*Clóvis Raimundo Maliska*

Universidade Federal de Santa Catarina  
Departamento de Engenharia Mecânica  
C.P. 476 - Florianópolis - SC - Brasil

### RESUMO

Uma nova formulação, empregando o arranjo de variáveis co-localizadas no método de volumes finitos, é apresentada neste trabalho, visando a necessidade de menor memória computacional e facilidade de manipulação dos índices dos volumes de controle das variáveis relevantes do problema em estudo. Para avaliação das propriedades nas faces do volume de controle, foi proposto um esquema que leva em conta a correta influência física das variáveis localizadas nos pontos vizinhos, sobre as variáveis localizadas nas faces do volume de controle, obtido através da utilização das próprias equações de conservação. Os resultados obtidos pela utilização da metodologia proposta foram comparados com resultados obtidos com malhas bastante refinadas, apresentados na literatura.

## NOMENCLATURA

- $a_i$  - coeficientes da equação discretizada, que multiplica  $\phi_i$
- $a_i^1$  - coeficientes da equação discretizada, obtida para a face  $i$ , que multiplica  $\phi_i$
- $b^\phi$  - termo fonte da equação discretizada
- $C_1$  - variável definida pela equação (6), [M/(Lt)]
- $C_2$  - variável definida pela equação (7), [M/(Lt)]
- $C_3$  - variável definida pela equação (8), [M/(Lt)]
- $g_x$  - componente da força de campo por unidade de massa, na direção x, [L/t<sup>2</sup>]
- $g_y$  - componente da força de campo por unidade de massa, na direção y, [L/t<sup>2</sup>]
- $J$  - jacobiano da transformação
- $L$  - largura da cavidade quadrada, [L]
- $\dot{m}$  - vazão mássica do fluido, [M/t]
- $P$  - pressão nas equações de Navier-Stokes, [M/(Lt<sup>2</sup>)]
- $P^\phi$  - gradiente de pressão na equação (4), [M/(L<sup>2</sup>t<sup>2</sup>)]
- $\hat{P}^\phi$  - variável definida pela equação (5), [M/(L<sup>2</sup>t<sup>2</sup>)]
- $Re$  - número de Reynolds, onde  $Re = \rho UL/\mu$
- $S^\phi$  - termo fonte das equações de conservação, [M $\phi$ /(L<sup>3</sup>t)]
- $\hat{S}^\phi$  - variável definida pela equação (5), [M $\phi$ /(L<sup>3</sup>t)]
- $t$  - tempo, [t]
- $u$  - componente da velocidade na direção x, no sistema cartesiano, [L/t]
- $U$  - componente contravariante da velocidade, sem normalização métrica, [L/t]
- $U$  - velocidade de movimentação da placa superior da cavidade quadrada, [L/t]

- $v$  - componente da velocidade na direção y, no sistema cartesiano, [L/t]
- $V$  - componente contravariante da velocidade, sem normalização métrica, [L/t]
- $\mathbf{V}$  - vetor velocidade do fluido, [L/t]
- $x$  - coordenada do sistema cartesiano, [L]
- $y$  - coordenada do sistema cartesiano, [L]
- $\alpha$  - componente do tensor métrico da transformação
- $\beta$  - componente do tensor métrico da transformação
- $\gamma$  - componente do tensor métrico da transformação
- $\Gamma^\phi$  - difusividade relativa à variável  $\phi$ , multiplicada pela massa específica do fluido, [M/(Lt)]
- $\eta$  - coordenada do sistema generalizado, [L]
- $\mu$  - viscosidade dinâmica do fluido, [M/(Lt)]
- $\xi$  - coordenada do sistema generalizado, [L]
- $\rho$  - massa específica do fluido, [M/L<sup>3</sup>]
- $\phi$  - campo escalar geral

## INTRODUÇÃO

Na solução de problemas de escoamento de fluido envolvendo as equações de Navier-Stokes, um grande avanço foi conseguido com o uso de malhas desencontradas, em virtude dos pontos de pressão estarem localizados nas faces do volume de controle para o balanço de conservação de quantidade de movimento, proporcionando o acoplamento adequado entre os campos de pressão e velocidade.

Hoje, praticamente, todos os códigos computacionais existentes utilizam as variáveis dependentes localizadas de uma maneira desencontrada na malha, pois as vantagens, do ponto de

vista de estabilidade do método, considerando-se o problema de oscilação no campo de pressão ("checkerboard"), conforme Patankar [1], são fundamentais.

A malha desencontrada introduziu, porém, com relação à programação computacional, maior complexidade no controle dos índices dos respectivos volumes de controle das variáveis, uma vez que os volumes para as velocidades e pressões não são coincidentes, bem como, necessidade de maior capacidade de memória para armazenamento das informações geométricas, principalmente no escoamento tridimensional de fluidos em geometrias arbitrárias.

Com a necessidade da solução de problemas cada vez mais complexos, o esforço extra no uso da configuração de variáveis desencontradas torna-se considerável. Para eliminar esta dificuldade, o caminho natural é voltar à formulação inicial e localizar todas as variáveis dependentes no mesmo ponto, sendo, portanto, todos os volumes de elementos coincidentes. Para o arranjo de variáveis co-localizadas, que apresenta um único conjunto de volumes de controle, os coeficientes nas equações discretizadas para as duas componentes da velocidade são idênticos. Quando outras variáveis estiverem envolvidas (temperatura, concentração, energia cinética turbulenta, taxa de dissipação de energia cinética, etc.) a parte convectiva dos coeficientes permanecerá a mesma para todas as variáveis.

A contribuição deste trabalho é a proposição de uma nova função de interpolação, obtida das equações de conservação, em substituição às funções de interpolação que ponderam a predominância da convecção e difusão, utilizando somente os dois pontos vizinhos à face do volume de controle, independente da direção do vetor velocidade.

Os estudos deste assunto estão sendo iniciados agora a nível internacional e representam uma importante contribuição ao desenvolvimento de métodos robustos, gerais e simples para a solução de problemas de Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Em 1981, Hsu [2], Prakash [3], Rhie [4] publicaram as primeiras aplicações do método de volumes finitos, para a solução de problemas de escoamento de fluido com coordenadas não ortogonais e com arranjo de variáveis co-localizadas. Estes trabalhos não foram muito difundidos em virtude do arranjo de variáveis co-localizadas ser considerado impraticável devido ao problema do campo oscilatório de pressão.

Recentemente, Baliga e Patankar [5], Schneider e Zedan [6] aplicaram, no método de elementos finitos, os princípios de conservação em volumes de controle, sendo que os primeiros utilizaram elementos triangulares, e os últimos, elementos quadriláteros. Para o transporte escalar, um novo esquema "upwind" foi introduzido na formulação de elementos finitos por Schneider e Raw [7].

Nos trabalhos publicados por Schneider e Raw [8,9], foi proposta uma nova alternativa para a avaliação das propriedades nas faces dos volumes de controle, obtida a partir da própria equação de conservação. Nestes trabalhos, mesmo no contexto de elementos finitos, foi garantida a conservação das variáveis relevantes do problema, a nível elementar.

No método de volumes finitos, Peric et al. [10], Camarero et al. [11], Schneider [12] e Majumdar [13] utilizaram o arranjo de variáveis co-localizadas, para a solução de problemas envolvendo escoamento de fluidos incompressíveis, sendo apresentadas diversas

propostas para avaliação das propriedades nas faces dos volumes de controle.

## FORMULAÇÃO PROPOSTA

### Equações Governantes

As equações de conservação da massa e quantidade de movimento, escritas no sistema de coordenadas cartesianas, considerando-se fluido newtoniano, escoamento laminar e bidimensional, podem ser expressas por

Equação da conservação da massa:

$$\partial \rho / \partial t + \partial(\rho u) / \partial x + \partial(\rho v) / \partial y = 0 \quad (1)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção x :

$$\begin{aligned} \partial(\rho u) / \partial t + \partial(\rho u u) / \partial x + \partial(\rho v u) / \partial y = & - \partial P / \partial x + \rho g_x + \\ & + \partial(\mu \partial u / \partial x) / \partial x + \partial(\mu \partial u / \partial y) / \partial y - \partial(2\mu(\nabla \cdot V) / 3) / \partial x + \\ & + \partial(\mu \partial u / \partial x) / \partial x + \partial(\mu \partial v / \partial x) / \partial y \end{aligned} \quad (2)$$

Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção y :

$$\begin{aligned} \partial(\rho v) / \partial t + \partial(\rho u v) / \partial x + \partial(\rho v v) / \partial y = & - \partial P / \partial y + \rho g_y + \\ & + \partial(\mu \partial v / \partial x) / \partial x + \partial(\mu \partial v / \partial y) / \partial y - \partial(2\mu(\nabla \cdot V) / 3) / \partial y + \\ & + \partial(\mu \partial u / \partial y) / \partial x + \partial(\mu \partial v / \partial y) / \partial y \end{aligned} \quad (3)$$

As equações (1), (2) e (3) podem ser escritas, para uma variável genérica  $\phi$ , como

$$\begin{aligned} \partial(\rho \phi) / \partial t + \partial(\rho u \phi) / \partial x + \partial(\rho v \phi) / \partial y + P^\phi = \\ \partial(\Gamma^\phi \partial \phi / \partial x) / \partial x + \partial(\Gamma^\phi \partial \phi / \partial y) / \partial y + S^\phi \end{aligned} \quad (4)$$

onde as variáveis  $\phi$ ,  $P^\phi$ ,  $S^\phi$  e  $\Gamma^\phi$  possuem expressões específicas em cada uma das equações de conservação. A equação (4) se reduz à

equação da conservação da massa quando  $S^\phi$  e  $P^\phi$  forem iguais a zero e  $\phi = 1$ . As componentes da equação da conservação da quantidade de movimento nas direções x e y são obtidas fazendo-se  $\phi$  igual a u e v, respectivamente, com os termos fonte e de pressão apropriados. O termo  $P^\phi$  representa o gradiente de pressão quando  $\phi$  representar uma das componentes da velocidade. A variável  $\Gamma^\phi$  é o coeficiente de transporte que é dado pelo produto entre a difusividade relativa à variável  $\phi$  e a massa específica do fluido.

### Transformação das Equações

A solução das equações de conservação, escritas no sistema cartesiano de coordenadas, utilizando-se a discretização cartesiana poderá apresentar sérios problemas quando da aplicação das condições de contorno, uma vez que as fronteiras dos volumes elementares podem não ser coincidentes com a fronteira do problema físico em questão.

Visando a obtenção de uma maior flexibilidade da formulação para tratamento de problemas em geometrias arbitrarias, a equação de conservação, escrita no sistema cartesiano de coordenadas, equação (4), é transformada para o sistema de coordenadas generalizadas (  $\xi, \eta$  ), que se adaptam à fronteira, fornecendo

$$\begin{aligned} [\partial(\rho \phi) / \partial t] / J + \partial(\rho U \phi) / \partial \xi + \partial(\rho V \phi) / \partial \eta + \hat{P}^\phi = \\ \partial(C_1 \partial \phi / \partial \xi + C_2 \partial \phi / \partial \eta) / \partial \xi + \partial(C_3 \partial \phi / \partial \eta + C_2 \partial \phi / \partial \xi) / \partial \eta + \hat{S}^\phi \end{aligned} \quad (5)$$

onde U e V são as componentes contravariantes do vetor velocidade, sem normalização métrica e J é o jacobiano da transformação. Os

termos  $\hat{P}^\phi$  e  $\hat{S}^\phi$  são os termos  $P^\phi$  e  $S^\phi$  transformados para o novo sistema de coordenadas (  $\xi, \eta$  ).

Os coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são os coeficientes de transporte transformados, expressos por

$$C_1 = \Gamma^{\phi} J \alpha \quad (6)$$

$$C_2 = -\Gamma^{\phi} J \beta \quad (7)$$

$$C_3 = \Gamma^{\phi} J \gamma \quad (8)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as componentes do tensor métrico da transformação.

### Discretização das Equações

A equação (5) é utilizada para a obtenção da equação discretizada, através da realização de uma integração espacial e temporal sobre o volume de controle delimitado por duas linhas de  $\xi$  constante e duas linhas de  $\eta$  constante. A variável  $\phi$  é armazenada no centro do volume de controle.

As hipóteses admitidas para a realização da integração da equação (5) são:

- $(\rho\phi)$  e  $\hat{S}^{\phi}$  são constantes no volume de controle.
- os fluxos de massa nas faces leste, oeste, norte e sul do volume de controle,  $\phi$  na face e sua derivada normal à face, as métricas,  $\Gamma^{\phi}$  e a pressão nas faces são uniformes ao longo de cada face.
- o jacobiano da transformação não varia com o tempo, já que a malha permanece fixa ao longo de todo processo de solução.

Introduzindo-se as hipóteses enunciadas acima na equação (5), obtém-se

$$\left[ (\rho\phi)_p \quad -(\rho\phi)_p^0 \right] \Delta\xi\Delta\eta / J_p + \left[ \dot{m}_{re}\phi_e - \dot{m}_{rw}\phi_w + \dot{m}_{rn}\phi_n - \right.$$

$$\begin{aligned} - \dot{m}_{rs}\phi_s \Delta t = & \left\{ \left[ C_1\partial\phi/\partial\xi + C_2\partial\phi/\partial\eta \right]_e - \left[ C_1\partial\phi/\partial\xi + C_2\partial\phi/\partial\eta \right]_w \right\} \Delta\eta\Delta t + \\ & + \left\{ \left[ C_2\partial\phi/\partial\xi + C_3\partial\phi/\partial\eta \right]_n - \left[ C_2\partial\phi/\partial\xi + C_3\partial\phi/\partial\eta \right]_s \right\} \Delta\xi\Delta t + \\ & + \left[ \hat{S}^{\phi} - \hat{P}^{\phi} \right] \Delta\xi\Delta\eta\Delta t \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $\dot{m}_{r1}$  representa o fluxo de massa nas faces do volume de controle,  $\hat{P}^{\phi}$  e  $\hat{S}^{\phi}$ , os termos de pressão e fonte transformados, respectivamente, e o superscrito <sup>(0)</sup> indica valores da propriedade obtidos da iteração anterior.

Para obtenção das equações aproximadas, torna-se necessária a avaliação da propriedade  $\phi$  e de suas derivadas na face do volume de controle em função dos valores das variáveis no centro do volume de controle.

Para avaliação de  $\partial\phi/\partial\xi$  e  $\partial\phi/\partial\eta$  nas faces do volume de controle, é utilizada a aproximação por diferença central.

### Avaliação das propriedades nas faces do volume de controle

Os métodos numéricos tradicionais utilizam esquemas "upwind", central ou híbrido, para avaliação da propriedade  $\phi$  nas faces do volume de controle e, portanto, levam em conta somente a influência dos dois pontos vizinhos à face do volume de controle em questão, apresentando grandes erros devido à difusão numérica, quando a malha não se encontra alinhada com o vetor velocidade. É proposta, então, a utilização de uma função interpolação obtida da própria equação de conservação, escrita para a face do volume de controle, com os termos transiente, convectivo e difusivo, visando levar em conta os aspectos físicos relevantes do problema em estudo.

A equação da conservação da quantidade de movimento escrita

para a face leste do volume de controle pode ser expressa por

$$\begin{aligned} & \left[ \rho(\partial\phi/\partial t)/J \right]_e + \left[ \rho U \partial\phi/\partial\xi \right]_e + \left[ \rho V \partial\phi/\partial\eta \right]_e = \\ & = \left[ \partial(C_1 \partial\phi/\partial\xi)/\partial\xi \right]_e + \left[ \partial(C_2 \partial\phi/\partial\eta)/\partial\eta \right]_e \end{aligned} \quad (10)$$

O gradiente de pressão foi excluído pois o esquema, nos testes preliminares, apresentou problemas de convergência.

O termo transiente é aproximado por diferença para trás, de maneira que é requerido o armazenamento do valor da variável dependente, obtido na iteração anterior. Os termos convectivos e difusivos são aproximados utilizando-se o esquema de diferença central. Assim, a equação (10) pode ser aproximada, fornecendo a seguinte equação :

$$\begin{aligned} a_e^e \phi_e = & a_e^0 \phi_e^0 + a_p^e \phi_p + a_E^e \phi_E + a_S^e \phi_S + a_N^e \phi_N + \\ & + a_{NE}^e \phi_{NE} + a_{SE}^e \phi_{SE} + b_e^{\phi} \end{aligned} \quad (11)$$

Expressões análogas à equação (11) podem ser obtidas para as faces oeste, norte e sul do volume de controle.

Sustituindo-se a equação (11) e as equações análogas à equação (11) para as faces oeste, norte e sul do volume de controle, bem como as expressões obtidas para avaliação das derivadas da propriedade  $\phi$  nas faces do volume de controle, na equação (9), obtém-se

$$\begin{aligned} a_p \phi_p = & a_p^0 \phi_p^0 + (a_e^0)^* \phi_e^0 + (a_w^0)^* \phi_w^0 + (a_s^0)^* \phi_s^0 + (a_n^0)^* \phi_n^0 + \\ & + a_e \phi_E + a_n \phi_N + a_w \phi_W + a_s \phi_S + a_{ne} \phi_{NE} + a_{nw} \phi_{NW} + \\ & + a_{se} \phi_{SE} + a_{sw} \phi_{SW} + b_p^{\phi} \end{aligned} \quad (12)$$

A molécula numérica resultante é uma molécula de 9 pontos, sendo que a equação (12) apresenta uma característica importante para a estabilidade do método, pois é diagonalmente dominante. Deste modo, a estrutura da equação de 9 pontos é compatível para a utilização do método MSI ("Modified Strongly Implicit") modificado, proposto por Schneider e Zedan [14], para a solução do sistema de equações lineares.

## RESULTADOS PRELIMINARES

A formulação aqui apresentada foi testada, com o objetivo de identificar os possíveis problemas de convergência do esquema, na obtenção da solução do problema de convecção forçada em uma cavidade quadrada, onde a placa superior é movimentada com uma velocidade constante,  $U$ , conforme ilustra a FIGURA 1a. Ghia et al. [15] apresentaram a solução deste problema obtida com uma malha bastante refinada (129x129), para números de Reynolds iguais a 100, 400 e 1000. Estes números de Reynolds estão baseados na velocidade de movimentação da placa superior ( $U$ ) e na largura da cavidade ( $L$ ), ou seja,  $Re = \rho UL/\mu$ .

O primeiro teste foi realizado para  $Re = 100$ , utilizando-se malhas 10x10, 20x20 e 40x40. O perfil da componente de velocidade cartesiana,  $u$ , é apresentado na FIGURA 1b, para a linha central



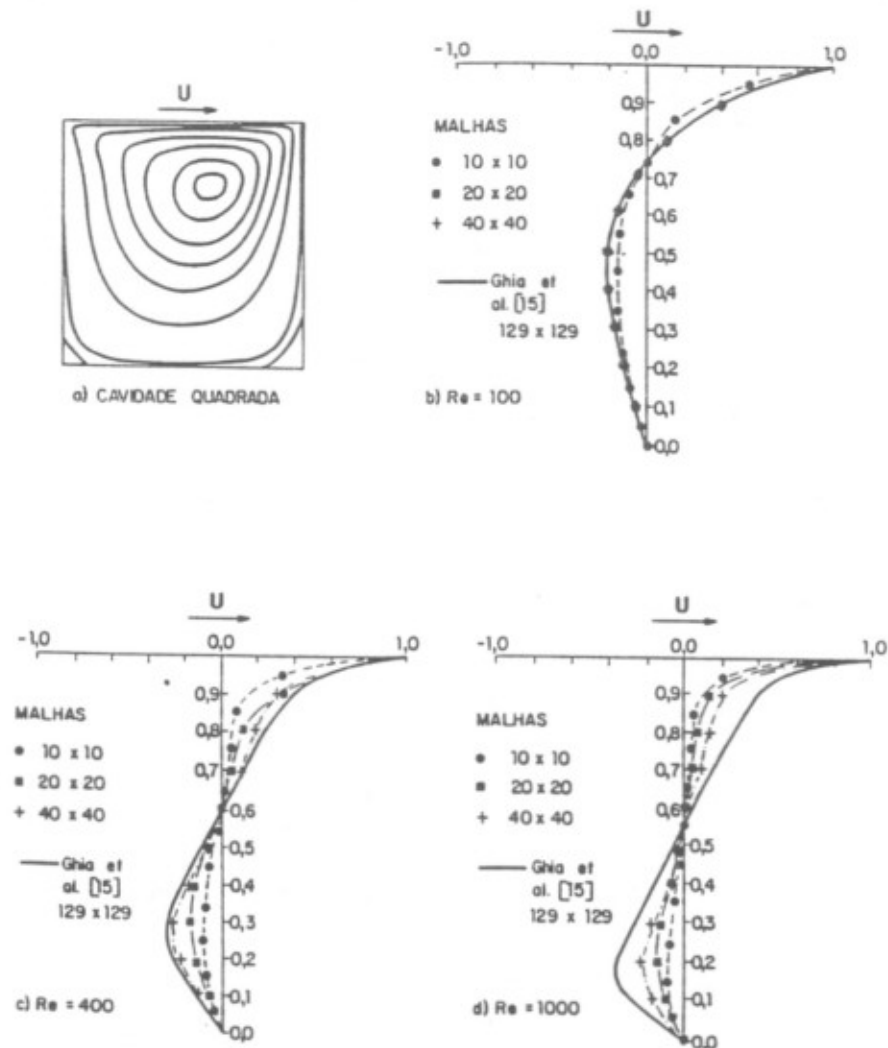


Figura 1 - a) Problema de convecção forçada em cavidade quadrada. b) Solução para  $Re = 100$ . c) Solução para  $Re = 400$ . d) Solução para  $Re = 1000$

vertical da cavidade. Neste caso, o processo dominante é a difusão.

Conforme se pode verificar, a solução obtida com malha  $10 \times 10$  apresenta boa concordância com os dados de Ghia et al. [15], sendo que os resultados obtidos com malha  $20 \times 20$  e  $40 \times 40$  coincidem com os dados de Ghia et al. [15]. A solução obtida para  $Re = 400$  é apresentada na FIGURA 1c. Os resultados obtidos com a malha  $40 \times 40$  apresentam boa concordância com os dados apresentados por Ghia et al. [15], sendo que os resultados obtidos com malhas  $10 \times 10$  e  $20 \times 20$  se distanciam um pouco dos dados de Ghia et al. [15].

Para  $Re = 1000$ , ocorre a predominância da convecção no processo de transferência de quantidade de movimento e os resultados obtidos são mostrados na FIGURA 1d. Conforme se pode verificar, não existe boa concordância entre os resultados obtidos com malhas  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  e  $40 \times 40$  e os dados obtidos por Ghia et al. [15], com malha  $129 \times 129$ .

## CONCLUSÃO

A formulação proposta, com o arranjo de variáveis co-localizadas e uma função de interpolação obtida das equações de conservação, foi utilizada para o desenvolvimento de um código computacional, apresentando boas condições de estabilidade, economia de memória computacional e facilidade de manipulação dos índices dos volumes de controle, quando comparada com a formulação que utiliza o arranjo de variáveis desencontradas.

Os resultados preliminares indicam que a formulação proposta reproduz, com relativa precisão, o perfil de velocidade, o que encoraja bastante a continuidade da investigação nesta área.

Como prosseguimento deste trabalho, serão realizados estudos para introdução do gradiente de pressão na equação para avaliação

da propriedade  $\phi$  na face do volume de controle, o que deverá reduzir bastante a discrepância entre os resultados.

Pretende-se também obter uma equação para determinação da pressão, obtida pela substituição da equação para avaliação de  $\phi$  na face do volume de controle, contendo o gradiente de pressão, na equação da conservação da massa, evitando-se, deste modo, a utilização de correções para a pressão e velocidades, existentes nos métodos tradicionais, para tratamento do acoplamento pressão-velocidade.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Co, Washington, DC., USA (1980).
- [2] Hsu, C., A Curvilinear-Coordinate Method for Momentum, Heat and Mass Transfer in Domains of Irregular Geometry, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, USA (1981).
- [3] Prakash, C., A Finite Element Method for Predicting Flow Through Ducts with Arbitrary Cross Sections, Ph.D. Thesis, University of Minnesota, USA (1981).
- [4] Rhie, C. M., A Numerical Study of Flow Past an Isolated Airfoil with Separation, Ph. D. Thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, USA (1981).
- [5] Baliga, B. R. and Patankar, S. V., A Control Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer, Numerical Heat Transfer, 6, pp. 245-261 (1983).
- [6] Schneider, G. E. and Zedan, M., Control-Volume-Based Finite Element Formulation of the Heat Conduction Equation, Spacecraft Thermal Control, Design, and Operation, Prog. Astronaut. Aeronaut., 86, pp. 305-327 (1983).
- [7] Schneider, G. E. and Raw, M. J., A Skewed Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control-Volume-Based Finite-Element Convection-Diffusion Computation, Numerical Heat Transfer, 9, pp. 1-26 (1985).
- [8] Schneider, G. E. and Raw, M. J., Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables - 1. Computational Procedure,

- Numerical Heat Transfer, 11, pp. 363-390 (1987).
- [9] Schneider, G. E. and Raw, M. J., Control Volume Finite-Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Colocated Variables - 2. Application and Validation, Numerical Heat Transfer, 11, pp. 391-400 (1987).
  - [10] Peric, M. Kessler, R. Scheuerer, G., Comparison of Finite-Volume Numerical Methods with Staggered and Colocated Grids, Submitted to Computers and Fluids, #87-114 (1987).
  - [11] Camarero, R. and Reggio, M., Numerical Solution Procedure for Viscous Incompressible Flows, Numerical Heat Transfer, 10, pp. 131-146 (1986).
  - [12] Schneider, G. E., A Novel Co-located Finite Difference Procedure for the Numerical Computation of Fluid Flow, AIAA - 4<sup>th</sup> Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference, Boston, Massachusetts (1986).
  - [13] Majumdar, S., Role of Underrelaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Non-Staggered Grids, Numerical Heat Transfer, 13, pp. 125-132 (1988).
  - [14] Schneider, G. E. and Zedan, M. A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, Numerical Heat Transfer, 4, pp. 1-19 (1981).
  - [15] Ghia, U. Ghia, K. N. and Shin, C. T., High-Re Solutions for Incompressible Flow Using The Navier-Stokes Equations and a Multi-Grid Method, Journal of Computational Physics, 48, pp. 387-411 (1982).