

## SOLUÇÃO NUMÉRICA SIMULTÂNEA DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS INCOMPRESSÍVEIS PELO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS USANDO MALHAS NÃO-ESTRUTURADAS

**Fábio A. Schneider**

SINMEC - Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor  
Departamento de Engenharia Mecânica – UFSC – Caixa Postal 476 – CEP 88040-970 – Florianópolis – SC, Brasil  
[schneider@sinmec.ufsc.br](mailto:schneider@sinmec.ufsc.br)

**Clovis R. Maliska**

SINMEC - Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor  
Departamento de Engenharia Mecânica – UFSC – Caixa Postal 476 – CEP 88040-970 – Florianópolis – SC, Brasil  
[maliska@sinmec.ufsc.br](mailto:maliska@sinmec.ufsc.br)

***Resumo.** Este trabalho apresenta um modelo numérico para a solução de escoamentos bidimensionais incompressíveis, utilizando o método dos Volumes Finitos aplicado para malhas não-estruturadas. É adotada a solução simultânea das equações de conservação da quantidade de movimento e da massa obtendo uma matriz de coeficientes única. A principal motivação para o emprego desta formulação é a redução da complexibilidade do algoritmo frente aos esquemas de solução segregada das equações e a estabilidade do esquema numérico. O uso de malhas não-estruturadas facilita a discretização tanto de geometrias complexas e irregulares, como de geometrias regulares, permitindo que refinamentos locais sejam feitos em regiões específicas. A malha empregada e a forma de obtenção dos volumes de controle é baseada na discretização por elementos, o que normaliza a implementação computacional. O esquema numérico proposto é apresentado em sua forma básica e é comparado com outros esquemas numéricos que utilizam malhas não-estruturadas em soluções simultâneas e segregadas.*

***Palavras chave:** métodos numéricos, malhas não-estruturadas, escoamentos incompressíveis, solução simultânea.*

### 1. Introdução

As equações de Navier-Stokes, que fazem parte dos desenvolvimentos em Mecânica dos Fluidos Computacional, requerem decisões importantes sobre a natureza da solução adotada. A primeira decisão a ser tomada é se esta solução será segregada ou simultânea. A solução simultânea dos sistemas de equações algébricas cria uma matriz única envolvendo todos os coeficientes e resolvendo todas as incógnitas simultaneamente, que são as componentes de velocidade e pressão. O problema do acoplamento entre as variáveis desaparece, restando apenas as não-linearidades, que são consideradas resolvendo-se o sistema iterativamente, atualizando-se a matriz dos coeficientes até a convergência. A outra alternativa é a solução segregada dos sistemas de equações, isto é, resolver os sistemas lineares um a um, atualizando os coeficientes, e também utilizando métodos iterativos de solução.

A principal restrição no uso da solução simultânea das equações está no recurso computacional envolvido. Porém, a grande capacidade computacional disponível hoje em pequenas unidades de processamento, propicia o emprego dos métodos numéricos em um grande número de problemas de engenharia, e motiva o uso da técnica de solução simultânea das equações em esquemas numéricos que envolvem problemas de escoamentos de fluidos (Zedan, 1983; Galpin et al., 1985; Schneider e Raw, 1987; Roth, 1997).

Outro ponto de destaque é o emprego de malhas não-estruturadas para a discretização de domínios irregulares. A discretização de domínios arbitrários em uma malha única e de qualidade sempre representou uma dificuldade no uso dos métodos numéricos. Esta dificuldade torna-se ainda maior caso um refinamento local se faça necessário. A alternativa mais difundida é subdividir o domínio e resolver o problema em blocos acoplados, usando a técnica de multiblocos. Entretanto, pode-se evitar este acoplamento, mapeando-se a geometria em uma malha única e não-estruturada (Baliga e Patankar, 1980; Schneider e Raw, 1987; Taniguchi e Kobayashi, 1991; Mathur e Murthy, 1997).

O desenvolvimento de técnicas combinadas que possuam versatilidade e praticidade de discretização, e ao mesmo tempo, simplicidade e normalização na implementação dos algoritmos, é seguramente uma tendência dos métodos numéricos atuais, e foi a principal motivação no desenvolvimento da presente proposta.

Neste trabalho é empregada a discretização por elementos unidirecionais, que consiste em obter o volume de controle a partir de um conjunto de elementos losangulares, delimitados por dois centros de volumes e uma área, em que se integram as equações. Cada elemento contribui individualmente com um conjunto de coeficientes para a equação discretizada do volume de controle. A discretização por elementos, longamente empregada no Método dos Elementos Finitos, normaliza a implementação computacional e diminui a incidência de erros de programação.

O presente trabalho apresenta um esquema numérico em malhas não-estruturadas, empregando a solução simultânea das equações em problemas de escoamentos bidimensionais incompressíveis. Metodologias que usam malhas não-estruturadas (Schneider e Raw, 1987; Maliska e Vasconcellos, 2000), servem como referência para a avaliação do desempenho da formulação proposta.

Para validar os esquemas numéricos apresentados e realizar comparações gerais, o problema teste escolhido foi a convecção forçada em cavidade quadrada com tampa móvel, com solução de referência em Ghia et al. (1982), com malha bastante refinada (129 x 129).

### 1.1. Revisão Bibliográfica

A solução segregada das equações de Navier-Stokes gera o problema do acoplamento pressão-velocidade. Neste caso, para a determinação do campo de pressões, é necessário promover um acoplamento entre a equação de conservação da massa e as equações de conservação da quantidade de movimento, originando uma equação para a pressão. Através de algum esquema numérico, a equação de conservação da massa é transformada em uma equação que forneça o campo de pressões ou uma correção para tal.

A técnica utilizada durante muito tempo para evitar este problema do acoplamento pressão-velocidade, foi resolver as equações em termos da função corrente e da vorticidade. Com essa prática, um problema bidimensional, cujas incógnitas são as componentes do vetor velocidade e pressão, reduz-se a um problema de duas incógnitas, envolvendo a função corrente e a vorticidade, desaparecendo da formulação a pressão. Apesar de muito atraente essa técnica apresentou muitas limitações, a começar pela interpretação física da vorticidade que dificulta em muito a aplicação das condições de contorno, e ainda o acoplamento entre a função corrente e a vorticidade, via condições de contorno, o que torna o processo iterativo lento e instável. Já para o caso tridimensional esta metodologia não se aplica, pois não existe a definição da função corrente para três dimensões.

Conseqüentemente, esta técnica tornou-se praticamente inviável, e a outra opção, que seria a solução das equações simultaneamente, traduzia-se em grandes problemas computacionais. A memória computacional exigida para uma solução simultânea e de boa qualidade em malhas mais refinadas não era disponível nos computadores da época. A solução segregada das equações era então a única alternativa viável para a solução das equações.

Surgiram então, já na década de 70, duas técnicas novas para tratar o acoplamento pressão-velocidade, e que se propagaram rapidamente na literatura, ambas desenvolvidas por Chorin (1971). A primeira destas técnicas era empregada em problemas onde somente a solução em regime permanente era requerida, e baseia-se no conceito de compressibilidade artificial. Segundo este princípio o escoamento é tratado como compressível, desaparecendo a compressibilidade ao se atingir o regime permanente. A outra técnica desenvolvida é similar e segue o transiente real. Muitas variantes destes métodos surgiram no início da década de 70 para tratar o acoplamento pressão-velocidade, sendo o método SIMPLE (Patankar e Spalding, 1972) um dos precursores. Em Maliska (1995) tem-se a descrição de muitos destes métodos.

Porém, com o crescente desenvolvimento da tecnologia computacional, pequenas unidades de processamento passaram a ter a mesma capacidade computacional, se não maior, do que aquela disponível nos computadores de grande porte dos primeiros anos do desenvolvimento das técnicas numéricas. Isso motivou o surgimento de esquemas numéricos mais robustos, e que fazem uso da solução simultânea das equações (Zedan, 1983; Schneider e Raw, 1987; Roth, 1997).

Nas metodologias (Schneider e Raw, 1987; Roth, 1997) que serviram como base para o presente trabalho, as equações de conservação da quantidade de movimento são aproximadas numericamente e introduzidas na equação de conservação da massa, gerando um sistema de equações para a pressão. Portanto, obtém-se, ao final das aproximações, uma matriz única de coeficientes envolvendo todas as incógnitas. Resolve-se o sistema iterativamente, atualizando a matriz dos coeficientes até a convergência.

## 2. Formulação Básica

A formulação proposta neste trabalho é baseada nos desenvolvimentos das metodologias (Baliga e Patankar, 1980; Schneider e Raw, 1987; Mathur e Murthy, 1997; Maliska e Vasconcellos, 2000) e tem sua fundamentação descrita em Schneider e Maliska (2001). O objetivo principal da proposta é o desenvolvimento de uma metodologia em malhas não-estruturadas, que empregue a solução simultânea das equações, e que seja menos dispendiosa computacionalmente, facilitando a implementação dos algoritmos, similar as metodologias (Mathur e Murthy, 1997; Maliska e Vasconcellos, 2000). Os desenvolvimentos seguem os princípios de conservação do Método dos Volumes Finitos aplicado a malhas não-estruturadas. A discretização das equações é realizada utilizando o conceito de elementos unidirecionais, que além de facilitar o desenvolvimento do código, diminui a incidência de erros de programação, normalizando a implementação computacional.

### 2.1. Construção do Volume de Controle e Elementos Unidirecionais

A partir de uma discretização arbitrária qualquer, conforme ilustra a Fig. (1.a), o volume de controle é obtido a partir do método das medianas, ou seja, une-se o centro geométrico de cada polígono ao ponto médio das faces, conforme ilustra a Fig. (1.b). É importante destacar que este procedimento não é inflexível. Os pontos que delimitam os

volumes não precisam ser necessariamente o centro geométrico dos polígonos, o que permite a correção de possíveis discrepâncias geométricas da malha. Uma segunda alternativa, menos atraente do que a primeira por apresentar uma distribuição menos homogênea do tamanho das faces e do tamanho dos volumes, é considerar como volumes de controle os próprios polígonos decorrentes da discretização da Fig. (1.a).

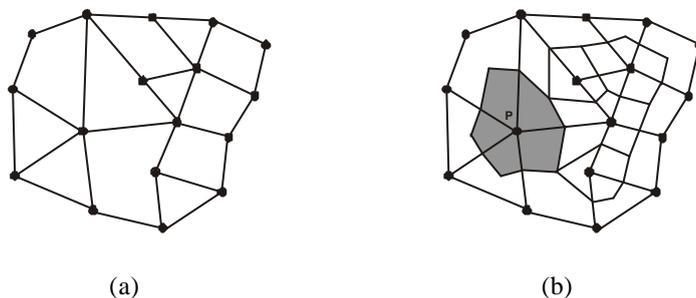


Figura 1. Discretização arbitrária e construção do volume de controle  $P$  (hachurado).

Observe que após construído, o volume de controle é formado por um conjunto de elementos de formato losangular, do tipo  $Palb$ , que para o volume de controle  $P$  mostrado na Fig. (2.a), são um total de cinco elementos. Estes elementos são delimitados por dois centros de volume e uma área. O elemento  $Palb$ , através do seu segmento  $PI$ , promove a ligação entre o volume de controle centrado em  $P$  e em  $I$ , por isso estes elementos são aqui denominados unidirecionais. Cada elemento unidirecional  $Palb$  possui um único ponto de integração que está localizado no ponto médio do segmento  $PI$ . A Figura (2.b) ilustra o elemento  $Palb$  extraído do volume de controle representado na Fig (2.a). Para simplificar a notação, o elemento unidirecional  $Palb$  será denominado simplesmente elemento  $PI$ .

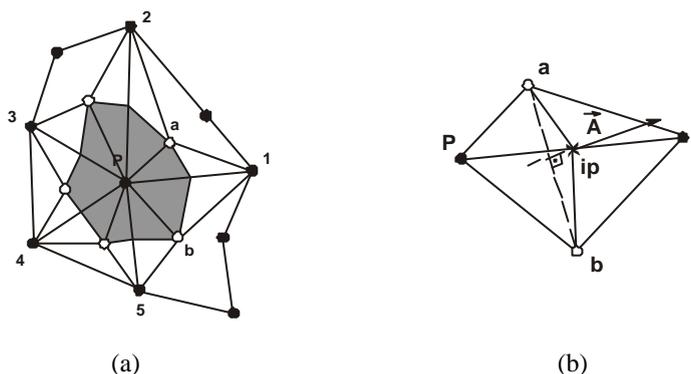


Figura 2. Volume de controle e elemento unidirecional.

Note que para o caso bidimensional, a área efetiva de troca de fluxo, representada pelo vetor  $\vec{A}$ , é definida pelo segmento  $\vec{ab}$ . E ainda, qualquer que seja o formato da curva que define os segmentos  $\vec{aip}$  e  $\vec{ipb}$ , não alteram o valor de  $\vec{A}$ . Conseqüentemente, no uso de termos fonte envolvendo uma quantidade do sub-volume, esse valor pode ser  $1/2$  de  $Palb$ , não sendo necessário o cálculo parcial dos sub-volumes.

## 2.2. Equações governantes

Admitindo o fluido como Newtoniano e adotando um sistema de coordenadas cartesianas  $(x,y)$ , tem-se, para problema convectivo-difusivo bidimensional transiente, as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) + S^u \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + S^v \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma^\phi \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + S^\phi \quad (4)$$

As Equações (1) e (2) são as equações de conservação da quantidade de movimento em x e y respectivamente, onde S representa o termo fonte. A Equação (3) é a equação de conservação da massa e a Eq. (4) é a equação de conservação na forma geral para uma variável genérica  $\phi$ , onde  $\Gamma^\phi$  é o coeficiente difusivo, S representa o termo fonte,  $\rho$  é a massa específica do fluido e t o tempo. Condensando os fluxos advectivo e difusivo em um único termo, a Eq. (4) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\vec{J}) = S^\phi \quad (5)$$

$$\vec{J} = \rho \vec{V}\phi - \Gamma^\phi \nabla\phi \quad (6)$$

onde  $\vec{J}$  representa o fluxo total (advectivo e difusivo) e  $\vec{V}$  é o vetor velocidade.

### 2.3. Discretização das equações

Para um melhor entendimento do procedimento de discretização das equações, apresenta-se inicialmente a discretização da equação de conservação de  $\phi$  Eq. (5), e posteriormente a discretização das equações de conservação da quantidade de movimento e massa, onde serão consideradas as devidas particularidades.

#### 2.3.1. Discretização das equações para f

A integração da equação de conservação, Eq. (5), segue a formulação básica das metodologias em Volumes Finitos para malhas não-estruturadas. Esta integração é realizada sobre o volume de controle  $P$ , representado na Fig. (2.a). Note que este volume é formado por vários elementos do tipo  $PI$ , que contribuirão individualmente para obtenção das equações aproximadas de cada volume. O sub-volume de controle  $Paipb$ , representado na Fig. (2.b), é parte do volume de controle no qual é realizada a integração. O elemento  $PI$  contribui no balanço total da propriedade  $\phi$  do volume com o fluxo  $\vec{J}$ , calculado no ponto de integração  $ip$  da Fig. (2.b). Portanto, integrando a Eq. (5) no volume de controle  $P$ , tem-se

$$\frac{M_P \phi_P - M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + \int_a^b \vec{J} \cdot d\vec{A} - \int_{Paipb} S^\phi dV + \left[ \begin{array}{l} \text{contribuição de outros} \\ \text{elementos associados ao nó } P \end{array} \right] = 0 \quad (7)$$

onde M representa a massa do volume de controle. Detalhes desta integração podem ser vistos em Schneider e Raw (1987). Introduzindo a Eq. (6) na Eq. (7) e admitindo constantes os valores de  $\rho$  e  $\Gamma^\phi$ , tem-se

$$\frac{M_P \phi_P - M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{A})_{ip} \phi_{ip} - \Gamma^\phi(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{A})_{ip} - (S_p \phi_{ip} + S_c) \frac{\Delta V_{Paib}}{2} + \left[ \begin{array}{l} \text{contribuição de outros} \\ \text{elementos associados ao nó } P \end{array} \right] = 0 \quad (8)$$

Quando as parcelas correspondentes a todos os elementos forem adicionada e aplicadas as condições de contorno, obtém-se uma equação algébrica de conservação do volume de controle centrado em  $P$ , conectado a todos os seus vizinhos, na forma

$$A_i \phi_i = \sum_n A_{nb} \phi_{NB} + B_i \quad (9)$$

onde  $i$  indica o número do volume de controle e  $nb$  os volumes vizinhos. Ao se resolver o sistema linear obtido, tem-se os valores de  $\phi$  determinados em todos os vértices dos polígonos que compõe a discretização da Fig. (1.b), ou seja, no centro de todos os volumes.

#### 2.3.2. Discretização das equações para u e v

A integral da equação de conservação da quantidade de movimento é idêntica à da equação de conservação de  $\phi$  exceto pela presença da integral envolvendo o gradiente de pressão. As equações de conservação de quantidade de movimento adicionam ao fluxo  $\vec{J}$  os termos  $\hat{p}_i$  e  $\hat{p}_j$ , para as componentes do vetor velocidade u e v, respectivamente. Portanto, integrando as Eq. (1) e (2) no volume de controle  $P$  da Fig. (2.a), tem-se

$$\frac{M_p u_p - M_p^o u_p^o}{\Delta t} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{A})_{ip} u_{ip} - \mu(\vec{\nabla} u \cdot \vec{A})_{ip} + (\hat{i} \cdot \vec{A})_{ip} p_{ip} + \left[ \begin{array}{l} \text{contribuição de outros} \\ \text{elementos associados ao nó } P \end{array} \right] = 0 \quad (10)$$

$$\frac{M_p v_p - M_p^o v_p^o}{\Delta t} + \rho(\vec{V} \cdot \vec{A})_{ip} v_{ip} - \mu(\vec{\nabla} v \cdot \vec{A})_{ip} + (\hat{j} \cdot \vec{A})_{ip} p_{ip} + \left[ \begin{array}{l} \text{contribuição de outros} \\ \text{elementos associados ao nó } P \end{array} \right] = 0 \quad (11)$$

Quando as parcelas correspondentes a todos os elementos forem adicionada e aplicadas as condições de contorno, obtém-se um conjunto de equações algébricas para as variáveis  $u$  e  $v$ , em cada volume de controle, na forma

$$[A^{uu}]\{U\} + [a^{uu}]\{u\} + [a^{up}]\{p\} = \{B^u\} \quad (12)$$

$$[A^{vv}]\{V\} + [a^{vv}]\{v\} + [a^{vp}]\{p\} = \{B^v\} \quad (13)$$

onde  $[A]$  é a matriz de coeficientes nodais, e  $[a]$  é a matriz de coeficientes no ponto de integração. Note que, expressões para  $u$ ,  $v$  e  $p$  no ponto de integração deverão ser introduzidas nas equações anteriores, através de uma função de interpolação, para que se obtenha a forma final da equação discretizada.

### 2.3.3. Discretização da equação de conservação da massa

A integração da equação de conservação da massa, Eq. (3), é obtida assumindo  $\phi=1$ ,  $\Gamma^\phi=0$  e  $S^\phi=0$  na Eq. (8). Considerando ainda, constantes os valores de  $\rho$  e escrevendo o vetor velocidade como  $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}$ , tem-se

$$u_{ip}(\hat{i} \cdot \vec{A})_{ip} + v_{ip}(\hat{j} \cdot \vec{A})_{ip} + \left[ \begin{array}{l} \text{contribuição de outros} \\ \text{elementos associados ao nó } P \end{array} \right] = 0 \quad (14)$$

Adicionando as parcelas correspondentes a todos os elementos e aplicando as condições de contorno, obtém-se uma equação algébrica de conservação da massa para o volume de controle centrado em  $P$ , conectado a todos os seus vizinhos na forma

$$[a^{pu}]\{u\} + [a^{pv}]\{v\} = \{B^p\} \quad (15)$$

Introduzindo na equação acima expressões para  $u$  e  $v$  no ponto de integração, obtém-se a forma final da equação de conservação da massa discretizada.

## 2.4. Função de interpolação

A função de interpolação tem o objetivo de avaliar o valor de uma propriedade na interface do volume de controle bem como suas derivadas. A discretização das equações de conservação da quantidade de movimento e conservação da massa, dadas pelas Eq.(10), (11) e (14), necessitam que sejam introduzidas expressões aproximadas para  $u$ ,  $v$  e  $p$  na interface de integração, e expressões para o vetor gradiente de velocidades, formado pelas derivadas de  $u$  e  $v$ .

Tradicionalmente o Método dos Volumes Finitos utiliza duas funções de interpolação para esta tarefa. Uma para determinação dos valores das derivadas de uma propriedade e outra para a determinação dos valores desta propriedade nas interfaces de integração. Portanto apresentar-se-á a função de interpolação em duas etapas: avaliação das derivadas de  $u$ ,  $v$  e  $p$  e avaliação de  $u$ ,  $v$  e  $p$  nos pontos de integração.

### 2.4.1. Avaliação das derivadas de $u$ , $v$ e $p$

Para a análise das expressões das derivadas da componente  $u$  de velocidades, considere inicialmente a Fig. (3), que ilustra o elemento  $I2$  que compõe o volume de controle da Fig. (2.a). O objetivo aqui é determinar uma expressão para o gradiente de  $u$ , escrito no sistema de coordenadas cartesianas  $(x,y)$  e posteriormente aplicá-lo na equação de conservação da quantidade de movimento discretizada, dada pela Eq.(10). Para isso escreve-se uma função de interpolação da seguinte forma

$$u(x,y) = N_1 U_1 + N_2 U_2 \quad (16)$$

onde  $U_1$  e  $U_2$  são os valores de  $u$  armazenados nos vértices do elemento, e  $N_1$  e  $N_2$  são funções peso. Note que a Eq.(16) é escrita em duas coordenadas para facilitar a obtenção das expressões das derivadas de  $u$  em  $x$  e  $y$ , e posteriormente comporem o vetor gradiente. Portanto, a Eq.(16) é uma função de interpolação bidimensional, onde dispõem-se somente de dois nós para sua construção.

A idéia então é construir uma função plano, na forma de uma rampa bidimensional entre os valores de  $U_1$  e  $U_2$ , que apresente gradiente máximo na direção do vetor área do elemento  $I2$  ilustrado na Fig. (3), e gradiente nulo na direção perpendicular. Daí a razão em denominar os elementos como unidirecionais.

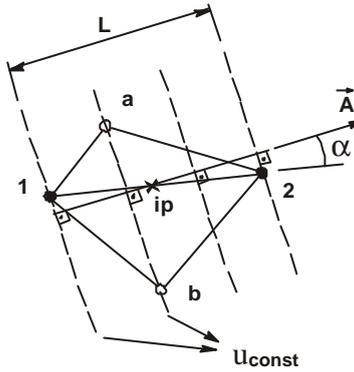


Figura 3. Elemento unidirecional e os parâmetros difusivos.

Portanto, esta função fornece

$$N_1 = [(x_a - x_b)x + (y_a - y_b)y + (x_b - x_a)x_2 + (y_b - y_a)y_2] / \text{DET} \quad (17)$$

$$N_2 = [(x_b - x_a)x + (y_b - y_a)y + (x_a - x_b)x_1 + (y_a - y_b)y_1] / \text{DET} \quad (18)$$

$$\text{DET} = (x_2 - x_1)(x_b - x_a) + (y_2 - y_1)(y_b - y_a) = LA \cos \alpha \quad (19)$$

Pode-se também escrever a função rampa em outras direções, como por exemplo, alinhada com o segmento  $I2$ , o que fornece valores diferentes para os coeficientes  $N_1$  e  $N_2$ . Isso decorre de estarmos assumindo uma variação unidirecional da propriedade, da mesma forma empregada na formulação tradicional do Método dos Volumes Finitos (Maliska, 1995) e na metodologia dos diagramas de Voronoi (Maliska e Vasconcellos, 2000). Nas metodologias (Baliga e Patankar, 1980), (Schneider e Raw, 1987) e (Mathur e Murthy, 1997) este fato não ocorre devido a utilização de mais de dois pontos nodais para esta aproximação, definindo melhor a função bidimensional.

A escolha de qual direção utilizar na construção da função rampa depende da direção real do fluxo, que é desconhecida a priori (Heinemann e Brand, 1989). Para o esquema numérico aqui desenvolvido, admite-se que a função rampa terá a forma da Fig. (3) e os coeficientes  $N_1$  e  $N_2$  dados pelas Eqs.(17) e (18), o gradiente máximo fica portanto estabelecido na direção do vetor área. Assim, a componente do gradiente perpendicular ao vetor área é sempre multiplicada por uma área nula, permitindo o uso da função rampa na interpolação sem prejuízo da formulação, como na metodologia dos diagramas de Voronoi (Maliska e Vasconcellos, 2000). Segundo Heinemann e Brand (1989) o fluxo calculado fica sujeito a dois erros: um erro de ordem ( $L^2$ ) decorrente da aproximação linear da derivada, e outro erro envolvendo os cosenos dos ângulos que o fluxo real e o vetor área fazem com o segmento  $I2$ . O próximo passo é a obtenção da expressão que fornece o vetor gradiente de  $u$ . Para tal, derivamos a Eq.(16) em relação a  $(x,y)$  obtendo

$$\frac{\partial u}{\partial(x,y)} = \frac{\partial N_1}{\partial(x,y)} U_1 + \frac{\partial N_2}{\partial(x,y)} U_2 \quad (20)$$

Considerando as Eqs.(17) à (20), o vetor gradiente de  $u$  é escrito como

$$\nabla u = \frac{(x_b - x_a)\hat{i} + (y_b - y_a)\hat{j}}{LA \cos \alpha} (U_2 - U_1) \quad (21)$$

O produto escalar do vetor gradiente pelo vetor área, presente na Eq.(10), é (Peacemann, 1996)

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{A} = \frac{A}{\cos \alpha} \frac{(U_2 - U_1)}{L} \quad (22)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo entre o vetor área e o segmento  $I2$ , representado na Fig. (3). A parcela da Eq.(22) correspondente ao inverso do coseno de  $\alpha$  varia conforme a escolha da direção da função rampa. No caso de se optar por uma função

rampa que admite gradiente máximo na direção do segmento 12, esta parcela é dada pelo coseno de  $\alpha$  (Heinemann e Brand, 1989; Peaceman, 1996).

Para a avaliação das derivadas da componente  $v$  de velocidades e da pressão, segue-se o mesmo princípio e obtêm-se equações semelhantes a Eq. (22), escritas em termos da variável de interesse.

### 2.4.2. Avaliação de $p$ nos pontos de integração

Admitindo variação linear do campo de pressões, a função de interpolação que fornece os valores de  $p$  nos pontos de integração é a Eq. (16), escrita na forma

$$p(x, y) = N_1 P_1 + N_2 P_2 \tag{23}$$

com  $N_1$  e  $N_2$  dados pelas Eq. (17) à (19).

### 2.4.3. Avaliação de $u$ e $v$ nos pontos de integração

Para a avaliação da componente  $u$  de velocidades no ponto de integração  $ip$ , considere inicialmente um valor a montante de  $u_{ip}$ , representado por  $u_{up}$  na Fig. (4) e alinhado com a orientação  $s$  do vetor velocidade.

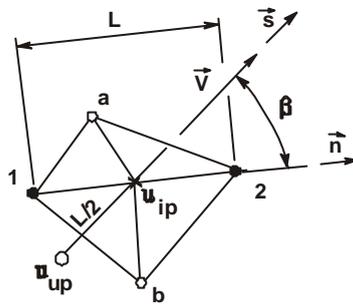


Figura 4. Elemento unidirecional e os parâmetros convectivos.

Usando a série de Taylor em torno do ponto de integração  $ip$ , e assumindo um erro de segunda ordem, obtêm-se a seguinte expressão

$$u_{ip} = u_{up} + \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{ip} (L/2) \tag{24}$$

O valor de  $u_{up}$  é obtido fazendo a média ponderada dos valores de  $U_1$  e  $U_2$ , baseadas no ângulo  $\beta$  da Fig. (4) (Schneider e Maliska, 2001), e portanto

$$u_{up} = aU_1 + (1 - a)U_2 \tag{25}$$

$$a = \frac{(1 + \cos\beta)}{2} \tag{26}$$

Para determinar o valor da derivada de  $u$  na direção  $s$ , e substituí-la na Eq. (24), pode-se escrever a equação de conservação da quantidade de movimento para  $u$  na forma

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{\rho V} \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + S^u - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] \tag{27}$$

Assumindo a solução em regime permanente para a Eq. (27) e considerando nulo o termo fonte  $S^u$ , pode-se aproximar o termo de pressão através da Eq. (23), e o termo difusivo por diferenças centrais, obtendo

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{(x_2 - x_1)}{L^2} (P_2 - P_1) \tag{28}$$

$$\mu \nabla^2 \phi = \mu \frac{U_1 - 2u_{ip} + U_2}{(L/2)^2} \tag{29}$$

Substituindo estas expressões na Eqs. (27) e (24) e reagrupando, tem-se a expressão que fornece o valor de  $u$  no ponto de integração  $ip$ , como

$$u_{ip} = \frac{Pe u_{up} + U_1 + U_2 - \frac{\Delta x}{4\mu} (P_2 - P_1)}{(Pe + 2)} \quad (30)$$

onde o valor de  $u_{up}$  é dado pela Eq. (25) e o número de Peclet baseado na malha é dado por

$$Pe = \frac{\rho V(L/2)}{\mu} \quad (31)$$

Note que, na Eq. (30) a variação do número de Peclet fornece

$$u_{ip} = \frac{U_1 + U_2}{2} - \frac{\Delta x (P_2 - P_1)}{8\mu} \quad p/(Pe \rightarrow 0) \quad (32)$$

$$u_{ip} = u_{up} + \frac{\Delta x (P_2 - P_1)}{2\rho VL} \quad p/(Pe \rightarrow \infty) \quad (33)$$

Portanto, a Eq. (30) é uma função de interpolação que escreve o valor da componente de velocidade  $u$  do ponto de integração em função dos valores de  $u$  e  $p$  nodais, baseada no número de Peclet da malha. Para a avaliação de  $v$  nos pontos de integração, segue-se o mesmo princípio e obtém-se uma equação similar a Eq. (30), escrita em termos da componente  $v$  de velocidades.

## 2.5. Sistema Linear de Equações

Obtidas as expressões para os gradientes de  $u$  e  $v$ , e para os valores de  $u$ ,  $v$  e  $p$  nos pontos de integração, substitui-se estas equações algébricas nas Eq. (12), (13) e (15) obtendo o seguinte sistema linear de equações para o volume de controle centrado em  $P$

$$[A^{uu}]\{U\} + [A^{up}]\{P\} = \{B^u\} \quad (34)$$

$$[A^{vv}]\{V\} + [A^{vp}]\{P\} = \{B^v\} \quad (35)$$

$$[A^{pu}]\{U\} + [A^{pv}]\{V\} + [A^{pp}]\{P\} = \{B^p\} \quad (36)$$

Ao final da discretização de todos os volumes de controle do domínio, é obtida a matriz de coeficientes envolvendo todas as variáveis do problema. Este sistema linear é resolvido iterativamente, atualizando-se a matriz dos coeficientes até a convergência.

É importante aqui destacar algumas particularidades. Na metodologia (Schneider e Raw, 1987), foram mantidos nas equações de conservação da quantidade de movimento, termos de derivadas cruzadas que normalmente se anulam na formulação incompressível. Estes termos promovem naquela metodologia um melhor acoplamento do sistema garantindo melhores taxas de convergência. Em Schneider e Raw (1987), as Eq.(34) e (35) apresentam coeficientes que relacionam todas as variáveis do problema, como por exemplo, coeficientes para  $V$  na Eq. (34) e coeficientes para  $U$  na Eq. (35).

No presente trabalho, as equações de Navier-Stokes na forma como foram apresentadas, proporcionaram maior consistência que o esquema Schneider e Raw (1987), promovendo satisfatoriamente o acoplamento das variáveis.

## 2.6. Condições de Contorno

Considere inicialmente uma variável genérica  $\phi$ , a qual se deseja aplicar uma condição de contorno de valor prescrito ou fluxo prescrito. No método de discretização adotado, os volumes que se encontram na fronteira do domínio tem seus centros localizados sobre essa fronteira. Portanto, para  $\phi$  prescrito a equação do volume de fronteira passa assumir a forma  $\phi = \phi_{\text{prescrito}}$ . Note que, o balanço de conservação não é realizado para o volume de fronteira, pois está se assumindo um valor conhecido da propriedade exatamente onde ela é armazenada, ou seja, no centro do volume. Em caso de fluxo prescrito, a equação do volume de fronteira é empregada e o fluxo conhecido acrescido ao termo fonte.

### 3.Resultados

O problema de convecção forçada de um fluido incompressível em uma cavidade quadrada é resolvido para um escoamento bidimensional laminar e em regime permanente. Este problema é clássico na literatura para testes de algoritmos. A cavidade tem dimensões unitárias e possui a tampa superior móvel, com velocidade horizontal também unitária. Todas as demais velocidades são nulas nas faces. As equações governantes para este problema são as Eq. (1), (2) e (3), extraídos os termos temporais. A Figura (5) ilustra o problema.

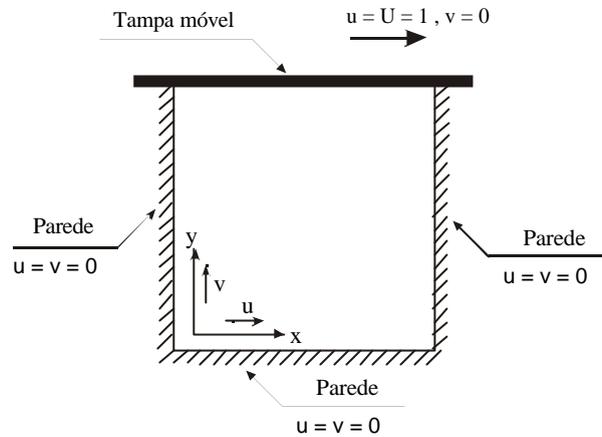


Figura 5. Cavidade quadrada com tampa móvel.

A Figura (6.b) ilustra o formato da malha usada na obtenção da solução, onde variou-se o número de volumes em cada uma delas. Este problema foi resolvido para três valores do número de Reynolds,  $Re=100$ ,  $Re = 400$  e  $Re = 1000$  e tamanhos da malhas aleatórias iguais a 213, 437 e 833 volumes internos.

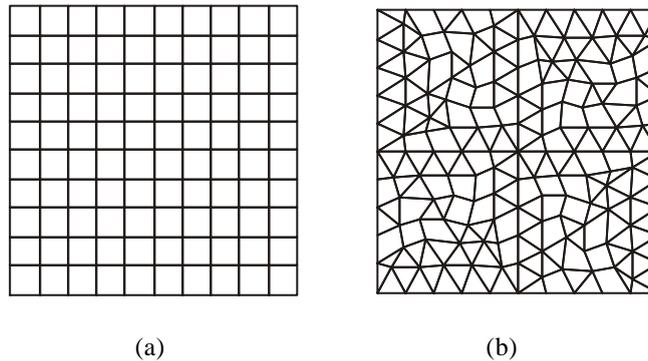


Figura 6. Formato de malhas utilizados na solução do problema proposto.

A formulação aqui proposta foi também comparada com resultados obtidos nas metodologias (Maliska e Vasconcellos, 2000; Schneider e Raw, 1987), utilizando a discretização na forma dada pela Fig (6.a). Como referência, é adotada a solução de Ghia et al (1982). As Figuras (7) à (11) apresentam os resultados obtidos.

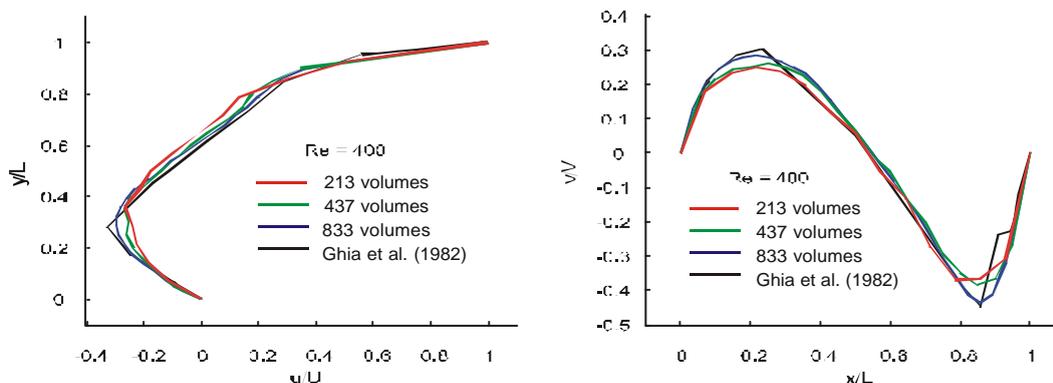


Figura 7. Refino de malha para componente u de velocidade em  $x/L=0.5$ , e para componente vertical de velocidade em  $y/L=0.5$   $Re=400$ .

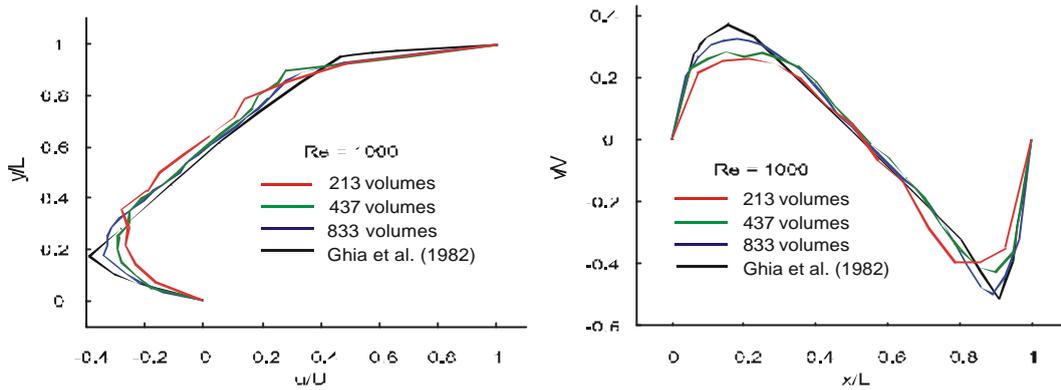


Figura 8. Refino de malha para componente u de velocidade em  $x/L=0.5$ , e para componente vertical de velocidade em  $y/L=0.5$   $Re=1000$ .

Nas Figuras (7) e (8) estão representados os resultados obtidos para  $Re=400$  e  $Re=1000$ , e três tamanhos de malha aleatória de formato representado na Fig (6.b), com variação do número de volumes. Observa-se uma pequena oscilação nas soluções obtidas, que acredita-se ser decorrente da aleatoriedade da malha. Estas oscilações desaparecem com o refino da malha, juntamente com a difusão numérica, e a solução obtida aproxima-se da solução de referência, validando o esquema numérico proposto.

As Figuras (9) e (10) apresentam as soluções obtidas para a formulação proposta e as metodologias (Maliska e Vasconcellos, 2000; Schneider e Raw, 1987) para  $Re=400$  e  $Re=1000$ , e malha quadrilátera  $15 \times 15$  representada na Fig. (6.a). Em todas as metodologias são empregadas funções de interpolação baseadas no número de Peclet da malha. A metodologia (Maliska e Vasconcellos, 2000) emprega a solução segregada das equações, enquanto que a metodologia proposta e a metodologia (Schneider e Raw, 1987) empregam a solução simultânea.

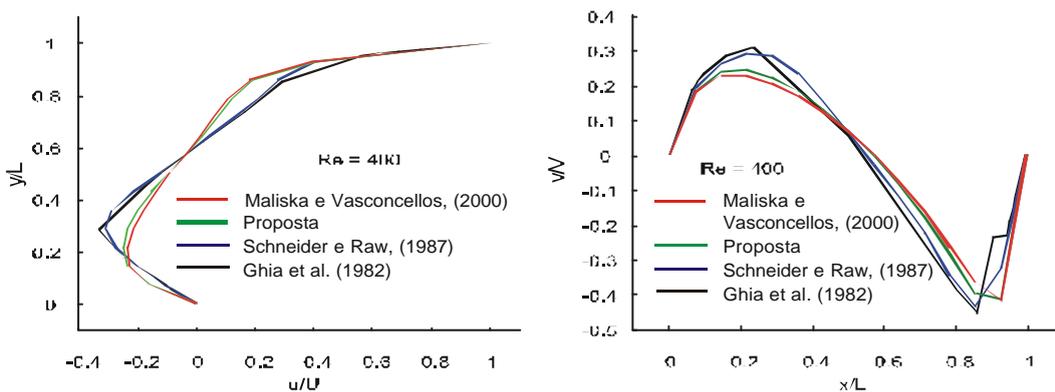


Figura 9. Componente u de velocidade em  $x/L=0.5$ , e componente vertical de velocidade em  $y/L=0.5$   $Re=400$ .

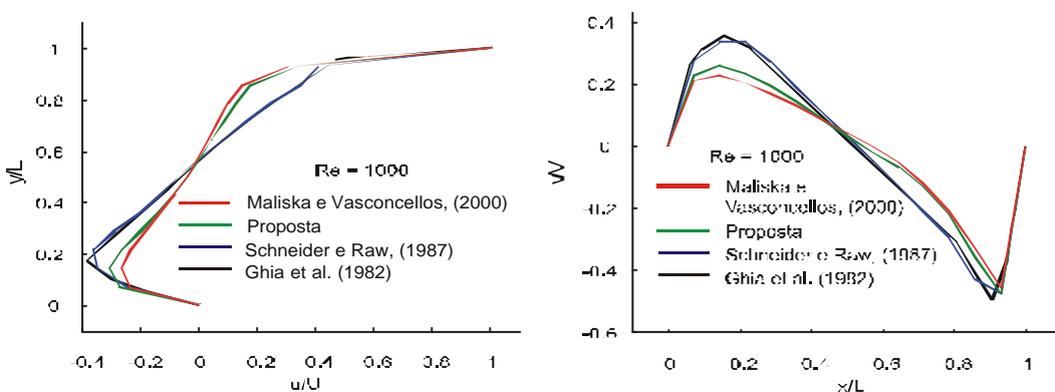


Figura 10. Componente u de velocidade em  $x/L=0.5$ , e componente vertical de velocidade em  $y/L=0.5$   $Re=1000$ .

Os resultados apresentados mostram que solução simultânea das equações foi implementada com sucesso, validando o esquema numérico aplicado. A pequena diferença encontrada entre a formulação proposta e a metodologia (Maliska e Vasconcellos, 2000) é decorrente da função de interpolação empregada, que, no caso da metodologia

proposta, avalia os termos convectivos como média ponderada com o ângulo e possui ainda um gradiente de pressão, conforme a Eq.(30).

Uma das vantagens do emprego da solução simultânea das equações é o aumento da faixa de convergência da solução para valores do incremento temporal  $\Delta T$ , tornando mais estável o esquema numérico. A Figura (11) apresenta o tempo de computação gasto na solução do problema teste, em função do incremento temporal e da redução de resíduo  $R/R_i$  na solução iterativa da matriz de coeficientes. O micro computador utilizado possui processador Pentium III, 1000 MHz, com 256 MB RAM. Os gráficos foram obtidos para  $Re=100$  e  $Re=400$ , em uma malha quadrilátera  $15 \times 15$ . O algoritmo de solução da matriz é o SOR com coeficiente de relaxação 0.4. O critério de convergência é a variação da norma euclidiana dos resíduos de todas as variáveis inferior a  $1.0E-7$ . As linhas azul e vermelha indicam os menores valores em cada direção.

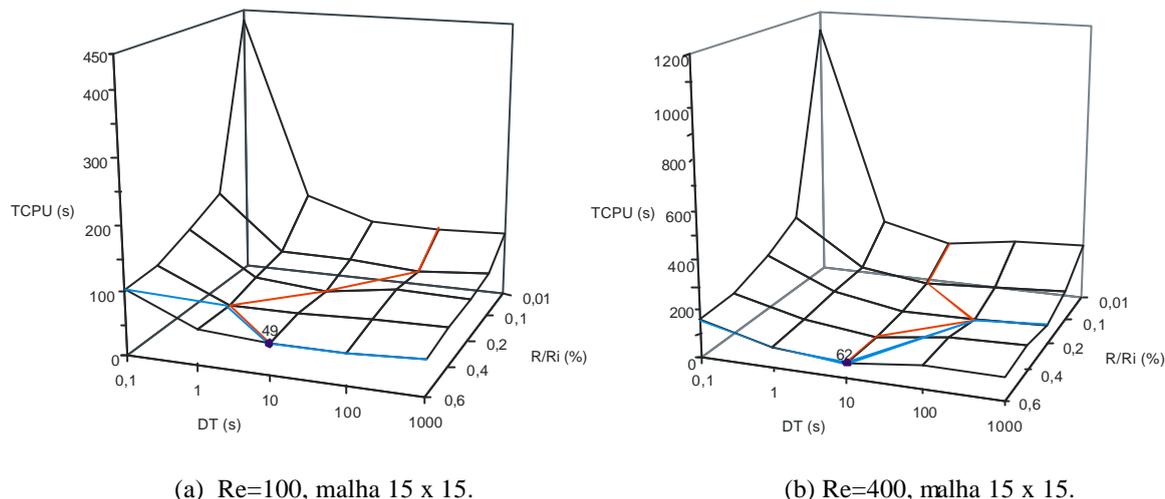


Figura 11. Tempo de CPU em função do incremento temporal  $\Delta T$  e da redução de resíduo  $R/R_i$ .

Os resultados da Fig. (11) mostram que para o problema proposto e na malha empregada, foi possível resolver matriz de coeficientes empregando um algoritmo iterativo de solução, e ainda, que uma pequena redução no resíduo das equações foi suficiente para se prosseguir com a atualização dos coeficientes. Note que a implementação de um algoritmo de solução com estas características é simples, e seu uso não representa grande custo computacional porque não há a inclusão de novos coeficientes na matriz. A faixa de estabilidade da solução também fica ampliada quando se adota uma pequena redução no resíduo da matriz.

#### 4. Conclusões

O objetivo deste trabalho foi a implementação de uma metodologia para a solução numérica de escoamentos bidimensionais incompressíveis, usando malhas não-estruturadas e formada por elementos unidirecionais, empregando a solução simultânea das equações. A adoção da solução simultânea do sistema de equações gera melhor estabilidade da solução, aumentando a faixa de convergência para valores do incremento temporal  $\Delta T$ . A avaliação dos fluxos difusivos é realizada usando dois pontos, como nos esquemas numéricos vistos em (Heinemann e Brand, 1989; Quandalle, 1993, Sammon, 2000). A metodologia (Maliska e Vasconcellos, 2000) que emprega a solução segregada das equações, e a metodologia (Schneider e Raw, 1987), que emprega a solução simultânea, serviram como referência para a comparação do acoplamento aqui proposto.

Para validação dos esquemas numéricos apresentados, o problema teste escolhido foi a convecção forçada em cavidade quadrada, que é um problema clássico para teste de algoritmos, com solução de referência em Ghia et al. (1982).

O esquema de solução simultânea das equações baseou-se nos desenvolvimentos apresentados em (Schneider e Raw, 1987; Roth, 1997), com modificações principalmente na forma de abordagem das equações de Navier-Stokes, no que se refere aos termos do divergente. A metodologia apresentada é menos dispendiosa computacionalmente que a metodologia (Schneider e Raw, 1987) por utilizar um esquema de discretização mais simples, semelhante ao usado nas metodologias (Heinemann e Brand, 1989; Maliska e Vasconcellos, 2000; Sammon, 2000) que é baseada em interpolações unidirecionais.

Os resultados apresentados mostram que a solução simultânea das equações foi implementada com sucesso, validando o esquema numérico proposto. Os resultados foram obtidos com estabilidade, demonstrando que soluções acopladas podem ser aplicadas também em esquemas numéricos baseados em interpolações unidirecionais, com reduzida complexibilidade computacional e utilizando algoritmos de solução de matrizes iterativos com pequena redução no resíduo.

## 5. Referências

- Baliga, B.R. and Patankar, S.V., 1980, "A New Finite Element Formulation for Convection Diffusion Problems", Numerical Heat Transfer, Vol.3, pp. 393-409.
- Chorin, A.J., 1971, "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equation", Math. of. Computation, Vol.22, pp.745-762.
- Galpin, P.F., Van Doormaal, J.P. and Raithby, G.D., 1985, "Solution of the Incompressible Mass and Momentum Equations by Application of a Coupled Equation Line Solver", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.5, pp. 615-625.
- Ghia, U., Ghia, K.N., and Shin, C.T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", Journal of Computational Physics, Vol.48, pp. 387-411.
- Heinemann, Z.E. and Brand, C.W., 1989, "Gridding Techniques in Reservoir Simulation", 1<sup>st</sup>/2<sup>nd</sup> Stanford Univ. and Leoben Mining Univ. Reservoir Simulation Inf. Forum, Alpbach, Austria, pp. 339-425.
- Maliska, C.R., 1995 "Transferência de Calor e Mecânica do Fluidos Computacional", Ed. LTC, Rio de Janeiro, Brasil, 424 p.
- Maliska, C.R. and Vasconcellos, J.F.V., 2000, "An Unstructured Finite Volume Procedure for Simulating Flows with Moving Fronts", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier Science S.A., Vol.182, pp. 401-420.
- Mathur, S.R, and Murthy, J.Y., 1997, "A Pressure Based Method for Unstructured Meshes", Numerical Heat Transfer, part B, Vol.31, pp. 195-215.
- Patankar, S.V. and Spalding, D.B., 1972, "A Calculation Procedure for Heat Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows", Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.15, pp. 1787-1806.
- Peaceman, D.W., 1996, "Calculation of Transmissibilities of Gridblocks defined by arbitrary corner point geometry", Paper SPE 37306, Unsolicited, pp. 28.
- Quandalle, P., 1993, "Eighth SPE Comparative Solution Project: Gridding Techniques in Reservoir Simulation", Paper SPE 25263 presented at the 12<sup>st</sup> Symposium on Reservoir Simulation, New Orleans, LA, pp. 343-357.
- Roth, M.J., 1997, "A Control Volume Based Finite Element Method for Solving the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations", Master Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada.
- Sammon, P.H., 2000, "Calculation of Convective and Dispersive Flows for Complex Corner Point Grids", Paper SPE 62929 presented at the 2000 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, pp. 11.
- Schneider, F.A. e Maliska, C.R., 2001, "Discretização de Equações para Problemas Convectivos-Difusivos Usando Elementos Unidirecionais", Relatório Interno, SINMEC/EMC/UFSC, RT-2001-12, Florianópolis, SC, Brasil, pp.35.
- Schneider, G.E. and Raw, M.J., 1987, "Control Volume Finite Element Method for Heat Transfer and Fluid Flow Using Co-located Variables – 2: Application and Validation", Numerical Heat Transfer, Vol.11, pp. 391-400.
- Taniguchi, N. and Kobayashi, T., 1991, "Finite Volume Method on the Unstructured Grid System", Computer & Fluids, Vol.9, n<sup>o</sup>.34, pp. 287-295.
- Zedan, M.G., 1983, "Simultaneous Variable Solution Procedures for Velocity and Pressure in Incompressible Fluid Flow Problems", Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada.

## SIMULTANEOUS NUMERICAL SOLUTIONS FOR INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW USING THE FINITE VOLUME METHOD FOR UNSTRUCTURED GRIDS

### Fábio A. Schneider

SINMEC – Computational Fluid Dynamics Laboratory  
 Mechanical Engineering Department – UFSC – P.O. Box 476 – 88040-970 – Florianópolis – SC, Brazil  
[schneider@sinmec.ufsc.br](mailto:schneider@sinmec.ufsc.br)

### Clovis R. Maliska

SINMEC – Computational Fluid Dynamics Laboratory  
 Mechanical Engineering Department – UFSC – P.O. Box 476 – 88040-970 – Florianópolis – SC, Brazil  
[maliska@sinmec.ufsc.br](mailto:maliska@sinmec.ufsc.br)

**Abstract.** *This work presents a numerical method for the solution of the two-dimensional incompressible fluid flow, using the Finite Volume Method in unstructured grids. The simultaneous solution of the mass and momentum conservation equations is applied giving a unique matrix of coefficients. The formulation applied reduces the complexity of the algorithm when compared to the segregated methods. These grids have better adoption for simple and complex domains, allowing local refinement in specific regions. The employed mesh and the construction of the control volumes are based on the element discretization, what facilitates and normalizes the computational implementation. The formulation is presented in the basic form. The method shown is compared with other numerical methods that use unstructured grids and simultaneous solutions.*

**Keywords.** *numerical method, unstructured grids, incompressible fluid flow, simultaneous solutions.*