

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS
BASEADO EM ELEMENTOS APLICADO A
PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

Tese submetida à

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

para obtenção do grau de

DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

GERSON FILIPPINI

Florianópolis, outubro de 2011.

Catlogação na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

F483 Filippini, Gerson

O método de volumes finitos baseado em elementos aplicado a problemas de elasticidade [tese] / Gerson Filippini ; orientador, Clovis Raimundo Maliska. - Florianópolis, SC, 2011.

259 p.: il., grafs., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Método dos volumes finitos. I. Maliska, C. R. (Clovis Raimundo). II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU 621

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA

**O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS
APLICADO A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE**

GERSON FILIPPINI

Esta tese ou dissertação foi julgada adequada para
a obtenção do título de

DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
sendo aprovada em sua forma final.

Prof. Clóvis R. Maliska (Orientador)

Prof. Júlio César Passos (Coordenador)

Banca Examinadora

Prof. Clóvis R. Maliska, Ph.D.
(Presidente)

Prof. Guillermo Juan Creus, Dr.

Prof. Renato Barbieri, Dr.
(Relator)

Prof. Eduardo A. Fancello, D.Sc.

Prof. Severino Pereira Prof.
Cavalcanti Marques, Dr.

Prof. Antônio Fábio Carvalho
da Silva, Dr.Eng.

DEDICATÓRIA

Ao Senhor Jesus.

AGRADECIMENTOS

- Ao professor *Clóvis R. Maliska* que sempre foi um entusiasta na área, além de sempre estar presente e compreensivo em todas etapas do processo de desenvolvimento deste trabalho;
- Ao professor *Miguel Vaz Jr* pelo seu apoio técnico e humano, bem como sua prontidão em auxiliar o desenvolvimento de áreas de sua competência;
- À Universidade Federal de Santa Catarina (*UFSC*) e ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica (*POSMEC*), por possibilitar a realização do presente trabalho;
- À *equipe do SINMEC* que direta ou indiretamente contribuíram na elaboração deste trabalho;
- À Universidade Tecnológica Federal do Paraná (*UTFPR*) pelo apoio estratégico indispensável à elaboração do trabalho;
- À *CAPES* pelo apoio através de bolsa de estudos;
- À *Juliana A. Filippini*, que apesar do pouco tempo acompanhando o trabalho, sempre se dispôs em auxiliar nas tarefas pertinentes a este, em atividades acessórias e com grande apoio motivacional me auxiliou até a entrega da versão final da tese;
- A meus Pais, *Olímpio e Libera*, que nunca mediram esforços para auxiliar em tudo o que fosse possível, seja através de um abraço, de uma palavra amiga, uma boa noite de sono e até uma festa de aniversário para os netos, em plena viagem à cidade de Brusque (SC);
- A meu irmão *Francisco Filippini* e sua família pela sua admiração e incentivo;
- Aos amigos, *Romário e Cida, Marlon e Lu*, pela hospitalidade, compreensão e amizade despendida a mim e a *Juh* durante as últimas etapas do doutorado;
- Ao *SENHOR JESUS*, ao qual devo minha vida e está efetivamente presente em todas as situações daqueles que o buscam.

Obrigado!

“E o enchi do Espírito de Deus, de sabedoria, e de entendimento, e de ciência, em todo o labor, para elaborar projetos, ...”

Êxodo 31:3-4a

RESUMO

Nas últimas duas décadas, pesquisas sobre a aplicação de métodos numéricos que utilizam o conceito de volume de controle, na área estrutural, tem sido foco de diversos trabalhos. Este trabalho, por sua vez, faz um apanhado *abrangente* de diversas referências nesta área, buscando caracterizar de uma forma mais clara o que foi desenvolvido até o momento em termos de volumes finitos aplicados a problemas de mecânica estrutural. Além disso, procura desenvolver uma *documentação* detalhada, sobre o procedimento de discretização do problema utilizando a técnica de Volumes Finitos Baseado em Elementos (EbFVM), onde consta os conceitos físicos, matemáticos e computacionais envolvidos.

A seguir, apresenta uma série de novos testes, na maioria deles ainda não constantes na literatura, são resolvidos alguns problemas convenientemente escolhidos, os quais verificam o desempenho do método juntamente com os testes. Assim, como ocorre nas referências consultadas, os resultados aqui apresentados se demonstraram promissores e encorajadores, no sentido de que o método se demonstra estável e coerente em relação a soluções-referências disponíveis, tanto com relação às variáveis primárias (deslocamentos) como nas variáveis recuperadas (tensões), também apresenta uma implementação numérica e computacional relativamente simples. Além disso, o principal elemento impulsor do trabalho nesta área tem sido a solução de problemas de multifísica, como é o caso da interação fluido-estrutura.

O trabalho conclui com uma análise detalhada dos testes e problemas propostos, mostrando que os resultados obtidos são equiparados com as soluções fornecidas pelo método de elementos finitos lineares e apresentam baixíssimos erros quando comparados com soluções analíticas. Por fim, o EbFVM é recomendado para soluções de problemas estruturais.

ABSTRACT

In the last two decades, research on the application of numerical methods using the concept of control volume to the structural area has been the focus of several works. This study provides a comprehensive overview of various references in this area, seeking to characterize more clearly what has been developed on the application of the finite volume method to problems of structural mechanics. It also aims at developing a detailed documentation on the discretization procedure of the problem using the Element based Finite Volume Method (EbFVM), encompassing physical, mathematical and computational concepts.

This work presents a series of new verification tests, most of which still not reported in the literature. The test problems were carefully defined in order to verify the performance of the method against analytical solutions and the finite element method. The computational implementation proposed in this work is relatively simple and the simulations have shown promising and encouraging results, yielding stable and consistent solutions with respect to both displacements and nodal stresses (obtained using stress recovery techniques).

Based upon the aforementioned assessment, the EbFVM was found suitable to application to structural problems in large scale computation and also in multi-physics problems.

ABREVIATURAS E SIGLAS

2D, 3D	Duas e Três dimensões;
AH	Anti-horário;
BEM ¹	Método de Elementos de Contorno;
CC	Condição de Contorno;
CC-FV ²	Volumes Finitos Centrados na Célula;
CDN	Cômputo Direto no Nó;
CFD ³	Dinâmica de Fluidos Computacional;
CV-FV ⁴	Volumes Finitos Centrados no Vértice;
EbFVM ⁵	Método de Volumes Finitos com base em Elementos;
EPT	Estado Plano de Tensão;
EPD	Estado Plano de Deformação;
Ex	Extrapolação;
FDM ⁶	Método das Diferenças Finitas;
FE ⁷	Elementos Finitos;
FEM ⁸	Método de Elementos Finitos;
FV ⁹	Volumes Finitos;
FVM ¹⁰	Método de Volumes Finitos;
GP ¹¹	Ponto de Gauss;
LN	Linha Neutra;
<i>pi</i>	Ponto de integração;
PNDL	<i>Patch</i> Nodal para Deslocamento Linear ¹² ;
SG	Suavização Global;
SL	Suavização Local;
SOR ¹³	Sobre-relaxação Sucessiva;
SPR	“ <i>Superconvergent Patch Recovery</i> ” ¹⁴ ;
SVC	Sub-Volume de Controle;
VC	Volume de Controle.

1 Comumente referenciado em inglês como *Boundary Element Method* – BEM.

2 Comumente referenciado em inglês como *Cell-Centered Finite Volume* – CC-FV.

3 Comumente referenciado em inglês como *Computational Fluid Dynamics* – CFD.

4 Comumente referenciado em inglês como *Cell-Vertex Finite Volume* – CV-FV.

5 Comumente referenciado em inglês como *Element-based Finite Volume Method* - EbFVM.

6 Comumente referenciado em inglês como *Finite Difference Method* – FDM.

7 Comumente referenciado em inglês como *Finite Element* – FE.

8 Comumente referenciado em inglês como *Finite Element Method* – FEM.

9 Comumente referenciado em inglês como *Finite Volume* – FV.

10 Comumente referenciado em inglês como *Finite Volume Method* – FVM.

11 Comumente referenciado em inglês como *Gauss Point* – GP.

12 O termo “*Patch*” pode ser melhor entendido como “*Agrupamento*”.

13 Comumente referenciado em inglês como *Successive Over-Relaxation*.

14 Nossa tradução: “*Agrupamento de recuperação super-convergente*”.

SÍMBOLOS

Arábicos

Constantes

E	Módulo de Young, módulo de elasticidade ou módulo elástico;
\mathbf{i}	Vetor "identidade" $\{1,1,0\}$;
\mathbf{I}	Tensor identidade;
\mathbf{O}	Matriz nula;

Outros

\mathbf{b}	Vetor força de corpo por unidade de volume;
en_{MQ}	Erro nodal médio quadrático;
er_{max}	Erro relativo máximo;
$\ \mathbf{e}_\sigma\ $	Erro na norma da energia global;
$\ \mathbf{e}_\sigma\ _{L2}$	Norma L2 do erro na tensão global;
$\ \mathbf{e}_\sigma^i\ $	Erro na norma da energia nodal;
$\ \mathbf{e}_\sigma^i\ _{L2}$	Norma L2 do erro na tensão nodal;
\mathbf{f}_i	Vetor força do sistema global discretizado;
\mathbf{u}	Vetor deslocamento;
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor aceleração;
\mathbf{v}	Vetor velocidade;
\mathbf{n}	Vetor unitário normal a certa área;
\mathbf{o}	Vetor nulo;
\mathbf{t}	Vetor densidade de força agindo em certa área;
\mathbf{D}	Matriz rigidez elástica;
\mathbf{E}	Tensor deformação de Green;
\mathbf{E}_0	Parcela linear do tensor deformação de Green;
\mathbf{E}_{nl}	Parcela não linear do tensor deformação de Green;
\mathbf{F}	Gradiente do tensor deformação;
\mathbf{K}	Matriz rigidez do sistema global discretizado;
\mathbf{S}	Tensão desviadora;
A	Representa certa área ou constante elástica;
I_1, I_2, I_3	Primeiro, segundo e terceiro invariantes do tensor tensão;
J	Jacobiano da transformação $J \left(\frac{x,y,z}{r,s,t} \right)$;
V	Representa certo volume;
n_{elem}	Número total de elementos;

n_{nptg}	Número total de pontos discretos (nós globais);
n_{nptl}	Número de pontos por elemento (nós local);
p	Pressão (hidrostática);
\dot{r}	Taxa de geração de calor;
R_{acima}	Região percentual com erro superior ao máximo da legenda;
Ver_{max}	Variação do erro em relação a um máximo;

Gregos

Constantes

α	Coefficiente de expansão térmica;
ν	Coefficiente de Poisson;
ρ	Massa específica;

Outros

δ_{ij}	Delta de Kronecker;
$\varepsilon, \varepsilon_{ij}$	Tensor/Vetor deformação total;
ε^e	Tensor/Vetor deformação elástica;
ε^p	Tensor/Vetor deformação plástica;
ε^T	Tensor/Vetor deformação térmica;
$\dot{\varepsilon}$	Tensor taxa de deformação;
Π	Energia potencial total;
σ, σ_{ij}	Tensor/Vetor tensão de Cauchy;
σ_H	Tensor tensão hidrostático;
σ^0	Primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff;
$\tilde{\sigma}$	Segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff;
$\hat{\sigma}, \hat{\sigma}_i$	Tensão suavizada global com $i = 1 \dots n_{nptg}$;
$\sigma^{sl}, \sigma_i^{sl}$	Tensão suavizada local com $i = 1 \dots n_{nptl}$;
σ^{Ex}	
σ_i^{Ex}	Tensão extrapolada com $i = 1 \dots n_{nptl}$;
σ_{ij}^*	Tensor/Vetor tensão de Cauchy aproximado.
σ_{rr}	Componente radial da tensão no sistema axi-simétrico;
$\sigma_{\theta\theta}$	Componente tangencial da tensão no sistema axi-simétrico;
ξ ou r	Coordenada parametrizada para elementos finitos;
η ou s	Coordenada parametrizada para elementos finitos;

Matemáticos

\mathbb{R}^3	Espaço vetorial Euclidiano;
\mathbb{S}^h	Espaço vetorial de Elementos Finitos;
Ω	Domínio no espaço \mathbb{R}^3 ;
Ω_{FE}	Domínio no espaço de Elementos Finitos, \mathbb{S}^h ;
\mathbb{N}	Representa a equação governante;
$div()$	Operador divergente;
$grad()$	Operador gradiente aplicável sobre um campo escalar;
∇	Operador diferencial <i>del</i> (mesmo que $grad()$);
$T_R()$	Operador traço;
$[\]$	Matriz;
$[\]^T$	Transposta da matriz;
$[\]^{-1}$	Inversa da matriz;
$\{ \}$	Vetor ou matriz coluna;
$\{ \}^T$	Transposta da matriz ou vetor coluna;
$\ \cdot\ $	Operador norma. Em alguns casos poderá indicar o valor absoluto do operando;
$ \cdot $	Retorna o valor absoluto do operando;
$ \mathbf{M} $	Determinante de uma matriz quadrada \mathbf{M} ;
$\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$	Produto escalar entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} ;
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Produto vetorial entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} ;
$ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} $	Forma alternativa do produto escalar entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} ;

Convenção

f	Quando letra minúscula em negrito significa vetor, $\{ \}$;
F	Quando letra maiúscula em negrito significa matriz, $[\]$;

SUMÁRIO

1-INTRODUÇÃO.....	19
1.1-O Surgimento do EbFVM.....	20
1.2-Motivação para o uso do EbFVM na Área Estrutural.....	22
1.3-Objetivo da Tese.....	26
1.3.1-Objetivos Específicos.....	26
1.3.2-Justificativas.....	27
1.4-Panorama da Tese.....	28
1.5-Trabalhos que Envolvem o Conceito de Volume Aplicado a Problemas Estruturais.....	29
1.6-Considerações sobre os Trabalhos.....	42
2-MODELO MATEMÁTICO.....	43
2.1-As Deformações Infinitesimais.....	43
2.2-Princípios de Equilíbrio.....	44
2.3-Condições de Fronteira.....	44
2.4-Forças Sobre o Corpo.....	45
2.5-Equações de Equilíbrio.....	46
2.6-Lei de Hooke Generalizada.....	46
2.6.1-Estado Plano de Tensão – EPT.....	49
2.6.2-Estado Plano de Deformação – EPD.....	49
2.6.3-Generalização da Notação Indicial para Lei de Hooke.....	50
3-MODELO NUMÉRICO.....	51
3.1-Generalidades Sobre os Métodos Numéricos.....	51
3.1.1-Partes Discretas.....	53
3.1.2-Sobre a Técnica de Obtenção das Equações Discretas.....	54
3.1.3-O Conceito de Nó Principal e a Matriz Rigidez Global.....	56
3.1.4-Matriz Rigidez Nodal e Local.....	58
3.1.5-Algoritmo Computacional.....	60
3.1.6-Visão Geral Sobre A Discretização.....	64
3.2-A Discretização no Espaço de Elementos Finitos –	66
3.2.1-Formulação Variacional.....	67
3.2.2-Método dos Resíduos Ponderados.....	68
3.2.2.1-O Método de Galerkin.....	69
3.2.2.2-Método da Colocação de Subdomínios	70
3.2.3-O Espaço e	70
3.2.4-O Método de Resíduos Ponderados Aplicado Sobre a Equação do Movimento de Cauchy.....	72
3.2.5-Aplicação do EbFVM à Elasticidade Plana.....	74
3.2.6-Montagem da Matriz Rigidez e Termo Fonte Global	85

3.3-Cômputo das Tensões	85
4-RESULTADOS.....	87
4.1-Testes Padrões.....	87
4.1.1-Patch Test.....	87
4.1.1.1-Resumo da Aplicação e Interpretação de cada Teste.....	88
4.1.1.2-Aplicação dos Testes aos Casos da Fig. 23.....	90
4.1.2-Locking Volumétrico.....	93
4.1.2.1-Simples compressão – EPD.....	94
4.1.2.2-Placa com Ranhura.....	97
4.1.3-Erros na Norma L2 e na Norma da Energia.....	99
4.1.3.1-Normas de Erros.....	101
4.1.3.2-Problema Teste “Cubic”.....	103
4.1.4-Convergência da Solução do Sistema Linear.....	112
4.1.5-Extrapolação de Richardson.....	116
4.1.5.1-Verificação da Convergência Monotônica.....	117
4.1.5.2-O Erro de Richardson e sua Ordem.....	118
4.1.5.3-Algumas Considerações.....	132
4.2-Problemas Propostos.....	132
4.2.1-Viga em Balanço.....	132
4.2.2-Tensão Cisalhante em uma Placa Bi-Engastada.....	135
4.2.2.1-Tensões Calculadas pela Teoria de Vigas.....	139
4.2.3-Problema “Cubic”.....	141
4.2.3.1-Face Direita com Deslocamento Prescrito e demais com Força Prescrita.....	143
4.2.3.2-Face Direita e Esquerda com Deslocamento Prescrito e demais com Força Prescrita.....	145
4.2.3.3-Face Direita, Esquerda e Inferior com Deslocamento Prescrito e a Face Superior com Força Prescrita.....	147
4.2.3.4-Todas Faces com Deslocamento Prescrito.....	149
4.2.3.5-Comparação entre Mapas de Erros Obtidos pelo EbFVM e pelo FEM.....	152
4.2.4-Placa Plana com Orifício Sujeita a Tração.....	172
4.2.5-Placa Plana com Concentração de Tensões devido a um Orifício.....	174
4.3-Outros Aspectos.....	178
4.3.1-Coefficientes gerados pelo EbFVM e pelo FEM-Galerkin.....	178
4.3.2-Condicionamento da Matriz Rigidez.....	196
4.3.3-Tempo de CPU.....	196
4.3.4-Desempenho dos Algoritmos de Solução.....	197
4.3.4.1-Levantamento do Custo Computacional para um Problema Teste.....	199
5-CONCLUSÃO.....	205
-APÊNDICES.....	217
-Apêndice A: Tabelas de Dados.....	218

-Tabela A.1: Erros relativos para deslocamento da LN.....	219
-Tabela A.2: Deslocamento da extremidade livre sobre a LN.....	220
-Tabela A.3: CC para extremidades esquerda e direita do problema Cubic com malha 32x16.....	221
-Tabela A.4: Tensão cisalhante sobre a LN para malha 60×6 elementos..	222
-Tabela A.5: As componentes da matriz rigidez e vetor força utilizados no Patch Test A, B, C e Simples-elemento.....	224
-Tabela A.6: Custo computacional em segundos nos diversos algoritmos de solução para o EbFVM e FEM.....	225
-Apêndice B: Aplicação de Galerkin à Elasticidade Plana.....	227
-Apêndice C: Cômputo de Tensões.....	234
-Apêndice D: Conceitos Básicos.....	245

1 INTRODUÇÃO

Projetar é uma atividade fundamental da engenharia e normalmente é embasada em dados experimentais, experiências anteriores, equações empíricas e equações que descrevem determinados fenômenos entre outras possíveis fontes de informação. Estas por sua vez podem se tornar pontos críticos quanto aos custos de projeto, seja pelo recurso humano, material e/ou espaço físico envolvido. Assim uma fonte de informação escolhida adequadamente pode otimizar além de outros aspectos o custo deste.

Alguns fenômenos envolvidos em projetos possuem equações bem definidas, desenvolvidas ainda no século XIX. Como exemplo cita-se a equação de Navier-Stokes (Claude Louis Marie Henri Navier, 1785-1836 e George Gabriel Stokes, 1819-1903), de 1822, utilizada intensamente na área de mecânica dos fluidos, também certas representações físico-matemáticas, como a representação tensorial dada pelo tensor tensão de Cauchy também chamada de *equação do movimento de Cauchy* (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857) que datam do início do século XIX.

Tanto a solução de equações que representam fenômenos como o uso dos recursos desenvolvidos pela física-matemática podem trazer informações valiosas para a área de projetos. Normalmente, no que diz respeito as equações, sua solução é obtida (quando a analítica é de difícil obtenção ou mesmo impossível) utilizando-se métodos numéricos apro-

priados. Isto normalmente ocorre em problemas com duas e três dimensões (2D e 3D) que, normalmente em situações práticas, possuem condições de contorno (CC) com certo grau de complexidade.

Atualmente alguns métodos numéricos tem recebido destaque na solução de problemas na engenharia, o Método de Elementos Finitos (FEM), o Método de Volumes Finitos (FVM) e o Método dos Elementos de Contorno¹⁵ (BEM). Os primeiros métodos que surgiram foram o Método das Diferenças Finitas (FDM) e o FEM. O FDM surgiu para resolver equações diferenciais onde as derivadas são substituídas pela razão incremental que converge para o valor exato quando o incremento tende a zero. Quanto ao campo de utilização, este método inicialmente foi empregado na solução de problemas de *mecânica dos fluidos*, por outro lado, o FEM foi utilizado predominantemente desde sua concepção, na área de *mecânica estrutural*.

Neste momento inicial, onde os métodos estavam em aperfeiçoamento, surgem tentativas de se aplicar o FDM e o FEM a escoamentos com advecção dominante. No entanto as tentativas foram de pouco sucesso, e o FVM surge como uma excelente alternativa para substituir a aplicação destes na área de mecânica de fluidos, pois a discretização tem como princípio fazer o balanço de certa *quantidade física*, e.g. a *Quantidade de Movimento* (que para uma aproximação Euleriana é dada pela aplicação da 2ª. Lei de Newton a um volume de controle fixo V), ao redor de um Volume de Controle (VC). Isto por sua vez lhe confere o atributo de ser conservativo no VC e no domínio, agregando assim ao FVM maior estabilidade ao tratar com problemas de fluidos onde a ocorrência da advecção é frequente.

Além disso a *Equação do Movimento de Cauchy*, pode ser obtida $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$ diretamente da equação da conservação da quantidade de movimento para fluidos: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \rho \ddot{\mathbf{u}} + (\nabla \cdot \dot{\mathbf{u}}) \dot{\mathbf{u}}$, onde o segundo termo do lado direito (termo advectivo) é nulo para o caso de estruturas. Portanto o processo de discretização da equação do movimento é o mesmo tanto para fluidos como para estruturas.

1.1 O SURGIMENTO DO EbFVM

A técnica básica do FEM surgiu por volta do ano 1941 quando

¹⁵ Método computacional para a solução de sistemas de equações diferenciais na forma integral. É aplicado na engenharia em áreas como: mecânica dos fluidos, acústica, eletromagnetismo e estudo de fraturas. O método possui melhor desempenho que o FEM em certas circunstâncias, como por exemplo, quando o domínio de estudo for infinito ou semi-infinito.

Hrenikoff apresentou a solução de um problema de elasticidade usando o "frame work method". Posteriormente o termo Elementos Finitos (FE) foi designado por Clough em 1960 (CHANDRUPATLA, 1991, p. 2) e os primeiros estudos voltados ao FEM, tinham como principal objetivo a solução de problemas de mecânica estrutural elástica. Ao utilizá-lo desejava-se determinar o campo de deslocamentos de grandes estruturas bem como o as respectivas tensões envolvidas. Este foi o elemento impulsor para o desenvolvimento do FEM. Um grande número de pesquisas e desenvolvimentos realizados nesta área fez com que o FEM ficasse permanentemente associado aos problemas estruturais de engenharia mecânica e civil (MACKERLE, 1995 apud SOBRINHO, 2006, p. 1).

Por outro lado houveram esforços para empregar o FEM na área de fluidos e resultaram na utilização das funções de Petrov-Galerkin (que ponderam os efeitos difusivos e advectivos) e nas formulações onde estas funções são desenvolvidas ao longo da linha de corrente, possibilitando assim a aplicação do FEM em escoamentos (MALISKA, 2004, p. 5).

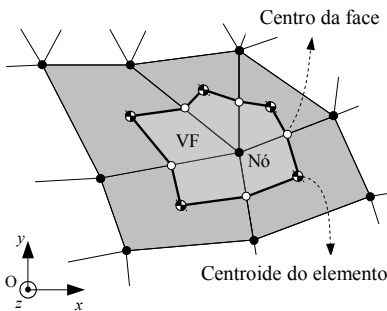


Figura 1: Volume para malha não estruturada com centro sobre o nó.

A facilidade em tratar problemas com geometrias complexas, desde o início de seu desenvolvimento, esteve presente no FEM. Por outro lado, no FVM, esta facilidade foi incorporada somente após o final da década de 70, com malhas estruturadas curvilíneas através dos trabalhos de THOMPSON e outros, e para malhas não estruturadas através de Baliga e Patankar (BALIGA; PATANKAR, 1979 apud PATANKAR, 1980).

A montagem do VF proposta por Baliga e Patankar é apresentada na Fig. 1. Nesta é apresentado um caso 2D onde os VF's são montados sobre uma malha de elementos e são delimitados pelas linhas que unem o centróide do elemento (●) ao centro da face (○) e assim sucessivamente até delimitar por completo a fronteira do VF ao redor de certo nó. Assim, para o caso 2D, cada elemento quadrilátero será dividido em quatro partes e cada elemento triangular será dividido em três partes. Isso pode ser visto na Fig. 2 onde são mostrados um elemento quadrilátero e um triangular divididos em 4 e 3 Sub-Volumes de controle (SVC) respectivamente.

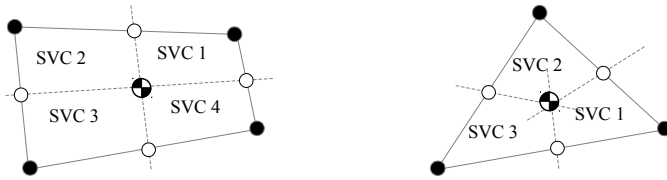


Figura 2: Elementos subdivididos em sub-volumes de controle (SVC).

Esta técnica para definição do FV, que se utiliza do nó como “centro”¹⁶, é referida de diversas maneiras. Algumas formas de se referir a esta técnica são listadas a seguir:

- a) *Control-Volume-based Finite Element Method* utilizado por Pa-tankar (1980, p. 160) e por Ferziger e Perić (1999, p. 237);
- b) *Element-based Finite Volume Method (EbFVM)* por Maliska (2004, p. 6). Esta denominação será utilizada no presente trabalho, exceto na revisão bibliográfica onde procurou-se manter a nomenclatura dos autores;
- c) *Vertex-based Finite Volume Method* por Taylor, Bailey e Cross (1999, p. 1) bem como por McBride, Croft e Cross (2003, p. 351);
- d) *Cell-vertex Finite Volume Method (CV-FV)* por Slone *et al.* (2003, p. 76).

1.2 MOTIVAÇÃO PARA O USO DO EbFVM NA ÁREA ESTRUTURAL

Nas últimas duas décadas, surgiu um interesse em desenvolver aproximações em Mecânica Estrutural que utilizassem o conceito de Volume Finito. Este interesse inicialmente veio do desejo de utilizar, em problemas estruturais, algoritmos amplamente testados no contexto de Fluidos, visando a solução acoplada da interação entre o movimento de fluidos e a deformação da estrutura. Como exemplo, pode-se citar os problemas de linhas de vapor sob pressão, vibrações induzidas por escoamentos sobre estruturas flexíveis, escoamentos aerodinâmicos comumente encontrados na indústria aeroespacial e automotiva, ação dos ventos sobre construções entre outros. Esta estratégia permite a análise da interação entre **escoamento**, **transferência de calor** e **deformação** da estrutura sob o mesmo foco de FV, o que *facilita o estudo das proprie-*

¹⁶ Normalmente o nó da malha não coincide com o centro geométrico do FV. Isso merece uma análise aprofundada em trabalhos futuros, avaliando o impacto de ter-se ou não o centro geométrico do FV coincidente com o nó.

dades e variáveis acopladas do problema.

Alguns trabalhos pioneiros que utilizaram Volumes Finitos (FV) em problemas estruturais surgiram no início dos anos 90 com Zienkiewicz e Oñate (1990), onde foram feitas análises iniciais sobre a formulação do FVM e do FEM. Neste trabalho, o FVM é avaliado como uma classe particular do FEM chamada *Subdomain Collocation Method*¹⁷.

Além disso Wilkins (1964 apud ZIENKIEWICZ e OÑATE 1990) é citado como provavelmente tendo sido o que introduziu o FVM na área estrutural. Posteriormente outros artigos também são publicados, porém na sua grande parte preocuparam-se principalmente com comparações entre as formulações matemáticas dos dois métodos (FVM e FEM-Galerkin) aplicados a problemas de estruturas, com problemas teste de aplicações em engenharia e alguns poucos testes de desempenho, deixando uma lacuna na análise do FVM com relação a: *Convergência* da solução numérica, *Patch Test*¹⁸, *locking*¹⁹, *tensões* obtidas pelo pós-processamento do campo de deslocamento, erro no campo de tensões e ordem do erro mais especificamente utilizando a técnica de *extrapolação de Richardson*.

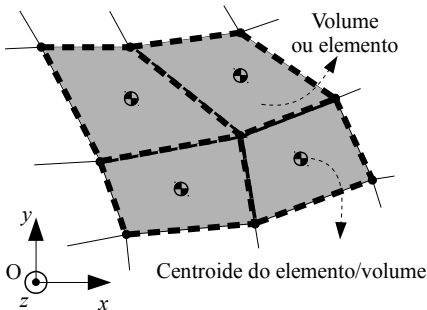


Figura 3: Volume para malha não estruturada com centro no centroide do elemento.

Retomando a ideia de se utilizar o FVM em problemas estruturais, mais especificamente em problemas de interação fluido-estrutura, uma discussão sistemática da aplicação do FVM à mecânica estrutural foi retomada por Zienkiewicz e Oñate (1990). Neste trabalho é abordada uma comparação entre o FVM e o FEM-Galerkin com a perspectiva de que o primeiro é um caso particular do Método

17 Nossa tradução: “Método da Colocação de Subdomínio”. Método que se utiliza do mesmo conceito de formação de FV que o apresentado na Fig. 1. Este método será detalhado adiante neste trabalho.

18 Nossa tradução: “Teste de remendo”. É uma tradução pobre, pois esse teste refere-se a verificação do comportamento da solução numérica frente às conexões (remendos) entre os elementos e às distorções presentes nos elementos da malha.

19 Espécie de “travamento”: Problema típico em mecânica estrutural quando o coeficiente de Poisson tende a 0,5. Ou ainda, fenômeno no qual os deslocamentos localizados são pequenos e irreais.

dos Resíduos Ponderados. Foram avaliados os esquemas de Célula Centrada e Vértice Centrado para Volumes Finitos, paralelamente com Galerkin, para a solução exata de problemas unidimensionais. A técnica de montagem do FV utilizando vértice centrado já foi mostrado na Fig. 1 e para montagem do FV utilizando célula centrada é ilustrada na Fig. 3, onde o FV é o próprio elemento, e o *ponto* onde são computadas as propriedades do volume é o centroide do elemento.

Posteriormente, Fryer *et al.* (1991), apresentam um trabalho utilizando-se de volume de controle para resolver problemas de elasticidade em malhas não estruturadas. Suas referências são: a tradicional obra em FV - *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* de Patankar (1980) e *The Finite Element Method in Engineering Science* de Zienkiewicz (1971). Além disso escreve quanto ao uso de FV:

"The procedure is compared favorably to conventional finite element (FE) approaches with regard to accuracy on a number of standard test problems that demonstrate the ability of the CV-UM²⁰ procedure to model constraints on the boundary and within the domain, boundary loads, body forces throughout the domain induce by a temperature distribution, multimaterial problems, and irregular geometries.²¹";

Em 1992 Lahrmann apresenta um trabalho onde a formulação para FV é abordada para geometrias complexas em problemas bidimensionais. O método é testado em dois problemas teste na área estrutural (dois *Patch Test*) utilizando elementos quadrilaterais. O *Patch Test* é utilizado para testar a *consistência, estabilidade e a implementação do código computacional* (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU , 2006, p. 329). O autor aponta que o FEM-Galerkin apresentou um *comportamento não físico* em certa região quando submetido ao *Patch Test*. Por outro lado o FV apresentou um comportamento dentro do esperado e conclui o trabalho com a seguinte observação favorável ao FV:

"The main advantage for an element formulation for

20 Comumente referenciado em inglês como *Control Volume-Unstructured Mesh – CV-UM*.

21 Nossa tradução: "O procedimento é comparado favoravelmente com relação a aproximação convencional por Elementos Finitos com respeito a precisão em um número de problemas teste padrões que demonstram a habilidade do modelo obtido pela imposição sobre a fronteira e dentro do domínio, de forças na fronteira, forças de corpo no domínio induzidas neste por distribuição de temperatura, por problemas com multi-material, e com geometria irregular."

*the finite difference and volume methods lies mainly in the absence of a numerical integration. Therefore the algebraic computations are faster. Furthermore, in some cases the results are even better compared to the finite element method.*²²

Um trabalho bastante conhecido: *Finite Volumes and Finite Elements: Two "Good Friends"*²³ é divulgado por Idelsohn e Oñate em 1994. Neste é apresentado um estudo comparando os dois métodos (FVM e FEM-Galerkin) para problemas elípticos, difusão-convecção e escoamento, mostrando que os dois procedimentos têm semelhança na implementação, discretização e aproximação. Além disso, foi demonstrado que, em muitos casos, ambas as técnicas são completamente equivalentes.

Onãte, Cervera e Zienkiewicz (1994), apresentam uma formulação em FV para mecânica estrutural também aplicável a geometrias complexas. O artigo, é uma revisão e ampliação dos artigos de Zienkiewicz e Oñate (1990) e Idelsohn e Oñate (1994). Alguns pontos adicionais são abordados. Um deles discorre sobre a causa da impopularidade do FVM para aplicações em mecânica estrutural. Essa impopularidade seria consequência do FVM ter menos precisão que o FEM quando este utiliza o método de Galerkin na solução de problemas com *operador auto-adjunto* (elípticos).

O artigo prossegue fazendo algumas observações a respeito do tempo de CPU e sugerindo que este não seria uma chave para o sucesso do FVM em mecânica estrutural. No entanto, o presente trabalho apresenta testes onde a montagem do sistema de equações para o EbFVM é conseguida num tempo inferior ao tempo necessário para o FEM-Galerkin. O autor ainda faz a consideração:

*"The cell centered scheme, while avoiding the above difficulty, involves complicated element subdivisions."*²⁴. (ZIENKIEWICZ e OÑATE, 1990, p. 188)

22 Nossa tradução: "A principal vantagem para uma formulação com base em elementos para os métodos de diferenças finitas e de volumes finitos reside principalmente na ausência de uma integração numérica. Por conseguinte, os cálculos algébricos são mais rápidos. Além disso, em alguns casos, os resultados são ainda melhores em relação ao método dos elementos finitos." Obs: Em FEM-Galerkin a integração é no "volume" do elemento e em FV a integração é na superfície (fronteira) do volume.

23 Nossa tradução: "Volumes Finitos e Elementos Finitos: Dois "Bons Amigos" "

24 Nossa tradução: "O esquema centrado na célula, por um lado evita a dificuldade acima, por outro envolve subdivisões complicadas do elemento."

Porém esta consideração é um tanto controversa, já que o método EbFVM utiliza-se das vantagens da parametrização para “automatizar” todo processo de integração nas superfícies do volume de controle. Assim da mesma forma como os pontos de Gauss para o FEM-Galerkin devem ser definidos em um elemento e tem posição (no sistema paramétrico) sempre fixa, os pontos de integração (de Gauss) também são definidos nas superfícies do VC de forma sempre fixa.

1.3 OBJETIVO DA TESE

O presente trabalho tem por objetivo principal:

- *Desenvolver e verificar* o desempenho de um modelo em *Volumes Finitos*, no caso o EbFVM, que seja aplicado em problemas de elasticidade 2D, em material isotrópico, sem forças de inércia e utilizando o modelo para pequenas deformações;
 - A *avaliação* será feita utilizando-se: comparações com soluções **analíticas**, através dos clássicos **testes padrões** utilizados extensivamente no FEM, análise de **convergência** da solução iterativa além de **aplicações** em engenharia;
 - O domínio será discretizado e levado para o **espaço de elementos finitos**, denominado por \mathbb{S}^h ;
 - O modelo utilizado irá trabalhar com **malhas não estruturadas** e com **elementos quadriláteros, lineares e isoparamétricos**²⁵;
- Como o assunto possui certo volume de trabalhos nas últimas duas décadas, objetiva-se também fazer uma revisão detalhada do **nível de desenvolvimento, confiabilidade e desempenho** do método na área de mecânica estrutural;
- Por fim, devido ao escasso volume de artigos sobre o assunto, uma documentação detalhada sobre a discretização e implementação computacional, será obtida.

1.3.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Avaliar o grau de enquadramento do EbFVM, dentro de códigos computacionais existentes para métodos baseados em malhas de

25 A extensão do elemento quadrilátero para o elemento triangular é relativamente simples afetando poucos pontos conceituais do desenvolvimento, são eles: As funções de interpolação e suas derivadas, a matriz conectividade, o algoritmo de varredura do elemento e consequentemente a montagem do sistema global de equações.

- elementos finitos;
2. Avaliar o desempenho do modelo utilizando-se de testes em casos comuns na engenharia. A avaliação do desempenho será feita sobre:
 - a. O tempo de CPU na montagem do sistema de equações e na solução do sistema global;
 - b. O comportamento da convergência da solução utilizando métodos iterativos;
 - c. O campo de deslocamentos;
 - d. O campo de tensões, utilizando as técnicas de “pós-processamento” para as tensões. Uma nova forma de determinação de tensões é proposta para o caso do EbFVM a qual utiliza-se de uma interpolação do campo de deslocamento. Esta técnica foi proposta inicialmente por Vaz Jr (2008);
 - e. Os *patch test A, B, C, Single-element* e o teste *C* com elemento degenerado, visando avaliar o comportamento do método diante de problemas de singularidade na solução, com respeito a coerência da discretização no domínio e na fronteira, avaliar a implementação computacional e por fim a consistência do método em mecânica estrutural;
 - f. Verificar o problema de “locking” e
 - g. Determinar a ordem de aproximação do método.

1.3.2 JUSTIFICATIVAS

O presente trabalho, toma por justificativa de seu desenvolvimento as seguintes afirmações:

1. Ambos, FVM e FEM-Galerkin, estão bastante difundidos (normalmente em campos distintos) e em algumas situações são utilizados simultaneamente para solução de problemas mais complexos. A liberdade de escolha entre um ou outro é atrativa no sentido de que problemas acoplados podem fazer uso de um ou outro método sobre o mesmo algoritmo computacional;
2. Limache e Idelsohn (2007) apresentam uma relação coerente de ao menos dez aspectos positivos do FVM para aplicações em problemas de mecânica estrutural;
3. Até o momento não foi possível localizar um trabalho que abordasse uma grande variedade de testes sobre o EbFVM. Certamente alguns testes isolados tem sido feitos, e bons resultados obtidos;

4. No que diz respeito ao algoritmo computacional, que envolve a geração da matriz de coeficientes, solução desta e obtenção do campo de tensões, os dois métodos utilizam técnicas similares, com exceção do valor dos coeficientes obtidos (que são intrínsecos de cada método pela sua origem). Assim a implementação do FVM em códigos computacionais existentes para FEM é facilitada;
5. Testes de desempenho computacional são apresentados por Bailey e Cross (1995, p. 1772), nestes são comparados os tempos de CPU para montagem do sistema de equações e para solução do sistema resultante. Na solução do sistema os tempos para ambos métodos são muito próximos, porém na montagem do sistema global de equações, o FVM envolve tempos significativamente maiores. Isso se deve ao fato de ter-se utilizado o procedimento computacional de percorrer a malha através dos volumes, o que retarda bastante o processo, se comparado com os métodos baseados em elementos, que percorrem a malha através de elementos;
6. O FVM permite a conservação rigorosa de quantidades físicas no volume de controle, o que o torna “apto” para atuar em situações onde a conservação da propriedade é crucial para o bom desempenho do método numérico;
7. Esquemas híbridos já tem sido foco de estudos, onde o FVM e o FEM são utilizados simultaneamente no mesmo problema (CHEN *et al.*, 2001 apud LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 828).

1.4 PANORAMA DA Tese

Nesta subsecção, um panorama da tese é descrito para cada capítulo:

- **Capítulo 1 - Introdução:** Neste capítulo é feita uma breve introdução no assunto, são descritos os objetivos, justificativas e por fim é feita uma revisão detalhada sobre o estado atual do método de volumes finitos aplicado a problemas estruturais;
- **Capítulo 2 - Modelo Matemático:** Contém um breve estudo a respeito do problema de mecânica estrutural do ponto de vista da mecânica do contínuo. Os desenvolvimentos necessários à obtenção das equações de governo são apresentados, bem como estudos complementares das hipóteses utilizadas;

- **Capítulo 3 - Modelo Numérico:** Neste capítulo a discretização em EbFVM é apresentada;
- **Capítulo 4 - Resultados:** As avaliações e testes propostos são executados, juntamente com a análise dos resultados;
- **Capítulo 5 - Conclusão:** Um resumo das análises feitas no capítulo 4 é apresentado, concluindo com um parecer sobre a aplicação do EbFVM em problemas estruturais;
- **Apêndices:** O apêndice **A** apresenta algumas tabelas com dados de gráficos. No apêndice **B**, a aplicação do FEM-Galerkin à Elasticidade Plana é apresentada. O apêndice **C** descreve as principais técnicas de recuperação de tensões e o apêndice **D** apresenta alguns conceitos básicos utilizados neste trabalho como uma breve revisão de cálculo álgebra e notação indicial.

1.5 TRABALHOS QUE ENVOLVEM O CONCEITO DE VOLUME APLICADO A PROBLEMAS ESTRUTURAS

Um procedimento em FV para resolver problemas de elasticidade 3D, para malhas não estruturadas incorporando termo-elasticidade é apresentado por Bailey e Cross (1995), e que pode ser considerado uma extensão do trabalho em 2D de Fryer *et al.* (1991). FV é testado diante de certo número de problemas onde apresentou bons resultados.

Uma solução para problemas de elasticidade com viscoplasticidade capaz de representar geometrias complexas também é apresentada por Taylor, Bailey e Cross (1995). O modelo desenvolvido é para problema estático, bi-dimensional com elementos quadrangulares. Os problemas resolvidos envolveram elasticidade, plasticidade e viscoplasticidade e o FV mostrou-se eficaz na solução destes tipos de problemas.

Em 1996 Wheel apresenta uma aproximação para análise de tensão em estruturas axi-simétricas pressurizadas. A equação governante apresentada é para problemas axi-simétricos com força de inércia nula. Este trabalho é desenvolvido para casos bi-dimensionais e utiliza-se de elementos quadriláteros. A técnica utilizada é Volumes Finitos Centrados na Célula (CC-FV). São resolvidos dois casos de estruturas pressurizadas internamente e foi demonstrado que pelo refino da malha, o FVM converge em direção a solução analítica.

A aplicação da técnica de solução utilizando *multigrid* para um problema de análise de tensões termo-elásticas em material **anisotrópico** é apresentada por Fainberg e Leister (1996). As equações governantes

para a quantidade de movimento e transferência de calor são escritas para o sistema de coordenadas cilíndrico (problemas de axi-simetria ou problemas com simetria de revolução), a malha utilizada é estruturada com elementos quadriláteros. Três problemas são resolvidos envolvendo termo-elasticidade, anisotropia e solução numérica do esquema resultante através da técnica de *multigrid*. Os resultados foram comparados com as soluções analíticas. Também ficou demonstrado a capacidade da técnica *multigrid* em acelerar o procedimento de solução, onde em um dos testes foi conseguido o aumento de velocidade em um fator de 100. *Por fim os autores declaram que o FVM deve desempenhar no futuro um papel significativo em muitas áreas da mecânica dos sólidos.*

O tratamento do modelamento numérico com VF da fundição de metais, onde são envolvidos problemas de escoamento, térmico e estrutural em geometrias complexas é apresentado por Bailey *et al.* (1997). O objetivo do trabalho é implementar um modelo para o problema de solidificação em moldes através do *framework PHYSICA* (2010), utilizado na simulação de fenômenos de multi-física. Para isso um algoritmo computacional unificado é necessário, o qual encabeça a interação entre os diversos fenômenos dentro do mesmo código. Neste contexto, os autores utilizam-se de FV para modelar não apenas os problemas de escoamento e térmico, mas também o problema estrutural. São resolvidos dois problemas, nos quais obteve-se ótimos resultados quando comparados com dados experimentais.

Uma formulação para problemas de placas finas ou espessas carregadas transversalmente é apresentada por Wheel (1997a). Algumas dificuldades com este tipo de problema são encontradas quando da aplicação de FEM. Dentro deste contexto, e explorando o fato do FVM ser localmente conservativo o autor propõe a discretização utilizando FV que são definidos por polígonos multi-facetados. A teoria de *Mindlin* para deformação de placas é utilizada. Por fim três problemas teste são resolvidos, onde um carregamento transversal e malhas não estruturadas são utilizados. É observado que: com o refino da malha a solução converge para valores analíticos, que a formulação parece não exibir *locking* normalmente presente em formulações semelhantes de FE, evidenciando assim a potencialidade do método ao trabalhar em conjunto com aplicativos de CFD²⁶ e providenciando um eficiente caminho para a solução de problemas nos quais fluidos e paredes finas interagem.

A discretização utilizando FVM de materiais incompressíveis utilizando uma aproximação mista para elasticidade plana é apresentada

por Wheel (1997b; 1998). A aproximação mista aqui descrita consiste em que, além dos deslocamentos, a *pressão hidrostática* também é considerada como uma incógnita do problema. Ou seja, o tensor tensão é separado em um tensor *desviador*²⁷ e um *tensor hidrostático*²⁸. Este tipo de abordagem é utilizada para contornar o *locking* presente nos problemas de incompressibilidade, onde o coeficiente de Poisson tende a 0,5. As formulações tradicionais de FV baseadas apenas no campo de deslocamento apresentam *locking*, sendo portanto incapazes de representar o limite de incompressibilidade. Desta maneira o trabalho consistiu em incorporar a pressão hidrostática como variável, sendo assim possível representar a incompressibilidade sobre condições de estado plano de deformação na discretização utilizando o FVM. Enquanto os deslocamentos são avaliados no centro do FV, a pressão é avaliada nas faces deste, a isto chama-se arranjo desencontrado.

No trabalho de 1997b, são feitos 3 testes com este modelo utilizando um cilindro de parede espessa pressurizado internamente obtendo-se uma condição de estado plano de deformação. O primeiro utilizando malha com elementos quadriláteros e o segundo e terceiro com elementos triangulares. O problema de *locking* ocorreu no primeiro, onde os deslocamentos da malha original e deformada, foram praticamente idênticos. Porém, no segundo e terceiro problema, a solução foi **livre** de *locking* e os resultados foram excelentes quando comparados com valores analíticos.

No trabalho de 1998 o autor propõe problemas semelhantes aos anteriormente publicados e acrescenta dois problemas que tem o domínio discretizado parte com volumes quadriláteros e parte com volumes triangulares. Por um lado, a formulação mista gerou resultados livres de *locking* quando se utiliza FV triangulares, já para o FV com elementos quadriláteros, o *locking* está presente. Esse comportamento está relacionado ao número de equações de equilíbrio (oriundas de u_x e u_y sobre o centroide do FV) e ao número de equações de restrição devido a incompressibilidade (oriundas de p sobre as faces do FV). Assim se a razão das primeiras com respeito as segundas, estiver no intervalo crítico $[1, 2; 1, 25]$ ou abaixo desse então ocorrerá o *locking*. Caso contrário estará livre de *locking*.

Taylor, Bailey e Cross (1999) apresentam uma formulação para Mecânica dos Sólidos Computacional utilizando *Vertex-based Finite Vo-*

27 Parcela do tensor tensão responsável por mudar a forma do volume infinitesimal.

28 Parcela do tensor tensão responsável por mudar o volume do domínio infinitesimal (aumenta ou diminui o tamanho do cubo).

lume Method, que trata também com geometrias complexas e 3D. O modelo físico é para problemas de visco-plasticidade, estático (ou quase-estático²⁹) e pequenas deformações.

Como motivação, na introdução, os autores escrevem sobre as técnicas de FV *Vertex-based e Cell-Centered*:

“Both approaches apply strict conservation over a control volume and have demonstrated superiority over traditional FE methods with regard accuracy (WHEEL, 1996 e TAYLOR, 1996), some researchers have attributed this to the local conservation of a variable as enforced by the control volumes employed (FRYER et al. 1991 e BAILEY e CROSS 1995) and others have attributed it to the enforced continuity of the derivatives of variables across cell boundaries (WHEEL, 1996).”³⁰

As comparações entre os métodos de FV e FE, foram feitas sobre a precisão e o custo computacional utilizando-se de um problema que consiste num vaso esférico com parede espessa sujeito a uma pressão interna, o que fará com que este sofra deformação plástica. Os resultados foram bons e compatíveis entre ambos os métodos.

Em 2000, Fallah et al. apresentam uma comparação entre o FVM e o FEM para análise de tensões não lineares. É utilizada uma aproximação bi-dimensional, sem forças de inércia (estático) e com *grandes deslocamentos*³¹, envolvendo assim o tensor deformação de *Green* que na forma tensorial é dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_{nl} . \quad (1)$$

Como consequência deve-se utilizar o correspondente *Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff* na obtenção da relação constitutiva. A descri-

29 Refere-se a um estado de movimento com acelerações praticamente desprezíveis, porém o tempo deve ser considerado para acompanhar a evolução de algum comportamento, que neste trabalho foram as deformações visco-plásticas. Para isso pode-se ver a presença do tempo na taxa de deformação visco-plástica de Perzyna.

30 Nossa tradução: “Ambas aproximações utilizam a conservação estrita sobre o volume de controle e tem demonstrado superioridade sobre os FEM tradicionais com respeito a precisão, alguns pesquisadores, tem atribuído isto a conservação local da propriedade, forçada pelos FV empregados, outros, tem atribuído isto a continuidade das derivadas (que também é forçada) da propriedade através da fronteira do FV”.

31 A formulação entre tensão e deformação normalmente utilizada na elasticidade é para pequenos deslocamentos. Assim não é válida para os casos de grandes deslocamentos onde deve-se utilizar outra formulação para a deformação e a tensão, que no caso são a deformação de Green e o Segundo Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff respectivamente.

ção material (Lagrangiana) é adotada no trabalho. O tensor tensão na equação governante, é o *Primeiro Tensor Tensão de Piola-Kirchhoff*, este por sua vez relaciona-se com o segundo tensor através de

$$\sigma^0 = \mathbf{F} \tilde{\sigma}, \quad (2)$$

o que introduz a não linearidade na equação governante

$$\text{div}(\mathbf{F} \tilde{\sigma}) + \mathbf{b} = \mathbf{o}. \quad (3)$$

Nas equações (1) e (2) \mathbf{E} representa o tensor deformação de Green com \mathbf{E}_0 sendo sua parcela linear e \mathbf{E}_{nl} a não linear. σ^0 é o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, \mathbf{F} é o tensor gradiente de deformação e $\tilde{\sigma}$ é o segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

Três problemas são resolvidos. Destes os de maior relevância são o primeiro e o segundo. O primeiro consiste de uma *tira elástica* fixa em uma extremidade e tracionada na outra. Os resultados obtidos são comparados com a solução analítica e com a teoria para pequenas deformações, mostrando que a solução apresenta valores idênticos aos da solução analítica, e para o caso de pequenos deslocamentos coincide com a respectiva teoria de deformação. O segundo teste consiste em uma viga engastada com força aplicada na extremidade livre sobre a Linha Neutra (LN). A solução obtida para o deslocamento da extremidade livre é comparada com os correspondentes valores analíticos e os resultados obtidos foram comparáveis a outros métodos numéricos.

Zarrabi e Basu (2000) utilizam FV para um problema de elasticidade axi-simétrica. A discretização é para elementos quadriláteros bilineares. Com a intenção de determinar as tensões, os autores fazem uma comparação do campo destas com resultados analíticos. São feitos dois testes relacionados aos campos de tensões. O primeiro é um tubo de paredes uniformes, neste são aplicadas duas condições de pressão, uma pressão radial sobre a parede e uma pressão de fim de tubo, tendo um efeito de tração (axial) sobre este. A malha utilizada é estruturada, com elementos ortogonais e razão de aspecto pobre (no caso 7,8). Para o FEM, as tensões são recuperadas utilizando-se o *Cômputo Direto no Nó*³² (CDN) e para o FVM uma técnica particularizada onde as deformações são avaliadas diretamente sobre as faces dos elementos (que são coincidentes com a fronteira do VC) utilizando uma aproximação biline-

32 Técnica que se utiliza do campo de deslocamento aproximado (obtido como solução) para através das funções de interpolação localizar as deformações e através das relações constitutivas determinar as tensões propriamente ditas.

ar para os deslocamentos aproximados.

Os resultados apresentaram uma melhor aproximação das tensões radiais obtidas pelo FVM apesar da malha grosseira utilizada. Para o FEM houve uma aproximação relativamente pobre nas faces interna e externa da parede do tubo, algo similar ocorre com as tensões tangenciais porém agora com uma melhora significativa das tensões obtidas pelo FEM. Por fim os autores em suas conclusões emitem um parecer positivo quanto ao uso do FV em problemas semelhantes.

Ainda em 2000, Demirdžić, Horman e Martinović, apresentam formulação em VF para material ortotrópico sujeito a esforços provenientes, não apenas de deslocamentos prescritos e/ou forças prescritas sobre o domínio analisado, mas também devido à presença de água e a gradientes de temperatura no material (por exemplo a madeira. Os resultados obtidos são favoráveis à utilização do método ao se comparar com resultados experimentais. Nas conclusões, evidenciando a aplicabilidade do método à problemas de multi-física, os autores escrevem:

*“The method is second-order accurate in both space and time, and the segregated solution strategy employed enables reuse of the same storage for the coefficient matrix and the right-hand side vector for all dependent variables, thus offering a very efficient computer storage management. Furthermore, all nonlinearities are treated naturally, as the solution algorithm already iterates over the subsets of equations. ... shows that it is accurate and efficient in predicting the transient behavior of physically highly complex, hygro-thermo-elastic orthotropic bodies.”*³³ (DEMIRDZIC, HORMAN e MARTINOVIC, 2000)

Fang, Tsuchiya e Yamamoto (2002), apresentam uma comparação entre o FDM, FEM e FVM para o problema unidimensional. O objetivo é comparar o resultado numérico com a solução exata para este tipo de problema. Os três métodos são discretizados e testados sobre dois exemplos. Os métodos, em ambos exemplos, são comparados através das nor-

33 Nossa tradução: “O método apresenta aproximação de segunda ordem tanto no espaço como no tempo, e a estratégia empregada de solução segregada possibilita o uso do mesmo armazenamento de coeficientes das matrizes e de vetores para todas variáveis dependentes, oferecendo um tratamento computacional eficiente. Além do mais, todas não linearidades são tratadas naturalmente pois o algoritmo de solução já itera sobre os subconjuntos das equações. ... mostra que ele (o método) tem precisão e eficiência em prever o comportamento de problemas altamente complexos fisicamente, no caso, materiais ortotrópicos (higro-termo-elásticos).”

mas L_2 e L_∞ do erro sobre os valores de u .

As comparações são feitas utilizando três formas de particionar o domínio, a primeira com malha uniforme, a segunda com malha tendo elementos de tamanhos aleatórios e a terceira com malha não uniforme porém seguindo uma regra para definição de tamanho de malha. Para cada forma de particionar a malha são gerados ainda três refinamentos de malha. Isso gera um total de nove casos para teste em cada método para cada exemplo. Os resultados das normas dos erros mostraram um bom desempenho do FVM.

O problema de interação fluido-estrutura é resolvido utilizando FV na região de escoamento e na região estrutural linear elástica. Este trabalho foi apresentado por Slone et al. (2002). Algumas considerações importantes são feitas na introdução do trabalho como a afirmação que se segue:

“Unless the fluid-structure coupling is either one way, very weak or both, transferring and filtering data from one mesh and solution procedure to another may lead to significant problems in computational convergence.

It becomes clear that when addressing dynamic fluid-structure interaction problems, for those with any significant degree of coupling, the solution procedures in the solid and fluid domains have to be compatible in respect of:

- *The mesh structure and element order;*
- *The method of spatial discretization;*
- *The two-way exchange of information of the fluid-structure interface.*

(SLONE et al., 2002, p. 2).³⁴”

Assim os autores ainda afirmam que esta demanda de consistência tem levado ao desenvolvimento de técnicas computacionais que facilitem a modelagem multi-física completamente dentro do contexto de

34 Nossa tradução: “A menos que o acoplamento fluido-estrutura seja em um único sentido, muito fraco, ou ambos, a transferência e determinação de dados à partir de uma malha e do procedimento de solução para outro procedimento, poderá levar a problemas significativos de convergência da solução.

Isso torna claro que quando problemas de interação fluido-estrutura estejam presentes e com qualquer grau significativo de acoplamento, o procedimento de solução na estrutura e no fluido tem que ser compatível com respeito a:

- A estrutura da malha e ordem do elemento;
- O método de discretização espacial;
- Os dois caminhos de troca de informação na interface fluido-estrutura.”

FVM. Esta interação (fluido-estrutura) considera três campos: *escoamento, deformação estrutural e movimento da malha*.

A avaliação da discretização é feita utilizando-se um problema de viga engastada sujeita a um escoamento incompressível. Por fim os autores fazem a seguinte observação a respeito: *O problema teste utilizado mostrou que o FVM é capaz de modelar problemas de multi-física tanto para o fluido como para a estrutura*.

A modelagem computacional do fenômeno de soldagem onde são abordados os problemas de *dinâmica de fluidos, transferência de calor, mudança de fase e mecânica estrutural* é apresentado por Taylor et al. (2002). Para a parte fluida é utilizado CC-FV e para a parte sólida o CV-FV. Toda implementação é feita sobre a estrutura numérica chamada PHYSICA (2010), que se trata de um aplicativo computacional para modelagem de fenômenos de multi-física.

O artigo apresenta de forma breve a modelagem do fenômeno físico considerando o comportamento para a parte termo-dinâmica da poça de metal líquido e o comportamento da parte termo-mecânica da estrutura onde serão consideradas as deformações termo-elasto-plásticas.

Para avaliar, não somente a discretização numérica dos fenômenos envolvidos, mas principalmente a estrutura numérica provida pelo PHYSICA (2010), foram resolvidos dois casos para teste. Estes testes resultaram em uma avaliação positiva quanto a versatilidade do aplicativo.

Este artigo demonstra novamente a aplicabilidade e comportamento estável do FVM em problema de interação fluido-estrutura. Isso é evidenciado pelo grande número de variáveis que devem ser resolvidas simultaneamente.

Uma modelagem computacional dos processos de *Extrusão e Forjamento* em metais é apresentado por Williams, Croft e Cross (2002). Três casos teste são resolvidos para verificação do modelo, dois referentes a extrusão e um referente a forjamento. A principal verificação buscada nos testes foi a aplicação do modelo para escoamento não-Newtoniano na modelagem visco-plástica e os testes foram favoráveis quanto a isto.

A técnica CV-FV para elasticidade bidimensional, incorporando um grau de liberdade para a rotação (θ) sobre o nó, além dos dois graus definidos pelos deslocamentos (u e v), é apresentada por Wheel e Wenke (2003). Quatro casos são resolvidos onde é obtida uma melhoria significativa na precisão dos resultados com a introdução do grau de li-

berdade de rotação. Também verificou-se que a baixa razão de aspecto afeta pouco a precisão dos resultados quando a *rotação* é considerada, trazendo uma avaliação positiva do FVM na área estrutural.

Slone, Bailey e Cross (2003) apresentam uma formulação em CV-FV aplicada a dinâmica dos sólidos para *pequenas deformações* e com *amortecimento viscoso*. O objetivo principal do trabalho é preparar uma discretização em FV para a área estrutural e posteriormente aplicar esta em problemas *Dinâmica da Interação Fluido-Estrutura* (DFSI)³⁵. Com relação à aplicação de FV e FE em problemas de interação fluido-estrutura, o autor com respeito a compatibilidade entre a discretização utilizada na estrutura e a utilizada no escoamento, comenta:

“This demand for consistency has led to the development of computational techniques that facilitate multi-physics modeling entirely within the context of FE or FV methods. Hughes et al. pursued this goal using FE methods with the SPECTRUM³⁶ code. Wall et al. have pursued the FE method, with some considerable success, for two-dimensional (2D) dynamic fluid-structure problems, including Navier Stokes flows. These workers have followed the overall arbitrary Lagrangian Eulerian method of Farhats’ team, except that they employed a mixed FE-FV formulation with rather simple solid models. ...³⁷” (SLONE, BAILEY e CROSS, 2003, p. 70)

“The authors have been involved in the modeling of DFSI problems for a number of years. A key requirement to enable the modeling of DFSI are algorithms for DSM³⁸. The solution of DSM problems using FE methods is well established, for example

35 Comumente referenciado em inglês como *Dynamic Fluid-Structure Interaction*.

36 *Centric Technology, Inc., Sunnyvale, CA. SPECTRUM. Now owned by ANSYS.*

37 Nossa tradução: “Esta demanda por consistência tem levado ao desenvolvimento de técnicas computacionais que facilitam a modelagem multi-física inteiramente dentro do contexto dos métodos de FE ou FV. Hughes *et al.* atingem este objetivo usando o método de FE com o código SPECTRUM. Wall *et al.* tem usado o método de FE com considerável sucesso, para dinâmica da interação fluido-estrutura incluindo escoamento de Navier Stokes. Estes, tem seguido o abrangente (porém arbitrário) método Lagrangeano-Euleriano da equipe de Farhats, exceto que estes empregam a formulação mista FE-FV preferencialmente para simples modelos estruturais.”

38 Comumente referenciado em inglês como *Dynamic Solid Mechanics*.

Bathe et al. However, papers on FV methods applied to such DFSI problems using unstructured mesh procedures are still limited. ...³⁹” (SLONE, BAILEY e CROSS, 2003, p. 71)

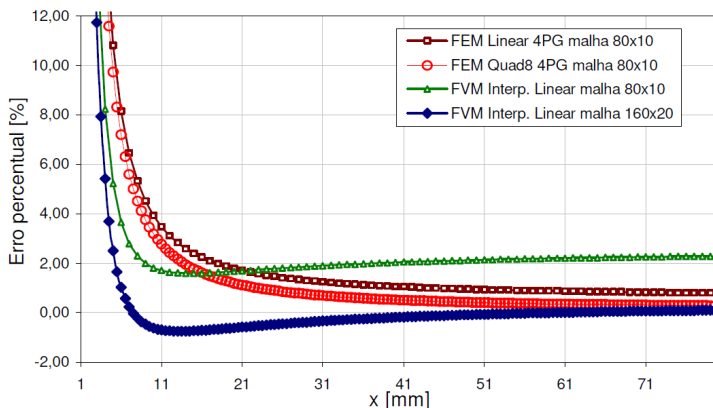


Figura 4: Erros percentuais das soluções numéricas e da teoria de Bernoulli-Euler com relação a equação proposta por L. H. Donnell.

Estes comentários, vem colaborar e incentivar a análise detalhada da aplicação de FV em problemas estruturais. Apesar deste artigo ter sido divulgado em 2003, ele foi gerado em novembro de 2000, e serviu de base para o artigo Slone *et al.* (2002) no que diz respeito a discretização numérica em CV-FV aplicado a elasticidade tridimensional em estruturas. Portanto, a equação de governo e a respectiva discretização já foram alvo de observações no respectivo artigo. O método é testado em uma viga (3D) em balanço através da aplicação de um pequeno deslocamento vertical na extremidade da viga no tempo inicial. A partir daí oscilações senoidais são calculadas pelo método com um elevado nível de precisão, tanto na amplitude como no período destas quando comparados com valores analíticos. A implementação do código foi feita sobre o aplicativo PHYSICA (2010). O autor ainda completa o trabalho comentando que os resultados motivaram a extensão da aplicação de CV-FV

39 Nossa tradução: “O autor tem trabalhado na modelagem de problemas de DFSI por alguns anos. Uma exigência chave para permitir a modelagem de DFSI são os algoritmos para DSM. A solução de problemas de DSM usando métodos de FE é bem estabelecida, *e.g.* Bathe *et al.* Porém, artigos utilizando métodos de FV na solução de problemas de DFSI usando malhas não estruturadas são extremamente limitados.”

para problemas de DFSI.

Um modelo para mecânica estrutural utilizando CV-FV 2D/3D implícito no tempo para malhas não estruturadas é apresentado por Xia *et al.* (2007). A equação governante utilizada é a *equação do movimento de Cauchy*, onde o termo das forças de corpo (\mathbf{b}) é desprezado quando comparado com as demais, no caso as forças internas, de inércia, externas ($\mathbf{f}(t)$) e o efeito de amortecimento ($-c.v$). Então a *equação do movimento de Cauchy* assume a forma

$$\rho_s \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}(t) - c\mathbf{v} , \quad (4)$$

onde além dos termos já conhecidos, c é o coeficiente de amortecimento. Dois casos teste são executados: uma viga engastada com força prescrita na extremidade livre e uma placa quadrada engastada em toda a extensão de seu contorno e força distribuída na direção perpendicular a esta. Os resultados são comparados com valores analíticos para ambos casos e mostram que o método possui precisão e eficiência na análise de deformação estrutural estática e dinâmica.

Zhao *et al.* (2007) empregam uma formulação implícita no tempo com malha não estruturada utilizando o CV-FV para simular a dinâmica da interação fluido estrutura. Testes são feitos com um escoamento sobre uma viga em balanço. Análises de deslocamentos e tensões sobre a viga também são feitas. O estudo demonstrou o potencial do método proposto para problemas complexos de interação fluido-estrutura. Quanto a aplicação em problemas de multi-física os autores escrevem:

*“In many engineering applications, there is an emerging need to model multi-physics problems in a coupled manner. In principle, because of their local conservation properties the FV methods should be in a good position to solve such problems effectively. ...”*⁴⁰ (ZHAO *et al.* 2007, p. 121)

Limache e Idelsohn (2007, p. 828 e 829) apresentam uma relação de aspectos interessantes apresentados pelo FVM:

1. O FVM tem muitas das características e vantagens do FEM,

40 Tradução nossa: "Em muitas aplicações da engenharia, há uma necessidade emergente de modelar problemas de multi-física de uma maneira acoplada. Em princípio, por causa de suas propriedades locais da conservação os métodos de VF devem estar bem preparados para resolver eficazmente tais problemas. ..."

sendo que ambos utilizam a formulação integral fraca e ambos são independentes da geometria do domínio, e como consequência ambos são superiores ao MDF;

2. O FVM permite a conservação rigorosa de quantidades físicas no volume de controle (LAX; WENDROFF, 1960 apud LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 828);
3. O FVM tem um forte caráter físico e geométrico em vez do caráter variacional do FEM;
4. O FVM parece ser superior ao FEM nos problemas que tratam com descontinuidades como nos casos de fluxos transônicos e supersônicos (RUMSEY e VATSA, 1993; ATWOOD, 1992; CHEATWOOD, GNOFFO, 1996 apud LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 828);
5. A habilidade de FVM na captura de choque pode ser explicada dentro de sua flexibilidade em definir as funções de interpolação. Esta qualidade poderia ser importante nos problemas que tratam a falha do material, onde as fissuras ou as fraturas podem ser vistas como descontinuidades em variáveis de estado;
6. O FVM, bem como o FEM, pode ser usado não somente nos problemas de mecânica computacional mas igualmente em outras áreas da física e das ciências. Por exemplo, pode ser usado para resolver equações de Maxwell do electromagnetismo (CHUNG e ZOU, 2001 apud LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 828);
7. Pesquisadores que tem trabalhado em formulações de FVM para sólidos relatam que os resultados são igualmente comparáveis ou ultrapassam os resultados obtidos pelo FEM (RENTE e OLIVEIRA, 2000; BIJELONJA *et al.*, 2006 apud LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 828). Esta afirmação sobre melhores resultados, possivelmente refere-se a alguns casos específicos, como se observa na referência adotada, ou seja, um trabalho de Rente e Oliveira que tratam sobre elasto-plasticidade não linear e um trabalho de Bijelonja que trata de um caso de elasticidade linear e incompressível;
8. Outros pesquisadores, tem desenvolvido esquemas híbridos (FEM-FVM) onde o FVM é utilizado para *computar as forças internas produzidas pelo tensor de Cauchy* (CHEN *et al.*, 2001 apud LIMACHE e IDELSOHN, 2007, p. 828). Eles relatam que estes esquemas híbridos tem uma performance melhor do que o FEM aplicado de forma convencional. Os esquemas híbridos

foram usados igualmente com sucesso para fluxos visco-elásticos por Chandio *et al.* (2004 apud LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 828), fluxos multi-fásico por Geiger *et al.* (2003 apud LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 829) e captura do fenômeno de choques por Bergamaschi *et al.* (1999 apud LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 829);

9. Uma outra característica FVM é que forças internas e fluxos são computados pela integração em uma dimensão a menos (superfícies) do que no FEM (volumes). A redução na extensibilidade de um problema, é geralmente uma vantagem. A integração reduzida pode fazer o FVM mais preciso e rápido do que o FEM (LIMACHE e IDELSOHN , 2007, p. 829). Vale ressaltar aqui que essa observação quanto a precisão e rapidez não é geral e deve ser avaliada com maior cuidado, que, apesar de mostrar alguns testes, não é a linha central do presente trabalho.

Vaz Jr, Muñoz-Rojas e Filippini (2009), apresentam uma análise detalhada de erros no cômputo de tensões sobre os nós utilizando o método de volumes finitos e elementos finitos. O problema de elasticidade plana é abordado. Este artigo é um dos mais importantes no cômputo de tensões utilizando a técnica de FV, relatando que volumes finitos providenciam uma precisão mais elevada no cômputo das tensões nodais. As principais comparações são feitas sobre um caso teste que tem solução analítica. Os principais pontos abordados são a norma L_2 do erro no campo de tensões e o erro na norma da energia. Outro aspecto abordado é a ordem do erro observado, o qual é determinado através da extrapolação de Richardson.

Voller (2009) em seu livro da série *Research Monographs Series*, cujo título é *Basic Control Volume Finite Element Methods for Fluids and Solids*, dedica um capítulo para tratar da aplicação de FV ao *estado plano de tensão*. O livro aborda a discretização para elementos triangulares considerando nulas as forças de inércia, escreve brevemente sobre a aplicação das condições de contorno, resolve um problema teste para o tradicional caso de concentração de tensões em uma chapa com orifício, aborda brevemente a recuperação de tensões pelo método direto (CDN), por fim obtém o gráfico da distribuição do fator de concentração de tensões para o problema teste apresentado e emite um parecer positivo sobre o uso de FV para problemas estruturais.

1.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE OS TRABALHOS

Estes trabalhos representam grande parte do total de trabalhos existentes na área, assim pode-se afirmar que tem havido um crescimento significativo do número de trabalhos nas últimas duas décadas (1990-2010). Pelos trabalhos envolvendo FV, observa-se que este tem se firmado e se estabelecido como um método *numérico robusto* que *fornece resultados confiáveis* e mostra-se promissor em aplicações de mecânica estrutural. Com relação a isto escreve Barth (2004, p. 1):

“This article reviews elements of the foundation and analysis of modern finite volume methods. The primary advantages of these methods are numerical robustness through the obtention of discrete maximum (minimum) principles, applicability on very general unstructured meshes, and the intrinsic local conservation properties of the resulting schemes. ...⁴¹”

Apesar do número de trabalhos citados nesta revisão, estes ainda são poucos na área de FV para estruturas quando comparados com o número existente em outras áreas. Outro aspecto, são os testes padrões, que em apenas um caso, Wheel e Wenke (2003) é feito o Patch Test em um caso isolado.

Esta revisão deixa portanto claro que existe uma lacuna para testes padrões como: *Locking*, *Patch Test*, Erro na Norma da Energia para o deslocamento e tensão e o Erro de Richardson.

41 Tradução nossa: "Este artigo revisa elementos da fundamentação e análise do moderno método de volumes finitos. As vantagens preliminares deste método são a robustez numérica dada pela obtenção das equações discretizadas através de princípios de mínimos e máximos, aplicabilidade nos mais diversos tipos de malhas não estruturadas, e a conservação local intrínseca dos esquemas resultantes. ..."

2 MODELO MATEMÁTICO

A mecânica do contínuo é a base para o modelamento do problema de mecânica estrutural. Através desta são definidas as relações matemáticas entre as tensões e deformações, e suas respectivas interdependências com as condições de fronteira e os deslocamentos.

As relações entre a cinemática e as condições de equilíbrio dos corpos são as leis constitutivas dos materiais. Essas definem as características do material através do relacionamento das componentes de uma medida de tensão, com a correspondente medida de deformação.

Este breve capítulo, apresenta equações e/ou inter-relações apresentadas nas variáveis dos problemas estruturais.

2.1 AS DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS

Uma maneira de avaliar as deformações é através do tensor de *Green-Lagrange* (\mathbf{E}) comumente conhecido por **Tensor Deformação Infinitesimal** dado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i'j} + u_{j'i}). \quad (5)$$

Este tensor é comumente representado por ε e em termos de suas componentes pode-se escrever

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (6) \end{aligned}$$

Adicionalmente, observa-se que o tensor é simétrico, ou seja $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

2.2 PRINCÍPIOS DE EQUILÍBRIO

Na descrição de um problema de mecânica dos sólidos, além de conhecer-se o meio (propriedades deste), devem constar as Condições de Fronteira e as forças de corpo (se estas existirem). Nos itens que se seguem estes serão descritos, bem como as Equações de Equilíbrio e o *Tensor Tensão de Cauchy*.

2.3 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

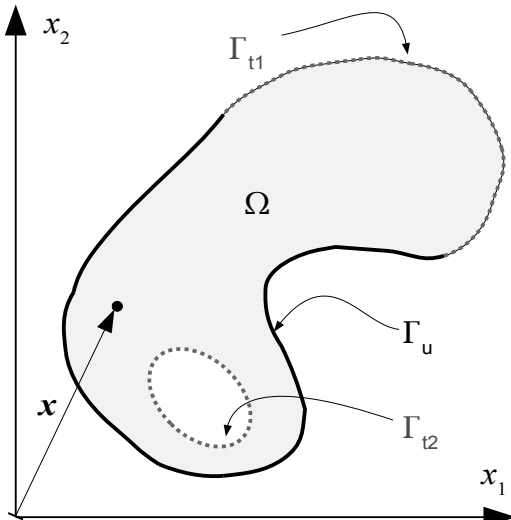


Figura 5: Regiões com condições de contorno de deslocamento e força prescrita.

Geralmente um problema de mecânica dos sólidos possui dois tipos de condições de contorno, as de **valor prescrito** (no caso deslocamento prescrito) e de **fluxo prescrito** (no caso força prescrita) conhecidas respectivamente por condição de *Dirichlet* e *Neumann* respectivamente. Com relação a condição de *Neumann* para mecânica dos sólidos representa um Fluxo de

Quantidade de Movimento Linear conforme a equação

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (7)$$

onde \mathbf{P} é a quantidade de movimento linear. O mesmo pode ser mostrado para a quantidade de movimento angular.

A representação bi-dimensional na Fig. 5 mostra regiões com os dois tipos de condições de contorno, região com valor prescrito (Γ_u) e região com força ($\Gamma_t = \Gamma_{t1} + \Gamma_{t2}$). Assim a fronteira Γ pode ser decomposta em partes onde são prescritas uma ou outra condição de contorno, de tal maneira que a união e a intersecção são verificadas conforme

$$\begin{cases} \Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma \\ \Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset \end{cases} \quad (8)$$

Dessa forma, para a fronteira mostrada na Fig. 5, são definidas as seguintes igualdades

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \text{ em } \Gamma_u \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}_1(\mathbf{x}) \text{ em } \Gamma_{t1} \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}}_2(\mathbf{x}) \text{ em } \Gamma_{t2} \end{cases} \quad (9)$$

Por fim é possível ter-se condições de deslocamento e de fluxo sobre um mesmo ponto, desde que cada uma utilize direções coordenadas diferentes.

2.4 FORÇAS SOBRE O CORPO

As forças que podem atuar sobre o corpo são essencialmente de dois tipos: *Força de Corpo* e *Força de Superfície*. A primeira atua sobre a própria massa do corpo e a segunda sobre as superfícies livres deste corpo.

As **forças de corpo** podem ser originadas por exemplo à partir de campos gravitacionais de intensidade $\mathbf{b}(x, y, z)$. Normalmente estas dependem não só do campo mas também da massa específica $\rho(x, y, z)$. Outra forma de definir essas forças é pelo conceito de densidade de força de corpo, \mathbf{f} com unidade $[\frac{N}{m^3}]$. De tal maneira que um diferencial de força $d\mathbf{F}$ (devido a ação das forças de corpo) que atua sobre uma partícula de volume $d\Omega$ pode ser calculado pelas equações

$$d\mathbf{F} = \mathbf{f}d\Omega , \quad (10)$$

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{b} . \quad (11)$$

As **forças de Superfície** são extraídas da densidade de força de superfície \mathbf{t} , com unidade $\left[\frac{N}{m^2}\right]$ e age em determinada superfície livre. Além disso \mathbf{t} sempre está associado a determinada área da com uma normal \mathbf{n} . O diferencial de força $d\mathbf{T}$ (devida a ação das forças de superfície) que atua sobre uma região de área da é dado por

$$d\mathbf{T} = \mathbf{t}da . \quad (12)$$

2.5 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

A equação de *equilíbrio na translação* é dada por

$$f_i + \sigma_{ij,j} = \rho\ddot{u}_i , \quad (13)$$

e o *equilíbrio na rotação* é satisfeito por

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} . \quad (14)$$

Esta equação impõe as condições para que haja conservação do momento da quantidade de movimento e é satisfeita por quaisquer valores de σ_{ij} desde que este tensor tensão seja *simétrico*.

2.6 LEI DE HOOKE GENERALIZADA

Este modelo de relação constitutiva é o mais simples e antigo. Estabelece uma relação linear entre os estados de tensão e deformação. A aplicação \mathbf{F} desta relação constitutiva é dada por: $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}$, ou na notação indicial conforme

$$\sigma_{ij} = B_{ij} + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} . \quad (15)$$

Onde B_{ij} são as componentes da tensão inicial, ou seja, devido a uma deformação inicial, C_{ijkl} é um tensor de 4ª ordem contendo as constantes elásticas do material. Embora aparentemente simples, o modelo pode descrever materiais ortotrópicos e isotrópicos, sendo este últi-

mo o utilizado no presente trabalho.

Em sua forma completa, podendo representar o comportamento de uma grande variedade de materiais, o tensor C_{ijkl} possui 81 componentes (para i, j, k e l variando de 1..3). Porém esse número é reduzido para 36 componentes ao se considerar a simetria de $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, o que leva a $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$. Além disso uma relação exigida para materiais elásticos de Green (Ver detalhes em Chen e Mizuno (1990, p. 81-82)) é que $C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)}$, fazendo com que sejam reduzidas para 21 as componentes do tensor. A equação

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{array} \right\} \quad (16)$$

simetrica

mostra o tensor \mathbb{C} para 21 componentes, porém apenas com dois índices e formatado de maneira a considerar os tensores tensão e deformação como vetores. Se o material possuir planos de simetria com relação a suas propriedades, o número de componentes é reduzido conforme:

- 1 plano de simetria leva a 13 componentes independentes;
- 2 planos de simetria leva a 9 componentes independentes. Este é o material ortotrópico;
- 3 planos de simetria leva a 2 componentes independentes. Este é o **material isotrópico**.

No presente trabalho o **material isotrópico** será utilizado, portanto tem-se apenas duas componentes independentes as quais são normalmente chamadas de *Constantes de Lamé* (λ , μ) dadas por

$$\lambda = c_{12} \quad , \quad \mu = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}). \quad (17)$$

Assim o tensor C_{ijkl} passa a ser representado pela matriz

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix}. \quad (18)$$

simétrica

O qual na notação indicial C_{ijkl} é dado por

$$C_{ijkl} = C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (19)$$

Substituindo a Eq. (19) na Lei de Hooke Generalizada, Eq. (15) e considerando a tensão inicial B_{ij} nula, obtém-se a equação

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \sigma_{ij} &= [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \varepsilon_{kl} \\ \sigma_{ij} &= \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (20)$$

O tensor C_{ijkl} pode ainda ser expresso em termos do *Módulo de Young* (E) e do *Coefficiente de Poisson* (ν) conforme

$$\begin{cases} E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \\ \nu = \frac{\lambda}{2(\mu+\lambda)} \end{cases}. \quad (21)$$

Com a introdução dessas novas constantes (E e ν) é possível representar o tensor C_{ijkl} na forma matricial

$$[C] = A \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

simétrica

onde $A = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

A Lei de Hooke Generalizada para material isotrópico é aplicável

a problemas tri-dimensionais. Porém existem casos onde é possível simplificar esta equação, no caso o Estado Plano de Tensão e Estado Plano de Deformação.

2.6.1 ESTADO PLANO DE TENSÃO – EPT

Neste caso há somente componentes do tensor tensão em um plano, por exemplo, no plano $x_1 O x_2$. Nesta condição a componente de tensão na direção $O x_3$ é nula, pois não há aplicação externa de esforços nesta direção e devido a pequena espessura a deformação nesta direção praticamente não impõe resistência para que haja o aparecimento de tensão nesta direção. Na direção $O x_2$ existe a aplicação do esforço externo e na direção $O x_1$ devido a dimensão considerável nesta direção, ocorre o aparecimento de tensões pois existe uma resistência quanto a deformação ε_{11} . Nesta situação é possível obter a partir da Eq. (20) a relação

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (23) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{(-\nu)}{1-\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

a qual representa o EPT, onde $A = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

2.6.2 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO – EPD

Neste caso há somente componentes do tensor deformação em um único plano, por exemplo $x_1 O x_2$, assim assume-se que $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$ e de modo semelhante ao EPT é possível obter a partir da Eq. (20) a relação

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} . \quad (24)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

2.6.3 GENERALIZAÇÃO DA NOTAÇÃO INDICIAL PARA LEI DE HOOKE

A notação indicial é útil pois facilita a compreensão da relação entre as variáveis do problema de uma forma compacta. Como exemplo, no presente trabalho, a menor relação ocorre entre dois nós vizinhos da malha, ou seja, que participem de um mesmo elemento. Este tipo de notação é muito semelhante à utilizada nas técnicas de implementação de algoritmos computacionais, portanto, visando facilitar a implementação computacional, nesta secção será generalizada a Eq. (20) na forma indicial para os casos 1D, 2D e 3D.

Tabela 1: Constantes para Lei de Hooke

	1D	EPT	EPD	3D
<i>D</i>	1	2		3
<i>A</i>	<i>E</i>	$\frac{E}{(1-\nu^2)}$	$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	
<i>a</i>	1	1	$(1-\nu)$	1
<i>b</i>	0	ν		

A Eq. (20) está em termos das constantes de *Lamé*, porém o mais comum é representar esta equação em termos do Módulo de Young e do coeficiente de Poisson, assim a equação assume a forma

$$\sigma_{ij} = A \{ b \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + [a + (1 - D) b] \varepsilon_{ij} \} , \quad (25)$$

onde *A*, *a* e *b* são constantes que representam o comportamento elástico do material e *D* representa a dimensão do estado de tensão, ou seja, 1D, 2D (Estados Planos) ou 3D. A Tab. 1 apresenta estas constantes.

3 MODELO NUMÉRICO

Os dois métodos, EbFVM e FEM-Galerkin compartilham de um grande número de similaridades com relação a sua origem, discretização e implementação computacional. Estes aspectos e o modelo numérico em EbFVM serão descritos neste capítulo.

3.1 GENERALIDADES SOBRE OS MÉTODOS NUMÉRICOS

Esta subseção tem por finalidade esclarecer de maneira genérica alguns aspectos básicos do modelo numérico. Detalhes sobre estes pontos serão vistos na subseção 3.2.

Inicialmente é necessário caracterizar alguns itens: o *domínio contínuo*, a *equação governante do fenômeno*, a divisão do meio em *partes discretas* e o *método dos resíduos ponderados*.

Quanto ao domínio, este é considerado contínuo e possui como equação governante para o problema de deformações elásticas a equação de equilíbrio diferencial para a quantidade de movimento

$$f_i + \sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i \quad \text{com } i = 1..3. \quad (26)$$

Nesta estão presentes as forças de corpo (primeiro termo, f_i), forças internas (segundo termo, $\sigma_{ij,j}$) e forças de inércia (lado direito, $\rho \ddot{u}_i$). Além disso o método utiliza elementos finitos que dividem o domínio nas par-

tes discretas. Estes elementos, juntamente com as funções de parametrização, compõe um novo espaço, no caso discreto, ao qual chama-se de Espaço de Elementos Finitos, \mathbb{S}^h . Como exemplo, a Fig. 6 ilustra uma malha contendo elementos triangulares. Partindo destes elementos, os métodos extraem a maior parte das informações necessárias à obtenção das equações discretas, como as coordenadas nodais, posição de pontos de integração (pontos de Gauss), propriedades do material e intensidade das forças de corpo.

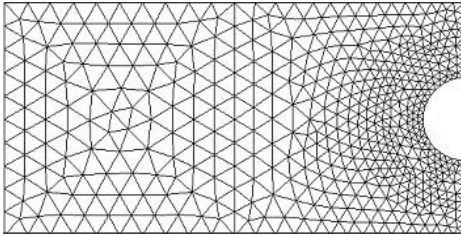


Figura 6: Malha 2D, não estruturada, com elementos triangulares.

O método dos resíduos ponderados é outro importante aspecto que também é comum ao FEM-Galerkin. Segundo Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2006), tanto o método de Galerkin, como o EbFVM, são oriundos do método de resíduos ponderados. Este consiste em ortogonalizar o resíduo (r_i) da equação diferencial, Eq. (26), em relação a determinadas funções w_j , além disso e fazendo-se o termo de inércia nulo, o resíduo é dado pela equação

$$f_i + \sigma_{ij,j}^* = r_i, \quad (27)$$

originada quando na Eq. (26) forem substituídas as derivadas por suas respectivas aproximações. Com a introdução dos valores aproximados, as tensões internas e as forças de inércia também serão aproximadas, daí a indicação com um “*” sobre a variável. Por outro lado, a função w_j irá definir o método de ponderação do resíduo, ou seja, se w_j for igual às funções de deslocamento (utilizadas na aproximação dos deslocamentos no interior do elemento) então tem-se o *Método de Galerkin*, e se for igual à unidade, $w_j = 1$, uma função constante, tem-se o *Método EbFVM*.

A ortogonalização do resíduo propriamente dita é feita através da aplicação de uma propriedade do produto escalar entre duas funções. Esta propriedade define que se o produto escalar entre duas funções, em determinado intervalo, for igual a zero, então estas são ortogonais entre si (LANG, 2003, p. 142). O produto escalar entre o resíduo r_i e a função w_j é dado por:

$$\langle w_i, r_i \rangle = \int_{\Omega} w_j r_i d\Omega = 0 . \quad (28)$$

3.1.1 PARTES DISCRETAS

A Fig. 7 ilustra como é particionado o domínio Ω em elementos/subdomínios. Essas partes, são os subdomínios H e X utilizados pelo EbFVM e FEM respectivamente. O subdomínio X é o próprio elemento e o H é formado pela união de partes de elementos, cujo método de montagem destas partes será visto em secção posterior.

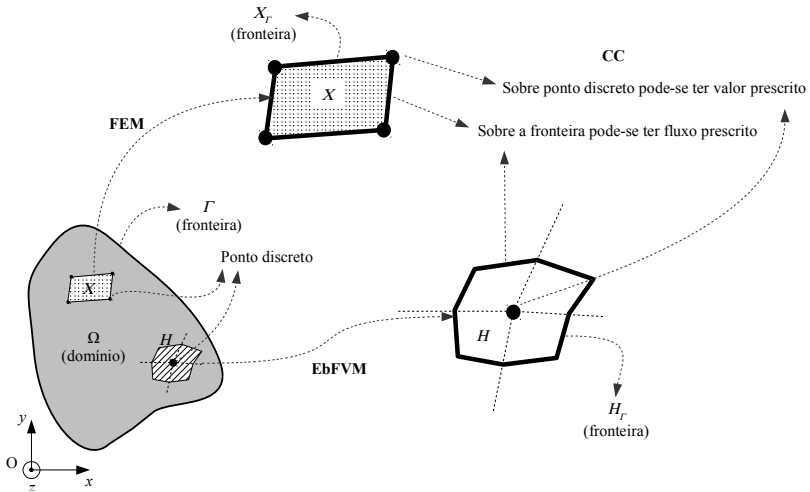


Figura 7: Discretização utilizando o EbFVM e o FEM.

Neste ponto é interessante tecer alguns comentários adicionais: a técnica de obtenção das equações discretas utilizada pelo FEM pode ser considerada como a minimização de um funcional, que no caso de problemas de elasticidade é a energia potencial⁴² (no caso da estática linear) para o subdomínio X , onde em suas fronteiras tem-se CC tanto para fluxo como para os deslocamentos (os deslocamentos prescritos são possíveis, pois sobre as fronteiras de X tem-se os nós da malha). Por outro lado no balanço da propriedade, técnica utilizada pelos métodos baseados em volumes de controle, para as fronteiras do subdomínio H , tem-se condições de contorno apenas para fluxos.

A Tab. 2 apresenta um resumo dos elementos principais utilizados

42 Energia dada pela soma da energia de deformação mais energia de trabalho potencial.

na discretização do meio para os métodos EbFVM e FEM.

Tabela 2: Elementos principais ao se utilizar o EbFVM e o FEM.

Método	Domínio de Integração	CC	Obtenção da Equação
EbFVM	H	Fluxo	Balço de propriedade
FEM	X	Fluxo e/ou Valor	Minimização de um funcional

3.1.2 SOBRE A TÉCNICA DE OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DISCRETAS

No caso do EbFVM, o balanço de propriedade citado na Tab. 2 é obtido através dos fluxos que atravessam a fronteira do domínio de integração H . No caso da elasticidade, a propriedade que “atravessa as fronteiras” é **quantidade de movimento** e este “fluxo”, é a **tensão**. No caso de condução térmica, a propriedade é o **calor** e o fluxo é o próprio **fluxo de calor**, além de outros casos. Assim a equação já discretizada (no clássico sistema de equações globais) obtida para determinado ponto no interior do domínio é proveniente do balanço da propriedade no domínio H , e a solução final do sistema de equações globais, satisfaz os fluxos nas fronteiras deste domínio, que para o caso da elasticidade, esta solução é o campo de deslocamento. Assim domínios adjacentes tem fluxos iguais sobre a mesma fronteira.

A Fig. 8 apresenta um domínio que foi discretizado utilizando 7 pontos que representam 7 subdomínios discretos H_k (volumes). Quanto aos fluxos nas fronteiras destes subdomínios pode-se fazer a seguinte observação: Toma-se como exemplo o fluxo de H_c que atravessa a fronteira adjacente (indicada), este é **igual** em direção e módulo ao fluxo de H_c que atravessa a mesma fronteira. Suas direções são as mesmas, porém de sentido contrário. *Isso ocorre pois os mesmos pontos discretos são utilizados para determinar ambos os fluxos.* Seus sentidos são contrários pois são fronteiras adjacentes, assim o fluxo que “sai” de uma, “entra” na outra. Esse sentido é considerado durante a discretização quando se adota um sentido de percorrer a fronteira (seja Sentido Horário (SH) ou Anti-Horário (AH)). Na figura é utilizado o AH.

Os coeficientes do sistema global de equações são determinados pela integração sobre um polinômio nas fronteiras dos subdomínios H_k . Esse polinômio provém da integração do divergente da tensão e das demais forças (de corpo, de contato ou outras) que atuam no domínio e a posterior aplicação do teorema da divergência de Gauss no espaço. Além

disso, são aplicadas as aproximações para as tensões no espaço \mathbb{S}^h , o qual é formado pelos elementos parametrizados. *A integração por sua vez, é a etapa que representa o balanço da propriedade.*

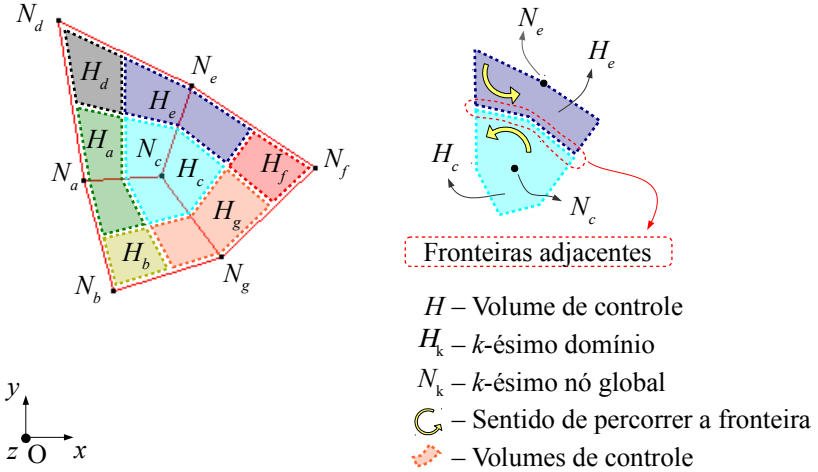


Figura 8: Balanço da propriedade ao redor de um ponto discreto, utilizando-se de domínios H_k .

Os principais itens do processo de discretização que definem a precisão dos coeficientes do sistema de equações são: a malha, funções de interpolação, o balanço da propriedade sobre o subdomínio H , a determinação do gradiente da propriedade (procurada) sobre as fronteiras do subdomínio e a integração numérica sobre o polinômio na fronteira de H . A integração do fluxo sobre a fronteira é feita numericamente utilizando-se a quadratura de Gauss-Legendre com 1 ponto de integração ($m = 1$), que é o suficiente para extrair a integral exata do polinômio discreto (isso no caso de ter-se utilizado funções lineares na parametrização do elemento). Um exemplo deste polinômio obtido através do EbFVM é

$$\int_0^1 (cy'_r \phi'_{ix} - ax'_r \phi'_{iy}) dr, \quad (29)$$

que por sua vez, quando posto em função do sistema parametrizado rOs , transforma-se num **polinômio de ordem 1**.

3.1.3 O CONCEITO DE NÓ PRINCIPAL E A MATRIZ RIGIDEZ GLOBAL

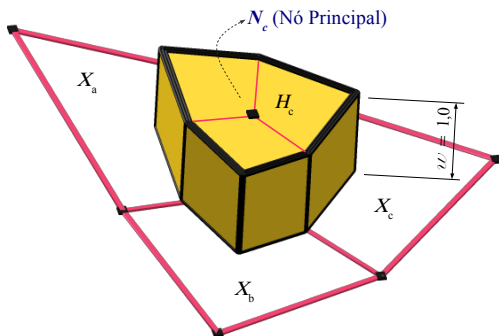


Figura 9: Para o EbFVM, a figura apresenta um exemplo de identificação de Nó Principal para certo VC H_c . Também são mostrados 3 elementos X_a , X_b e X_c .

lado para o FEM, é proveniente da minimização do funcional de energia potencial. Por sua vez, este nó, para o presente trabalho, será chamado de **Nó Principal** sendo que para o EbFVM representa determinado VC

(conforme Fig. 9) e para o FEM representa a região de abrangência das funções peso que tem valor 1 sobre este nó, ou também pode-se chamar esta região de “pseudo volume” conforme ilustrado na Fig. 10, onde é apresentado 3 elementos que contribuem na determinação dos coeficientes que interferem sobre o Nó Principal N_c . Cada elemento contribui sobre o nó principal de acordo com a função peso ϕ_i . Chama-se

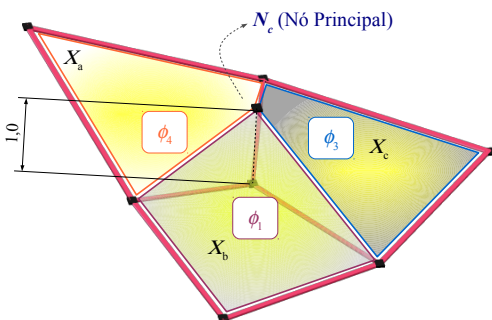


Figura 10: Para o FEM, a figura apresenta um exemplo de identificação de Nó Principal. Também são mostrados os 3 elementos que compõem o “pseudo volume” e as funções de interpolação ϕ_i sobre cada elemento com respeito ao nó Principal.

“pseudo volume” a composição dos volumes (de cada elemento a que o nó pertence) ponderados sobre o Nó Principal. Uma interpretação seme-

lhante é dada por Zienkiewicz e Oñate (1990).

A Fig. 11 ilustra certo sistema gerado a partir da malha com 3 elementos. Esta composição do sistema é a mesma tanto para o EbFVM como para o FEM. Nesta figura as três cores principais (■ ■ ■) definem a contribuição dos 3 elementos, sobre os coeficientes. Cada nó está associado a somente uma equação (uma para cada variável, por exemplo: Os deslocamentos u e v geram duas equações para cada nó) no sistema de final equações.

Isso pode ser visto na Fig. 11 com as duas linhas marcadas com N_a , que por sua vez representa o nó principal para as duas primeiras linhas. Como a forma (não os coeficientes) de inter-relação entre coeficientes é a mesma tanto para o EbFVM quanto para o FEM, o algoritmo de montagem da matriz rigidez local e global são idênticos. Na mesma figura as posições não zeradas da matriz, referem-se a posições com coeficientes não nulos. As posições onde tem simultaneamente duas ou mais cores são coeficientes que foram obtidos pela composição (soma) de coeficientes gerados à partir de dois ou mais elementos. Os detalhes sobre a montagem da matriz global será visto na secção 3.2.6.

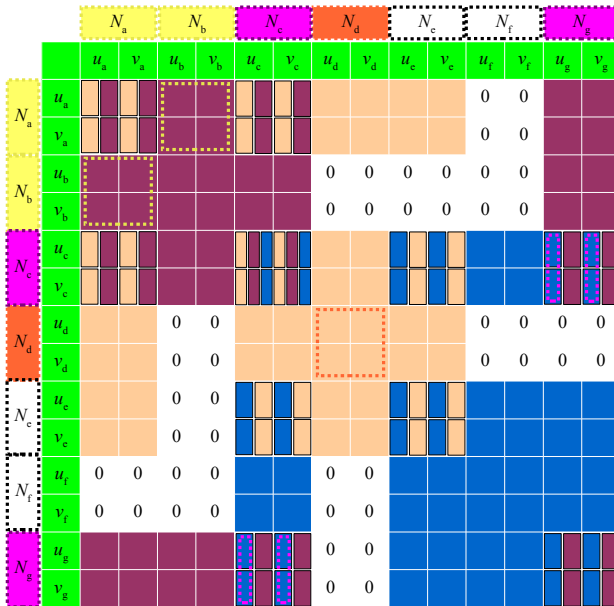


Figura 11: Matriz rigidez global. Disposição e composição dos coeficientes gerados por uma malha com 3 elementos.

3.1.4 MATRIZ RIGIDEZ NODAL E LOCAL

Antes de montar a matriz rigidez global pode-se montar matrizes intermediárias, aqui chamadas de **Matriz Nodal** e Matriz Local. A matriz nodal não é referenciada na literatura, apesar desta estar presente no processo de discretização e de implementação computacional. De certa forma, ela fica “embutida” no processo computacional quando se faz a contagem sobre os nós de cada elemento. Por outro lado, a matriz local é bastante utilizada, não só durante as etapas de discretização, como também em códigos computacionais, onde o desenvolvedor deixa explícito o armazenamento dos coeficientes locais, para posteriormente armazenar estes na matriz global.

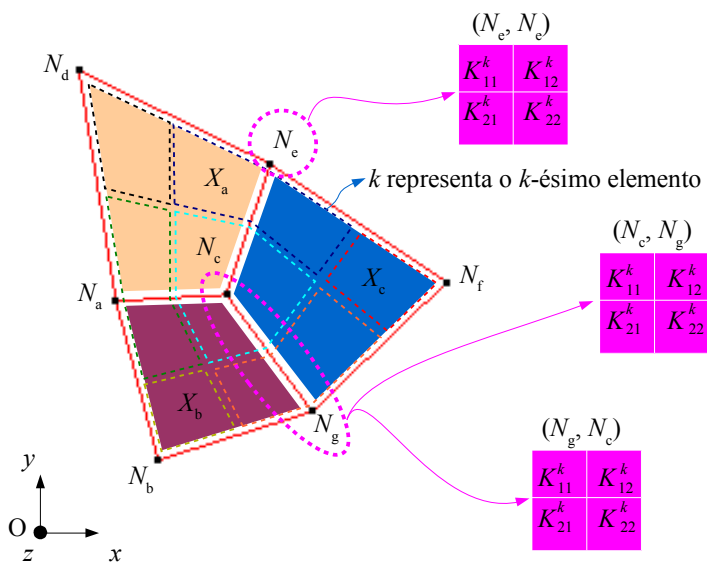


Figura 12: Três Matrizes Nodais montadas à partir do elemento X_c . Cada matriz tem origem num par de nós, no caso da figura: (N_e, N_e) , (N_c, N_g) e (N_g, N_c) .

Para ambos os métodos (EbFVM e FEM) é possível deixar explícita a matriz nodal. Cada uma dessas matrizes **relacionam um par de nós** dentro de certo elemento. Esse par pode ser de nós diferentes ou do mesmo nó, *e.g.* os pares (N_b, N_c) ou (N_b, N_b) ou ainda (N_c, N_b) constituem pares diferentes e geram Matrizes Nodais diferentes. No par de nós, um deles **sempre** é o *Nó Principal*, que por conveniência será adotado como sendo o *primeiro do par* e o *segundo* é o *Nó Secundário*. Ma-

tematicamente pode-se dizer que os pares são formados por um Arranjo com Repetição (A_R). Assim o número de pares (ou seja, de Matrizes Nodais) é dado por $A_{Rn}^r = n^r$, onde n é o número de nós do elemento e r indica o número de elementos no grupo, $r = 2$. Em um elemento com 4 nós tem-se então 16 matrizes nodais.

É certo que esta nomenclatura de Matrizes Nodais não é comum, pois normalmente a Matriz Local (do elemento) é montada diretamente pelas rotinas computacionais onde os pares de nós ficam embutidos no próprio laço computacional. De qualquer forma, ela está sendo descrita neste trabalho para fins de comparação entre os dois métodos, além disso, ela representa a *menor unidade matricial* dentro do processo de localização dos coeficientes. A Fig. 12 mostra algumas das matrizes nodais montadas à partir dos nós N_c , N_e e N_g do k -ésimo elemento. A matriz nodal sempre pertence a determinado elemento e para o caso da elasticidade plana tem dimensões 2×2 .

A matriz local, apesar de utilizada apenas de forma indireta no presente trabalho, contém os coeficientes que relacionam os nós de um único elemento. Ela é gerada à partir das matrizes nodais, e conforme mostrado na Fig. 13, o nó principal sempre define a linha, além disso, o mesmo nó que define a linha na matriz Nodal irá definir a linha na matriz Local, onde serão armazenados os coeficientes. Neste armazenamento não há composição (soma) de valores de coeficientes, pois eles são únicos.

Ainda na Fig. 13 são mostrados 5 exemplos de pares de nós (entre os 48 pares possíveis, 16 cada elemento) (N_d, N_d) , (N_a, N_b) , (N_b, N_a) , (N_c, N_g) e (N_g, N_c) , cada um destes irá gerar uma matriz nodal. Além disso a figura mostra como é feito o armazenamento na matriz local, onde o nó principal do par sempre define a linha e o outro nó a coluna. Assim a matriz nodal gerada pelo par (N_a, N_b) deve ser armazenada na matriz local na posição $(linha, coluna) = (2, 3)$ e na matriz global na posição (N_a, N_b) .

A relação entre a numeração de nós global e local é dada pela *tabela de conectividade*, também apresentada na figura. Assim pode-se calcular os coeficientes da matriz nodal e armazená-los (somando estes) diretamente na matriz global não sendo necessário a montagem da matriz local. A Fig. 11 mostra o armazenamento dos 5 exemplos de matrizes nodais citados nesta secção. Estes são identificados pelas diferentes cores e pelos nós que definem a linha e coluna. Maiores detalhes sobre a montagem da matriz nodal e global serão abordados na secção 3.2.

3.1.5 ALGORÍTIMO COMPUTACIONAL

Ao percorrer o domínio para montar o sistema global de equações os dois métodos são idênticos. Isso vem da maneira com que são obtidas as equações discretizadas, que para ambos, parte da técnica de resíduos ponderados, além disso toda a parametrização dos elementos é igual nos dois métodos. Estes itens asseguram que os dois métodos compartilham de um mesmo algoritmo de obtenção e montagem do sistema de equações nodal e global.

Em resumo, ambos se utilizam de um mesmo conjunto de dados iniciais, percorrem o domínio *elemento a elemento* (aqui definido por k), para cada elemento percorrem os *nós principais* e finalmente para cada nó principal percorrem os *nós secundários*, obtendo assim para cada par *Nó Principal - Nó Secundário* os coeficientes que são acumulados na matriz rigidez.

A Fig. 14 mostra a similaridade e a diferença entre os métodos, a qual reside basicamente no cômputo dos coeficientes, que ocorre no momento em que o algoritmo define qual método irá utilizar: **VF** ou **Galerkin**, os quais são ilustrados na Fig. 15. E conforme já comentado estes são os coeficientes que relacionam dois nós (um *principal* e outro *secundário*) de certo elemento. Para melhor compreensão das sub-rotinas, a Fig. 16 mostra diversos aspectos e conceitos utilizados, como:

- Na relação entre dois nós, N_c e N_e (principal e secundário respectivamente) os polinômios são avaliados sobre os pontos de integração (2 no caso de VF e 4 no caso de Galerkin). Sendo esta a primeira diferença principal entre as sub-rotinas;
 - No algoritmo VF, essa avaliação do polinômio na face de integração é feita na etapa *Integrar sobre a face*. Aqui é interessante observar que para cada par de nó, esta etapa é executada duas vezes, uma para cada face do SVC_c . Isto é executado pelo laço *Contar sobre faces*. A indicação $+K_{11}, +K_{12}, +K_{21}, +K_{22}$, na etapa *Integrar sobre a face*, refere-se ao acúmulo dos coeficientes na *matriz nodal*, ou seja, os valores obtidos nas faces são agrupados;
 - No caso do algoritmo Galerkin, essa avaliação do polinômio nos quatro pontos, é feita na etapa intitulada *Integrar sobre o elemento*, que neste exemplo é indicado por X_c . É interessante observar que esta etapa é executada uma única vez para cada par de nós em cada elemento, ao contrário das duas faces integradas no algoritmo VF;

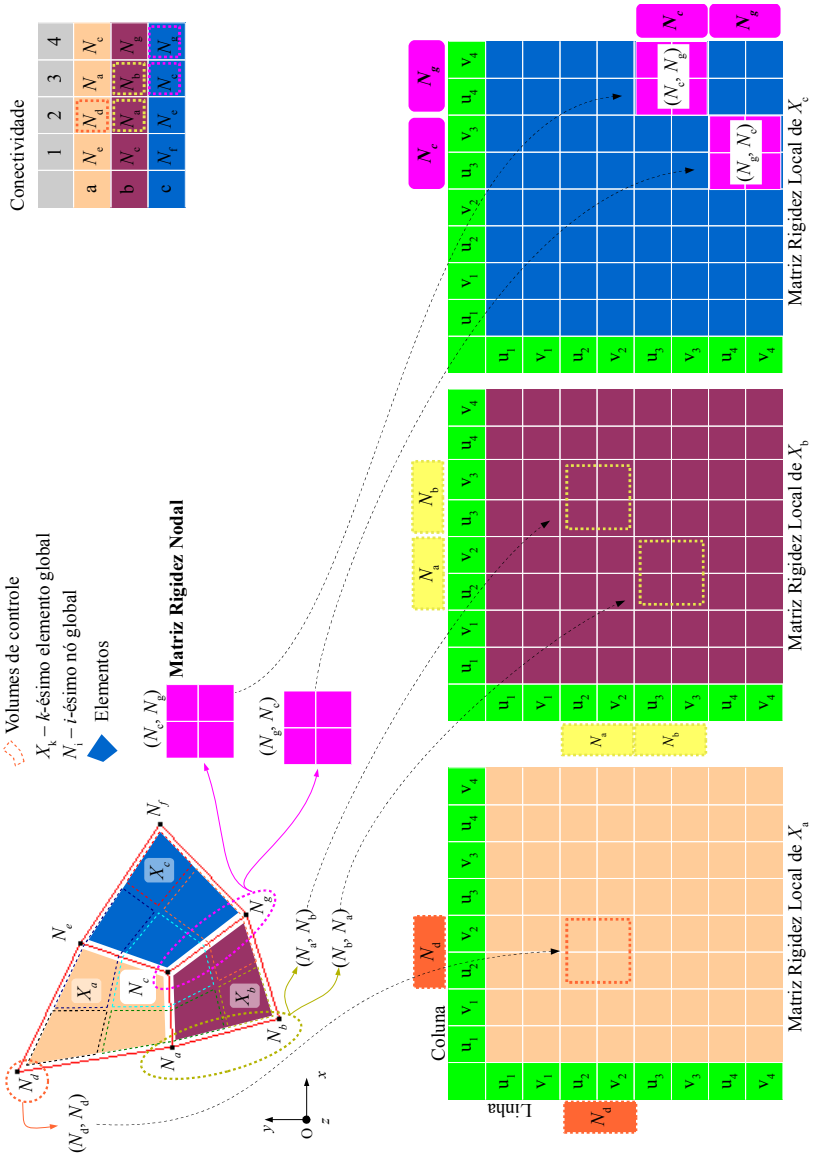


Figura 13: Montagem da Matriz Rigidez Local. À partir dos pares de nós do domínio são montadas as matrizes rigidez locais (5 exemplos de pares são mostrados, (N_d, N_d) , (N_a, N_b) , (N_b, N_a) , (N_c, N_g) e (N_g, N_c)).

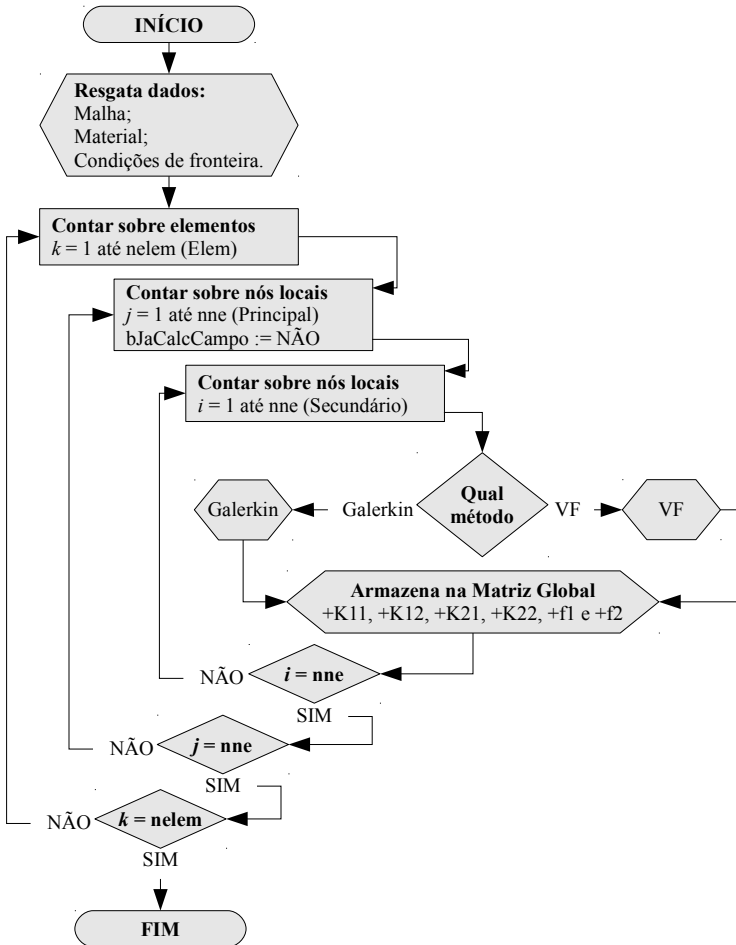


Figura 14: Algoritmo computacional de montagem da matriz rigidez global.

- Para a sub-rotina Galerkin, a avaliação do polinômio é ponderada através de uma função peso, daí a indicação na figura para o “*Domínio nodal*” com gradiente das funções peso, o qual possui coloração variável, indicando a variação da ponderação dentro do domínio Nodal. Por outro lado para determinação dos coeficientes nodais a sub-rotina VF também define um “*Domínio Nodal*” onde a função peso é constante e igual a um. Sendo esta a segunda diferença principal;

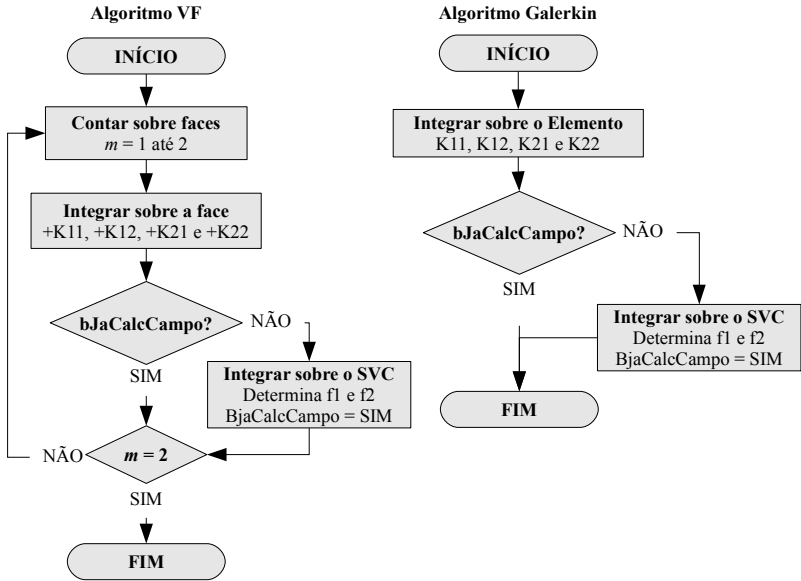








Figura 15: Sub-rotinas VF e Galerkin.

- Para o EbFVM um Volume de Controle bem definido existe para cada nó da malha. Ele é composto pelos Sub-Volumes de Controle (SVC), retirados um de cada elemento que contenha o nó principal. No exemplo da Fig. 16 tem-se 3 elementos que contém o nó principal N_c , portanto o volume de controle é formado por 3 SVC's. A coloração constante utilizada, tanto para o Volume de Controle como para o “*Domínio nodal*”, indica que o peso atribuído aos efeitos é igual a um e isso foi melhor apresentado na Fig. 9;
- Para Galerkin um *Pseudo “Volume de Controle”* existe para cada nó da malha, estes volumes se sobrepõe uns aos outros, porém essa sobreposição é definida juntamente com as funções peso que ponderam os valores integrados. Ainda: quanto mais próximo se está do nó principal, maior a ponderação dos efeitos elásticos do domínio para dentro do coeficiente propriamente dito. Assim pontos muito distantes do nó principal, influem pouco sobre o coeficiente nodal, ao contrário, pontos mais próximos tem uma maior influência. É isso que se quer mostrar com o “*Domínio nodal*” com *gradiente das funções peso*, indicado na Fig. (24b). Ainda, no exemplo da Fig.16,

tem-se 3 elementos que contém o nó principal N_c , portanto o *Pseudo volume de controle* que este nó principal representa, é formado por 3 “Domínios nodais” com gradiente das funções peso os quais são melhor ilustrados na Fig. 10.

Exemplo: Nó *Principal* N_c e Nó *Secundário* N_e

- | | |
|---|--|
| X_k – k -ésimo elemento |  “Domínio Nodal” |
| N_n – n -ésimo nó global |  “Domínio nodal” com funções peso |
|  Volume de controle |  Face onde há integração de fluxo |
|  Pseudo volume de controle |  Pontos de integração |

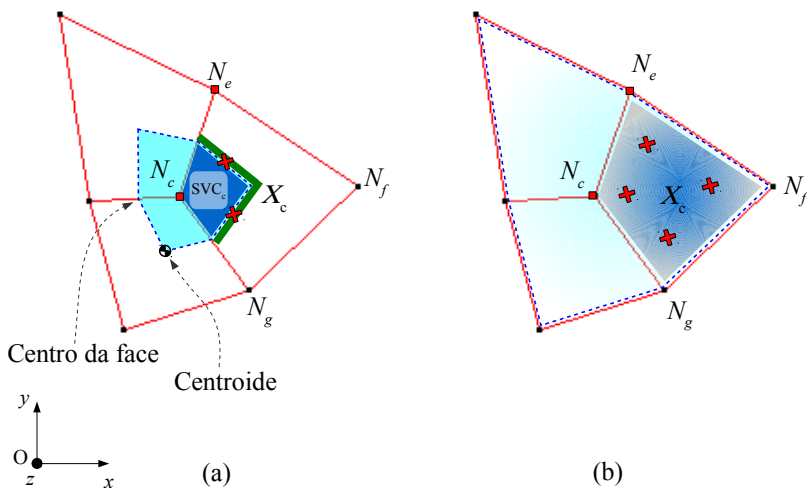


Figura 16: Subdomínio de integração para rotina EbFVM em (a) e rotina Galerkin em (b).

3.1.6 VISÃO GERAL SOBRE A DISCRETIZAÇÃO

Por fim, nesta secção, antes de realizar a discretização propriamente dita (secção 3.2) é importante ter-se uma visão mais geral sobre os pontos já citados e outras etapas utilizadas da álgebra e do cálculo.

Tabela 3: Comparação da discretização utilizando o EbFVM e o FEM.

	Descrição	EbFVM	FEM	Símbolo (EbFVM, FEM)
1	Equação governante	Conservação $\text{div}[\sigma] + \{b\} = \{o\}, \{\ddot{u}\} = \{o\}$		
2	Discretizar domínio	Em i pontos		N_i
3	Subdomínios	Volumes	Elementos	H_k, X_k
4	Coordenadas globais	Cartesianas		xOy
5	Coordenadas locais	Generalizadas		rOs
6	Integrar propriedade	$\int_V [\phi] (\text{div}[\sigma] + \{b\} - \rho\{\ddot{u}\}) dV = \{O\}$ [Força] / [Volume]		
7	Função peso	Matriz identidade $[I]$	Função de parametrização $[\phi]$	$[\phi]$
8	Conceito da derivada do produto	Dispensável	Aplica $\text{div}([\phi][\sigma]) = \text{div}[\phi][\sigma] + [\phi]\text{div}[\sigma]$	
9	Teorema da divergência de Gauss	$\int_V \text{div}[T] dV = \int_S [T] \circ \{ds\}$		
10	Relação constitutiva	$[\sigma] = [B] + [C] : [\varepsilon]$		
11	Relação cinemática	$[\varepsilon] = \frac{1}{2} (\nabla\{u\} + \nabla\{u\}^T)$		
12	Aproximação da derivada do deslocamento	Utiliza funções de interpolação para obter: $\frac{\partial u^*}{\partial x}, \frac{\partial u^*}{\partial y}, \frac{\partial v^*}{\partial x}, \frac{\partial v^*}{\partial y}$		
13	Matriz rigidez nodal	Sim		$[K]^N$
14	Matriz rigidez local	Sim		$[K]^e$
15	Matriz rigidez global	Sim		$[K]$
16	Percorrer por elementos	Sim		k -ésimo elemento
17	Conceito de nó principal	Sim		N_i

A discretização do domínio Ω em subdomínios é a etapa inicial do processo de solução. Durante a discretização é obtida uma relação algébrica entre os nós. Esta relação se dá entre o Nó Principal (nó sobre o qual está sendo feito o balanço da propriedade, neste caso a quantidade de movimento) e o Nó Secundário. Para se obter essa relação procede-se com várias etapas, onde se recorre à *Álgebra Linear* e ao *Cálculo* para

localizar os coeficientes desta relação. A Tab. 3 apresenta as principais etapas da Discretização do EbFVM e do FEM.

Além das diferenças apresentadas nos algoritmos citados na seção 3.1.6, na Tab. 3 pode-se observar que os dois métodos também diferem na necessidade do conceito da derivada do produto, que quando aplicado ao FEM “retira” o divergente de sobre o tensor tensão e o coloca sobre a função peso $[\phi]$.

3.2 A DISCRETIZAÇÃO NO ESPAÇO DE ELEMENTOS FINITOS – \mathbb{S}^h

A equação do movimento de Cauchy,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (30)$$

descreve o movimento dos pontos de um meio contínuo ao qual chamarse-á de domínio, logo a própria equação, é contínua nesse meio. Assim **discretizar** esta equação significa providenciar uma solução (mesmo que aproximada) para determinados pontos discretos (escolhidos convenientemente). Estes pontos discretos, por sua vez, são tomados de tal maneira, a formarem **elementos** os quais representam partes do **domínio**.

As subseções seguintes descrevem em detalhes a discretização através do FEM-Galerkin e do EbFVM que é foco do presente trabalho. A finalidade de apresentar a discretização FEM-Galerkin, é para traçar um paralelo entre as duas discretizações, localizando todos os pontos em comum, o que facilitará uma implementação do EbFVM em códigos existentes de FEM.

O FEM é utilizado com frequência em problemas de mecânica estrutural, bem como em problemas não lineares estáticos ou dinâmicos, mecânica dos fluidos, electromagnetismo, transmissão de calor, filtração de meio poroso, campo elétrico e acústica, entre outros.

Várias aproximações podem ser usadas para transformar a formulação física do problema para uma formulação discretizada utilizando os Elementos Finitos. A formulação matemática do problema é definida por uma equação diferencial acompanhada pelo método mais utilizado para formulação com Elementos Finitos, o Método de Galerkin. Por outro lado se o problema físico puder ser formulado como uma minimização de um funcional, a Formulação Variacional das equações de Elementos Finitos é usualmente utilizada.

3.2.1 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Apesar de não ser utilizada no trabalho, esta formulação será brevemente comentada. Esta formulação é também conhecida como método de Rayleigh-Ritz, pois foi apresentado por Rayleigh em 1877 e redefinido com rigor matemático por Ritz em 1909.

Como exemplo será tomada a formulação variacional, para certo problema genérico. A formulação consiste em encontrar a função $f(x)$ que minimiza o funcional

$$F(x, f, f_x) = \int_{x_1}^{x_2} I(x, f, f_x) dx \quad (31)$$

onde F é o funcional, I o integrando, x_1 e x_2 os extremos do domínio do problema e f_x a derivada primeira da função f . Para a elasticidade, um funcional comumente adotado para minimização é o da energia potencial total, Π , definido por

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma - \sum_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{P}_i \quad (32)$$

onde \mathbf{u} o campo de deslocamentos, \mathbf{f} a força distribuída por unidade de volume (forças de corpo), \mathbf{t} representa as forças na superfície (forças de contato e a pressão), \mathbf{P}_i representa uma força agindo em um ponto i e por fim $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ representam respectivamente o vetor tensão e o vetor deformação. No lado direito da Eq. (32), o primeiro termo representa a energia de deformação elástica devido às tensões internas do material, o segundo representa a trabalho devido à ação das forças de corpo, o terceiro a trabalho devido às forças de superfície e o quarto a energia devido às forças pontuais. A Fig. 17 mostra os elementos utilizados no equacionamento da trabalho potencial Π .

No entanto, o método de Rayleigh-Ritz apresenta alguns inconvenientes que desestimulam seu uso frequente:

- Exige a existência de um funcional que na maioria das aplicações da engenharia é de difícil obtenção (por exemplo as equações diferenciais com derivadas de ordem ímpar);
- É difícil ou praticamente impossível, obter um conjunto de funções (base) que satisfaçam as condições de contorno quando o domínio é geometricamente complexo.

Assim sendo, neste trabalho o método de resíduos ponderados será utilizado.

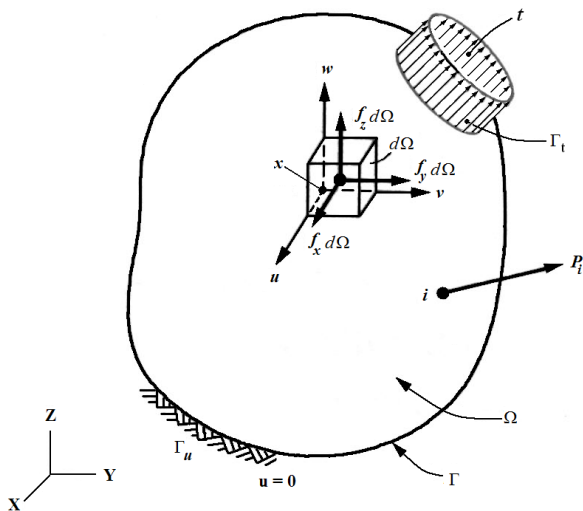


Figura 17: Corpo tridimensional (CHANDRUPATLA, 1991, p. 3)

3.2.2 MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Se a equação diferencial governante é linear, pode-se escrevê-la conforme

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (33)$$

onde \mathbf{A} é um operador linear, \mathbf{u} é a variável (dependente) $\in \mathbb{R}^3$, \mathbf{b} o vetor excitação $\in \mathbb{R}^3$, que pode conter por exemplo forças de corpo e/ou as forças de inércia. Esta equação é definida para um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^3$ cuja fronteira é Γ . Sobre esta equação diferencial linear pode-se aplicar o conceito de resíduos ponderadas para obter uma solução aproximada para a variável \mathbf{u} .

Como a solução $\mathbf{u}(x, y, z)$ exata é desconhecida, busca-se então aproximá-la por uma solução $\mathbf{u}^*(x, y, z)$ definida como uma combinação linear de um conjunto de funções previamente selecionadas podendo ser escrita conforme

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^* = \phi_i Q_i, \quad (34)$$

onde ϕ_i são funções básicas, normalmente polinômios (mais comumente

lineares ou quadráticos) dependentes da posição espacial e linearmente independentes entre si, Q_i , são coeficientes a serem determinados e i varia de acordo com o número de coeficientes utilizados. Assim $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{u}^* \in \mathbb{S}^h$.

Substituindo-se a solução aproximada na equação diferencial, esta por sua vez, na maioria dos casos, não será satisfeita completamente gerando um resíduo conforme

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^* - \mathbf{b} = \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \quad (35)$$

sendo que \mathbf{r} é o resíduo oriundo do fato da equação não ser totalmente satisfeita. Uma vez definida a equação diferencial, a solução aproximada e o resíduo, é possível aplicar o método dos resíduos ponderados.

A ideia do método é ortogonalizar os erros \mathbf{r} em relação a determinadas funções w_j (ainda não definidas), assim a projeção destes erros em relação a estas funções é zero. A condição de ortogonalidade ocorrerá quando o produto interno de \mathbf{r} por \mathbf{W} no domínio Ω for nulo, dessa forma pode-se escrever:

$$\langle \mathbf{W}, \mathbf{r} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{r} \, d\Omega = \mathbf{0}, \quad (36)$$

que é equivalente a dizer que o erro residual é **zero no sentido médio ponderado**. E esta ponderação ocorre em relação a função peso w_j que pode ser escrita conforme:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_j & 0 & 0 \\ 0 & w_j & 0 \\ 0 & 0 & w_j \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Finalmente pode-se definir um conjunto de funções peso de acordo com diversos métodos, por exemplo: *Método de Galerkin*, Método dos Momentos, Método da Colocação de Pontos e *Método da Colocação de Subdomínios* (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2006, p. 61). Neste trabalho serão utilizados o Método de Galerkin e o Método da Colocação de Subdomínios, sendo este último, idêntico ao EbFVM.

3.2.2.1 O Método de Galerkin

O Método de Galerkin origina-se na aplicação do Método dos Re-

síduos Ponderados, onde as funções peso w_j são as próprias funções básicas ϕ_i utilizadas na solução aproximada \mathbf{u}^* .

Uma vez que as funções básicas são utilizadas para montar a solução, elas (juntamente com os coeficientes Q_i) são a solução (aproximada) da equação diferencial linear. E quando se tem uma função ortogonalizada em relação a outra, ocorre que a projeção de uma sobre a outra é nula, assim, ao se ortogonalizar a função que define os erros (no caso o resíduo \mathbf{r}) em relação a solução \mathbf{u}^* , a projeção do erro na direção da solução é nula.

O resíduo é definido pela Eq. (35) e as funções peso são as próprias funções básicas então a condição de ortogonalidade ocorrerá quando o produto interno de \mathbf{r} por ϕ_j no domínio Ω for nulo (LANG, 2003, p. 142), dessa forma obtém-se:

$$\langle \mathbf{W}, \mathbf{r} \rangle = \langle \phi_j, \mathbf{r} \rangle = \int_{\Omega} \phi_j \mathbf{r} d\Omega = \mathbf{0} \quad \text{com } j = 1..n_{npl}, \quad (38)$$

que será o ponto de partida para todo processo de discretização para o FEM.

3.2.2.2 Método da Colocação de Subdomínios

Este método também tem origem na aplicação do Método dos Resíduos Ponderados, porém agora com as funções peso $w_j = 1$ conforme

$$\langle \mathbf{W}, \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{I}, \mathbf{r} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{I} \mathbf{r} d\Omega = \mathbf{0}, \quad (39)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Tomando este tipo de função peso, implicará que durante o processo de ortogonalização, o foco sobre o equilíbrio se dará na fronteira dos subdomínios, ao contrário do Método de Galerkin, que busca este equilíbrio (ponderação) ao longo de todo domínio. A Eq. (39) será o ponto de partida para todo processo de discretização para o EbFVM.

3.2.3 O ESPAÇO \mathbb{R}^3 E \mathbb{S}^h

Supondo um meio contínuo no espaço \mathbb{R}^3 , ilustrado na Fig. 18. Onde Ω e Γ são o domínio e a fronteira respectivamente e P é uma posição de um ponto.

A partir de Ω , deseja-se obter um domínio aproximado, Ω_{FE} , no

espaço de elementos finitos, \mathbb{S}^h , para isso, tomam-se pontos discretos de interesse para representá-lo. Esses pontos discretos são chamados de **nós** e aos agrupamentos destes pontos, formando subdomínios, chamar-se-ão **elementos**. Isto é ilustrado na Fig. 19, com a indicação \mathbb{S}^h , o qual é composto por 3 elementos.

Os elementos representam portanto o domínio discreto e são agrupados na **Matriz Conectividade**, que contém a informação sobre quais nós formam cada elemento. Em cada elemento é utilizada a numeração local $i = 1..n_{npl}$. O sentido AH é adotado para esta numeração. Assim, tanto a matriz conectividade como o sentido de leitura deve ser preservado para manter coerência com as funções de parametrização ϕ_i e as funções peso w_j .

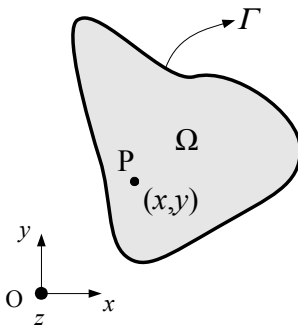


Figura 18: Meio contínuo.

Outra informação importante a ser armazenada são as coordenadas dos nós no espaço \mathbb{R}^3 , pois são elas que fazem a ligação entre o \mathbb{R}^3 e \mathbb{S}^h . Ainda na Fig. 19, a numeração N_i representa o i -ésimo nó.

Também observa-se que na discretização, informações são perdidas na fronteira, o que é devido à dificuldade em representar fronteiras curvas através dos elementos finitos. Portanto quando deseja-se descrever a fronteira com maior precisão, deve-se tomar mais nós sobre

esta e como consequência mais elementos serão gerados.

Quanto à equação governante, Eq. (30), todos seus termos, estão expressos no sistema cartesiano $\{i, j, k\}$ do espaço \mathbb{R}^3 . A este sistema chamar-se-á de sistema de **coordenadas globais**. Assim a solução de \mathbb{N} é u , e esta é uma aplicação definida em \mathbb{R}^3 , $u = u(x, y, z)$.

Porém muitas das deduções que serão apresentadas são para o elemento (subdomínios) X_k com $k = 1..n_{elem}$, onde n_{elem} representa o número de elementos. Como os elementos são sempre quadriláteros (para 2D, podendo ser também triângulos) normalmente de tamanhos e/ou proporções diferentes, pode-se parametrizar este quadrilátero utilizando um sistema de coordenadas apropriado, o qual é normalmente chamado de sistema de **coordenadas locais**, ou seja, um sistema que possa representar a distribuição de qualquer propriedade e até mesmo as próprias coordenadas globais dentro do elemento, através do valor que

esta propriedade tem sobre os nós do elemento.

Matriz Conectividade

Sub-domínios - Pontos discretos				
nó local \rightarrow	1	2	3	4
X_a -	N_a	N_c	N_e	N_d
X_b -	N_a	N_b	N_g	N_c
X_c -	N_c	N_g	N_f	N_e
	Sentido de leitura dos nós			

Elemento X_c

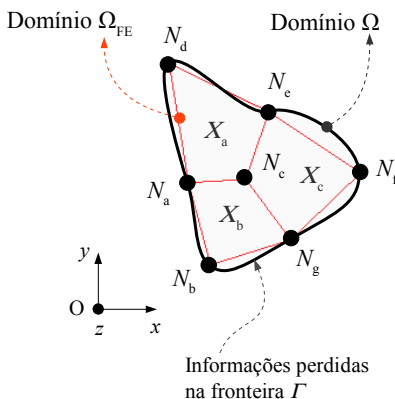
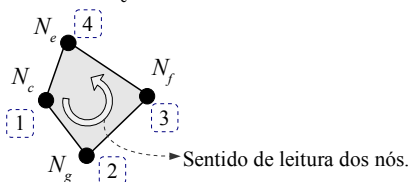


Figura 19: Meio contínuo e discreto.

Esta decisão de se parametrizar o elemento é essencial quando existirem integrais a serem feitas sobre elementos distorcidos, ou seja, elementos que não são retângulos perfeitos (para 2D) ou prismas retos de base retangular (3D). Ainda, com a parametrização de determinada região, normalmente modifica-se a forma desta, que para o presente estudo a modificação consiste em transformar um *quadrilátero convexo qualquer* em um *quadrado* convenientemente escolhido com *lados iguais*. Outra excelente característica da parametrização é a facilidade em obter-se valores interpolados, ou seja, em qualquer posição dentro do elemento, através dos valores nos vértices do elemento. Toda parametrização do elemento quadrilátero está detalhada no apêndice D.

Agora, com estas partes (os elementos) discretas e parametrizadas, todo domínio e fronteira do problema serão analisados como uma composição de n_{elem} elementos. Em outras palavras, todo problema pode ser escrito sobre este novo espaço vetorial formado pelas funções que parametrizam o elemento.

3.2.4 O MÉTODO DE RESÍDUOS PONDERADOS APLICADO SOBRE A EQUAÇÃO DO MOVIMENTO DE CAUCHY

A secção 3.2.2 abordou o Método de Resíduos ponderados aplicado sobre uma equação diferencial linear qualquer, porém nesta secção o método será aplicado sobre a Equação do Movimento de Cauchy, Eq. (30). Ao se escrever esta equação no espaço \mathbb{S}^h para o domínio Ω_{FE} , é

possível obter-se a solução u^* , a qual poderá ser exata em Ω_{FE} , porém sempre aproximada em Ω , assim quando esta solução for substituída na Eq. (30), considerando-se o domínio Ω , irá resultar num resíduo r , o qual foi visto na Eq. (27). A ortogonalizando deste resíduo, em relação a determinada função peso \mathbf{W} , já foi detalhada nas secções 3.1 e 3.2.2, a qual é conseguida para o domínio Ω_{FE} por

$$\langle \mathbf{W}, \mathbf{r} \rangle = \int_{\Omega_{FE}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{r} \, d\Omega_{FE} = 0. \quad (40)$$

Substituindo r pelos seus respectivos termos, os quais são vistos na Eq. (27), exceptuando-se o termo de inércia, obtém-se

$$\int_{\Omega_{FE}} \mathbf{W} \nabla \sigma^* \, d\Omega_{FE} + \int_{\Omega_{FE}} \mathbf{W} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\Omega_{FE} = \mathbf{o}. \quad (41)$$

Mas o operador ∇ (divergente) pode ser integrado por partes conforme obtendo-se

$$\mathbf{W} \nabla \sigma^* = \nabla \mathbf{W} \sigma^* - \nabla \mathbf{W} \cdot \sigma^*. \quad (42)$$

Desta forma, substituindo $\mathbf{W} \nabla \sigma^*$ na Eq. (41) obtém-se

$$\int_{\Omega_{FE}} \nabla \mathbf{W} \sigma^* \, d\Omega_{FE} + \int_{\Omega_{FE}} (-1) \nabla \mathbf{W} \cdot \sigma^* \, d\Omega_{FE} + \int_{\Omega_{FE}} \mathbf{W} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\Omega_{FE} = \mathbf{o}. \quad (43)$$

Nesta equação pode-se observar que o primeiro termo possui o operador ∇ sobre o campo de tensões. Para prosseguir com as deduções, o cálculo apresenta o Teorema da Divergência de Gauss no Espaço (apresentado no apêndice D). Aplicando este teorema o operador ∇ é retirado de sobre o campo de tensões levando a Eq. (43) a assumir a forma

$$\int_{\Omega_{FE}} \mathbf{W} \sigma^* \, d\Omega_{FE} + \int_{\Omega_{FE}} (-1) \nabla \mathbf{W} \cdot \sigma^* \, d\Omega_{FE} + \int_{\Omega_{FE}} \mathbf{W} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\Omega_{FE} = \mathbf{o}, \quad (44)$$

onde $\Omega_{\Gamma FE}$ representa a fronteira do domínio Ω_{FE} e devido à aplicação do Teorema da Divergência, $d\Omega_{\Gamma FE}$ representa um vetor diferencial de área, o qual aponta para fora do volume.

Conforme definido, Ω_{FE} representa todo domínio, e a depender do método, este é dividido em n_{elem} elementos, ou n_{ptsg} volumes de controle, onde n_{ptsg} é o número de pontos globais (nós) utilizados na discretização do domínio. Assim, conforme a Fig. 19, pode-se representar Ω_{FE} como a união de todos elementos X_k , ou conforme a Fig. 8, como a união de todos volumes H_j . Isso é representado por

$$\begin{aligned}\Omega &\cong \Omega_{FE} = \sum_{j=1}^{n_{ptsg}} H_j \\ \Omega &\cong \Omega_{FE} = \sum_{k=1}^{n_{elem}} X_k\end{aligned}\quad (45)$$

Portanto, as integrais sobre Ω_{FE} na Eq. (44), podem ser divididas em n_{elem} ou n_{ptsg} partes, passando a ser sobre H_j ou X_k , conforme a técnica a ser utilizada, assumindo assim a forma da Eq. (46) para X_k e da Eq. (47) para H_j . Sendo estas as equações que serão utilizadas nas discretizações pelo FEM-Galerkin e pelo EbFVM respectivamente.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[\int_{X_{k\Gamma}} \mathbf{W} \boldsymbol{\sigma}^* d\mathbf{X}_{k\Gamma} + \int_{X_k} (-1) \nabla \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* dX_k + \right. \\ \left. + \int_{X_k} \mathbf{W} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dX_k \right] = \mathbf{o}\end{aligned}\quad (46)$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n_{ptsg}} \left[\int_{H_{j\Gamma}} \mathbf{W} \boldsymbol{\sigma}^* d\mathbf{H}_{j\Gamma} + \int_{H_j} (-1) \nabla \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* dH_j + \right. \\ \left. + \int_{H_j} \mathbf{W} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dH_j \right] = \mathbf{o}\end{aligned}\quad (47)$$

3.2.5 APLICAÇÃO DO EbFVM À ELASTICIDADE PLANA

A aplicação do FEM-Galerkin à elasticidade plana é apresentada no apêndice B, assim algumas equações citadas nesta secção e/ou em outras podem ser encontradas neste apêndice.

No EbFVM, o domínio é o **volume**, representado aqui por H_j e a função peso para este domínio é constante e igual a um. Assim \mathbf{W} assu-

me o valor da matriz identidade \mathbf{I} , conforme:

$$\mathbf{W} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Prosseguindo com a ortogonalização do resíduo, porém tomando somente o i -ésimo termo da somatória da Eq. (47) e substituindo-se \mathbf{W} por \mathbf{I} obtém-se a Eq. (49).

$$\int_{H_i\Gamma} \mathbf{I}\boldsymbol{\sigma}^* d\mathbf{H}_i\Gamma + \int_{H_i} (-1) \operatorname{div}(\mathbf{I})\boldsymbol{\sigma}^* dH_i + \int_{H_i} \mathbf{I} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dH_i = \mathbf{o} \quad (49)$$

O primeiro termo desta equação refere-se as forças sobre as fronteiras do volume. O segundo termo representa o comportamento dos esforços elásticos no interior do volume, ponderados sobre o divergente da função peso, que por sua vez é nulo já que esta é constante, o terceiro termo refere-se à ponderação das forças de corpo no interior do volume. Além disso, nomeando-se o terceiro termo como termo fonte \mathbf{b} , pode-se escrever as equações

$$\int_{H_k\Gamma} \sigma_{ij}^* dH_k\Gamma_j = b_i \quad \mathbf{e} \quad (50)$$

$$b_i = - \int_{S_k} f_i \mathbf{e} \, dx dy. \quad (51)$$

Nestas o diferencial de volume dH_i foi representado por $e \, dx dy$, onde e é a espessura constante do domínio, S_k representa a área do VC no plano xOy com espessura constante e , os índices i e j variam de 1 a 3 e representam as componentes na direção Ox , Oy e Oz , k representa o k -ésimo volume.

A área na fronteira $dH_k\Gamma_j$ tem origem à partir do *produto vetorial* do vetor que representa o diferencial de comprimento dL ao longo da fronteira do VC (percorrendo esta no sentido anti-horário) com o vetor que representa a espessura constante do domínio, $\mathbf{e} = \mathbf{e}_k = (e_x, e_y, e_z)$. Portanto o diferencial de área assume a forma

$$dH_k\Gamma_j = \epsilon_{jnp} dL_n e_p, \quad (52)$$

onde ϵ_{jnp} , representa o tensor alternante e substituindo a Eq. (52) na Eq. (50) obtém-se

$$\oint_{H_{k\Gamma}} \sigma_{ij}^* \epsilon_{jnp} e_p dL_n = b_i. \quad (53)$$

O próximo passo, é parametrizar as equações (51) e (53) de tal forma a expressar a integral em função dos parâmetros r e s . Outro aspecto importante é que percorrer o VC de forma completa significa visitar todos os elementos que contribuem na composição do VC. Isto de certa forma também é feito na metodologia utilizada no FEM-Galerkin, pois no momento da montagem do sistema global de equações, todos elementos que possuem determinado nó, devem ser visitados para que a equação global deste nó esteja completa, portanto a completude da equação global de determinado nó é atingida indiretamente no momento da montagem do sistema global de equações. Portanto, de forma semelhante ao FEM-Galerkin, apenas a contribuição de um elemento sobre o VC será computada.

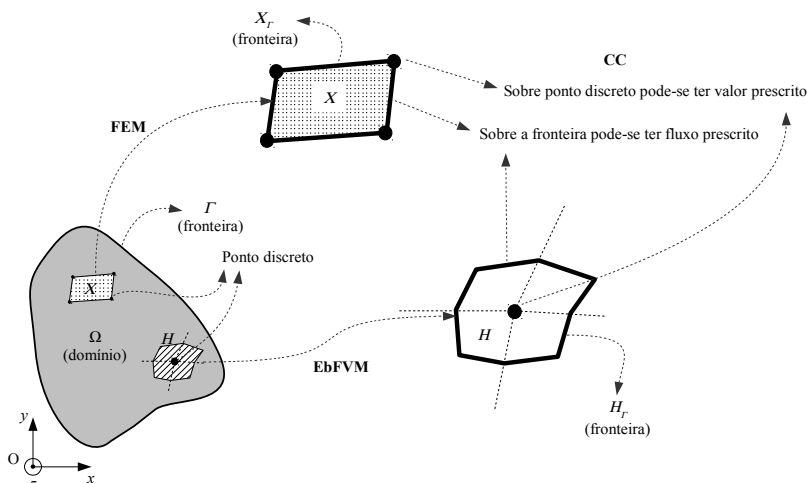


Figura 20: Domínio discretizado em volumes e as partes de um VC centrado no vértice.

Portanto, ao invés de computar a integral sobre o VC completo, S_k , e sua respectiva fronteira, $H_{k\Gamma}$, percorre-se apenas a parcela que pertence a determinado elemento que contribui para a formação do VC, sendo essa parcela chamada Sub-Volume de Controle (ver Fig. 16). Ape-

sar deste conceito ter sido explanado em secções anteriores nesta secção o mesmo será detalhado, e para tanto a Fig. 20 mostra um SVC e sua montagem. Nesta figura é mostrado um domínio discretizado com 7 nós ($N_a, N_b, N_c, N_d, N_e, N_f$ e N_g) que compõe 3 elementos (X_a, X_b e X_c). Os volumes de controle ($H_a, H_b, H_c, H_d, H_e, H_f$ e H_g) são em número de 7, ou seja, cada nó representa um VC. Tomando como exemplo o VC H_e , este é composto por dois sub-volumes de controle, um proveniente do elemento X_a e outro de X_c .

No elemento, o SVC é definido pelas retas que unem o centroide (C) do elemento ao centro da face (cf_1 e cf_2). Em termos de geometria, e em coordenadas globais, esse procedimento aparenta certo grau de complexidade, porém, devido a parametrização e para o elemento quadrilátero, tem-se o centroide nas coordenadas $C = (r; s) = (0; 0)$ e o centro da face nas posições $cf_1 = (0; 1)$ e $cf_2 = (1; 0)$. No caso do FEM, a integração principal é feita sobre todo domínio do elemento, mas no caso do EbFVM, essa integração é feita apenas nas faces ($cf_1 - C$ e $C - cf_2$) do SVC, sempre observando o sentido de percorrer a fronteira adotado (aqui AH).

No EbFVM tem-se o mesmo conceito de nó principal e nó secundário, ou seja, o nó principal receberá a influência de outro nó secundário no equacionamento de seu equilíbrio. Na Fig. 20, o SVC destacado tem nó principal N_e e secundários N_a, N_c, N_d e o próprio N_e . A relação entre dois nós irá gerar o sistema nodal, e é este sistema que será determinado nesta secção. Portanto, a atenção deste ponto em diante, não será mais sobre todo o VC, mas apenas sobre um SVC, assim à partir das equações (53) e (51) utilizar-se-á

$$K^n = \int_{L_{svcl_k}} \sigma_{ij}^* \epsilon_{jnp} e_p dL_n \quad (54)$$

$$b^n = - \int \int_{S_{svcl_k}} f_i e dx dy \quad (55)$$

onde K^n e b^n representam apenas a parcela de influência de certo SVC sobre o l -ésimo VC. Conforme a Fig. 20, nestas equações, L_{svcl_k} é a linha que percorre a fronteira do SVC, H_{svcl_k} , adicionalmente a integral de linha fechada foi substituída por uma integral aberta, pois a integração ocorrerá somente nos trechos $cf_1 - C$ e $C - cf_2$, além disso, esta fronteira tem espessura constante e que para o caso do estado plano $e = (0, 0, e_z) = (0, 0, e)$, dL_n é o diferencial de comprimento da linha

que percorre a fronteira, o índice l representa o nó local que diz respeito ao SVC e k representa o k -ésimo elemento. Por fim, como as equações (54) e (55) estão montadas para um SVC, a efetiva montagem do volume de controle ocorrerá somente no momento da montagem do sistema global de equações.

Para prosseguir a discretização é necessário expressar a tensão σ_{ij}^* em termos dos deslocamentos. Para isso utiliza-se a Eq. (25), assim a Eq. (54) assume a forma

$$K^n = \int_{L_{svec}l_k} A \{ b \varepsilon_{mm}^* \delta_{ij} + [a + (1 - D) b] \varepsilon_{ij}^* \} \epsilon_{jnp} e_p dL_n . \quad (56)$$

Em seguida substituindo-se o tensor deformação infinitesimal, ε_{ij}^* , pela Eq. (5) obtém-se

$$K^n = A \int_{L_{svec}l_k} \{ b u_{m'm}^* \delta_{ij} + C (u_{i'j}^* + u_{j'i}^*) \} \epsilon_{jnp} e_p dL_n . \quad (57)$$

Substituindo agora, os gradientes dos deslocamentos aproximados em função dos valores nodais dados pela Eq. (B.135), obtém-se

$$K^n = A \int_{L_{svec}l_k} \{ b u_a^m \phi_{a'm} \delta_{ij} + C (u_a^i \phi_{a'j} + u_a^j \phi_{a'i}) \} \epsilon_{jnp} e_p dL_n . \quad (58)$$

Esta última equação é a menor unidade de relacionamento entre as constantes elásticas do material com os deslocamentos discretos para um volume e devido o grande número de índices, é interessante revisá-los:

- $i = 1, 2$, são direções principais, define a linha da matriz nodal, direção em que o equilíbrio da quantidade de movimento está sendo promovido. Este índice é livre, portanto quando expandido abre novas linhas, ou seja, equações de equilíbrio em cada direção principal, que para o caso 2D são duas, Ox e Oy ;
- $j = 1, 2$ são direções principais, define a coluna da matriz nodal, ou seja, se a contribuição é de um deslocamento na direção principal Ox ou Oy , aos quais chamar-se-á mais adiante de deslocamento u ou v respectivamente. Este índice é repetido (índice falso), pois ϵ_{jnp} multiplica cada um dos 3 termos dentro das chaves, que por sua vez também possuem índice j ;

- $m = 1, 2$, direções principais. É um índice repetido (falso), e serve para implementar o **operador traço** visto no apêndice D página 256;
- $l = 1..n_{ptsl}$, define o **nó local principal**, aquele a que se refere a equação de equilíbrio discreta. Este por sua vez é um índice livre e gera uma nova matriz nodal. Onde n_{ptsl} é o número de nós locais (ou seja, por elemento). Este índice será expandido apenas em tempo de execução computacional;
- $a = 1..n_{ptsl}$, define o **nó local secundário**, é o nó que gera influência sobre o nó principal l . Este por sua vez é um índice livre e gera uma nova matriz nodal. Este índice será expandido apenas em tempo de execução computacional;
- k refere-se ao elemento que possui o SVC, e é indicado na equação apenas como orientação de que o SVC pertence ao k -ésimo elemento;
- $n = 1..3$ e $p = 1..3$ referem-se a direções principais e são índices repetidos. O fato de aparecer a direção principal 3 é decorrente do cálculo da área através do produto vetorial, o que não implica em ter-se equações de equilíbrio nas três direções.

O próximo passo é expandir os índices i, j e m , a fim de obter a **Matriz Rigidez Nodal**. Assim para $m = 1..2$ e $i = 1$, também lembrando que a espessura é constante no domínio com componente apenas na direção $p = 3$, ou ainda, $e_p = (0, 0, e_3) = (0, 0, e_z)$, expandindo o índice n , que se refere as componentes do diferencial da face de integração, tem-se a equação de equilíbrio na direção Ox :

$$K_1^n = A \int_{L_{svec_k}} \{ [b (u_a^1 \phi_{a'1} + u_a^2 \phi_{a'2}) \delta_{1j} + C (u_a^1 \phi_{a'j} + u_a^j \phi_{a'1})] (\epsilon_{j13} e_3 dL_1 + \epsilon_{j23} e_3 dL_2) \} \quad . \quad (59)$$

Nesta equação, ϵ_{j13} e ϵ_{j23} somente terão valores não nulos quando seus índices não forem repetidos, portanto, as únicas combinações não nulas com o índice j são ϵ_{213} e ϵ_{123} . É certo que o termo entre colchetes deve manter coerência em seus índices com estas duas combinações. Assim a Eq. (59) assume a forma

$$K_1^n = A \int_{L_{svcl_k}} \{C (u_a^1 \phi_{a'2} + u_a^2 \phi_{a'1}) \epsilon_{213} e_3 dL_1 +$$

$$\{ [b (u_a^1 \phi_{a'1} + u_a^2 \phi_{a'2}) + C (u_a^1 \phi_{a'1} + u_a^1 \phi_{a'1})] \epsilon_{123} e_3 dL_2 \}$$
. (60)

Considerando agora o valor das componentes do tensor alternante $\epsilon_{213} = -1$ e $\epsilon_{123} = 1$, representando a componente e_3 da espessura por e obtém-se

$$K_1^n = eA \int_{L_{svcl_k}} \{-C (u_a^1 \phi_{a'2} + u_a^2 \phi_{a'1}) dL_1 +$$

$$[b (u_a^1 \phi_{a'1} + u_a^2 \phi_{a'2}) + C (u_a^1 \phi_{a'1} + u_a^1 \phi_{a'1})] dL_2 \}$$
, (61)

nesta equação, renomeando u^1 e u^2 para u e v respectivamente, reagrupando os termos que possuem u e v , mudando a nomenclatura dos índices 1 e 2 para x e y respectivamente e para manter a coerência com o modelo discreto em FEM-Galerkin altera-se a nomenclatura dos índices de a e l para i e j respectivamente, obtendo-se

$$K_x^n = eA \int_{L_{svcl_k}} \{-C (u_i \phi_{i'y} + v_i \phi_{i'x}) dL_x + [b (u_i \phi_{i'x} + v_i \phi_{i'y}) +$$

$$+ 2C u_i \phi_{i'x}] dL_y \}$$
. (62)

Para conseguir-se a uniformização da integral em qualquer formato de elemento, recorre-se a parametrização deste . Para isso os diferenciais de comprimento dL_x e dL_y devem ser expressos em termos dos parâmetros r e s , assim utilizando-se a Eq. (D.188) pode-se reescrever a Eq. (62) conforme

$$K_x^n = eA \left\{ \int_{L_{svcl_k}} [((b + 2C) y'_r \phi_{i'x} - C x'_r \phi_{i'y}) dr +$$

$$+ ((b + 2C) y'_s \phi_{i'x} - C x'_s \phi_{i'y}) ds] \right\} u_i +$$

$$eA \left\{ \int_{L_{svcl_k}} [(-C x'_r \phi_{i'x} + b y'_r \phi_{i'y}) dr +$$

$$+ (-C x'_s \phi_{i'x} + b y'_s \phi_{i'y}) ds] \right\} v_i$$
. (63)

Os diferenciais de integração estão no sistema local rOs , mas a integral ocorre ao longo de uma linha, aqui definida por L_{sv_cjk} , portanto, como L_{sv_cjk} possui duas faces retas ($f_1 \equiv cf_1 - C$ e $f_2 \equiv C - cf_2$, ver Fig. 20) de integração, pode-se generalizar as integrais na Eq. (63) parametrizando estas em relação a uma reta conforme abordado no apêndice D. Assim aplicando a Eq. (177) obtém-se a Eq. (64). Onde a variável q , é o parâmetro de integração.

$$\begin{aligned}
 K_x^n = eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} [((b + 2C) y'_r \phi'_{i'x} - C x'_r \phi'_{i'y}) \alpha_{fm} + \right. \\
 \left. + ((b + 2C) y'_s \phi'_{i'x} - C x'_s \phi'_{i'y}) \beta_{fm}] dq \right\} u_i + \\
 eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} [(-C x'_r \phi'_{i'x} + b y'_r \phi'_{i'y}) \alpha_{fm} + \right. \\
 \left. + (-C x'_s \phi'_{i'x} + b y'_s \phi'_{i'y}) \beta_{fm}] dq \right\} v_i
 \end{aligned} \tag{64}$$

Onde a somatória em m representa as duas faces retas f_1 e f_2 . Estas são representadas nas integrais por \mathbf{f}_m e seu comprimento absoluto por $\|\mathbf{f}_m\|$. O mesmo pode ser feito para a direção Oy , obtendo-se

$$\begin{aligned}
 K_y^n = eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} [(-b x'_r \phi'_{i'x} + C y'_r \phi'_{i'y}) \alpha_{fm} + \right. \\
 \left. + (-b x'_s \phi'_{i'x} + C y'_s \phi'_{i'y}) \beta_{fm}] dq \right\} u_i + \\
 eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} [(C y'_r \phi'_{i'x} - (b + 2C) x'_r \phi'_{i'y}) \alpha_{fm} + \right. \\
 \left. + (C y'_s \phi'_{i'x} - (b + 2C) x'_s \phi'_{i'y}) \beta_{fm}] dq \right\} v_i
 \end{aligned} \tag{65}$$

Nas equações (64) e (65), tem-se:

- $j = 1..n_{ptsl}$, apesar de não explícito nas equações define o nó local principal a que elas pertencem;
- $i = 1..n_{ptsl}$, define o nó local secundário;
- e , é a espessura do estado plano;
- C é dado pela Eq. (B.137);
- A, a, b e D estão na Tab. 1.

Os termos b_x e b_y por sua vez são obtidos à partir da Eq. (55). A qual tem a parcela de contribuição de forças de corpo (f_i) e ainda pode-se adicionar as forças pontuais ($F_{iPontual}$, que atuam sobre nós) e forças distribuídas ($F_{iDistrib}$). Dessa forma, as equações para b_x e b_y já com a nomenclatura alterada dos índices assumem as respectivas formas

$$b_x^n = -e \int \int_{S_{svck}} f_x \|J\| drds + F_{xPontual} + F_{xDistrib} \quad e \quad (66)$$

$$b_y^n = -e \int \int_{S_{svck}} f_y \|J\| drds + F_{yPontual} + F_{yDistrib} \quad (67)$$

Por fim, as equações (64), (65), (66) e (67) podem ser representadas pelo **Sistema Nodal** conforme definido no apêndice B Eq. (B.144). Em outras palavras, a forma do sistema nodal é idêntico ao gerado pelo FEM-Galerkin, por outro lado, para o EbFVM, as equações para o cômputo das componentes de K^n e b^n diferem do FEM-Galerkin e são dadas pelas equações

$$\begin{aligned} K_{xu}^n &= eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} [(b + 2C) y'_r \phi_{i'x} - C x'_r \phi_{i'y}] \alpha_{fm} + \right. \\ &\quad \left. ((b + 2C) y'_s \phi_{i'x} - C x'_s \phi_{i'y}) \beta_{fm} \right\} dq \\ K_{xv}^n &= eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} [(-C x'_r \phi_{i'x} + b y'_r \phi_{i'y}) \alpha_{fm} + \right. \\ &\quad \left. (-C x'_s \phi_{i'x} + b y'_s \phi_{i'y}) \beta_{fm} \right\} dq \\ K_{yu}^n &= eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} [(-b x'_r \phi_{i'x} + C y'_r \phi_{i'y}) \alpha_{fm} + \right. \\ &\quad \left. (-b x'_s \phi_{i'x} + C y'_s \phi_{i'y}) \beta_{fm} \right\} dq \\ K_{yv}^n &= eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} [(C y'_r \phi_{i'x} - (b + 2C) x'_r \phi_{i'y}) \alpha_{fm} + \right. \\ &\quad \left. (C y'_s \phi_{i'x} - (b + 2C) x'_s \phi_{i'y}) \beta_{fm} \right\} dq \\ b_x^n &= -e \int \int_{S_{svck}} f_x \|J\| drds + F_{xPontual} + F_{xDistrib} \\ b_y^n &= -e \int \int_{S_{svck}} f_y \|J\| drds + F_{yPontual} + F_{yDistrib} \end{aligned} \quad (68)$$

(69)

Apesar de não explícito, em todo sistema nodal é importante lembrar que este refere-se ao SVC do j -ésimo nó local principal, pertencente a um k -ésimo elemento. Assim para o elemento quadrangular $j = 1..4$.

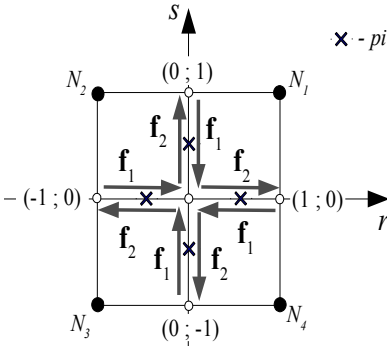


Figura 21: Faces f_m para cada nó local principal em um elemento quadrilateral.

O algoritmo computacional deverá determinar os valores de $\|f_m\|$, α_{fm} e β_{fm} . Para elementos quadrilaterais estes são facilmente determinados pois sempre $\|f_m\| = 1$ e α_{fm} ou β_{fm} sempre assumirão os valores: 0, 0, 1, 0 ou -1, 0. Isso ocorre, pois a reta sempre será paralela a Or ou a Os , no sentido destes, ou no sentido contrário. A Fig. 21 juntamente com a Tab. 4 apresenta os valores de $\|f_m\|$, α_{fm} e β_{fm} para

os 4 nós locais principais possíveis num elemento quadrilateral. Além disso a integração numérica nas faces utiliza-se da regra de Gauss-Legendre com um pi . Estes pontos também são indicados na figura e suas coordenadas na tabela.

Tabela 4: Coeficientes para faces do SVC.

Nó local N_j	f_1					f_2				
					pi					pi
	$\ f_1\ $	α_{f_1}	β_{f_1}	r	s	$\ f_2\ $	α_{f_2}	β_{f_2}	r	s
N_1	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0
N_2		1	0	$-\frac{1}{2}$	0		0	1	0	$\frac{1}{2}$
N_3		0	1	0	$-\frac{1}{2}$		-1	0	$-\frac{1}{2}$	0
N_4		-1	0	$\frac{1}{2}$	0		0	-1	0	$-\frac{1}{2}$

Por fim, é interessante observar as similaridades entre os termos das componentes de K^n , pois $y'_r \phi'_{ix}$, $x'_r \phi'_{iy}$, $y'_s \phi'_{ix}$, $x'_s \phi'_{iy}$, $x'_r \phi'_{ix}$, $y'_r \phi'_{iy}$, $x'_s \phi'_{ix}$, $y'_s \phi'_{iy}$ e $(b + 2C)$ se repetem. Essa observação é útil quando deseja-se diminuir o tempo de processamento das componentes.

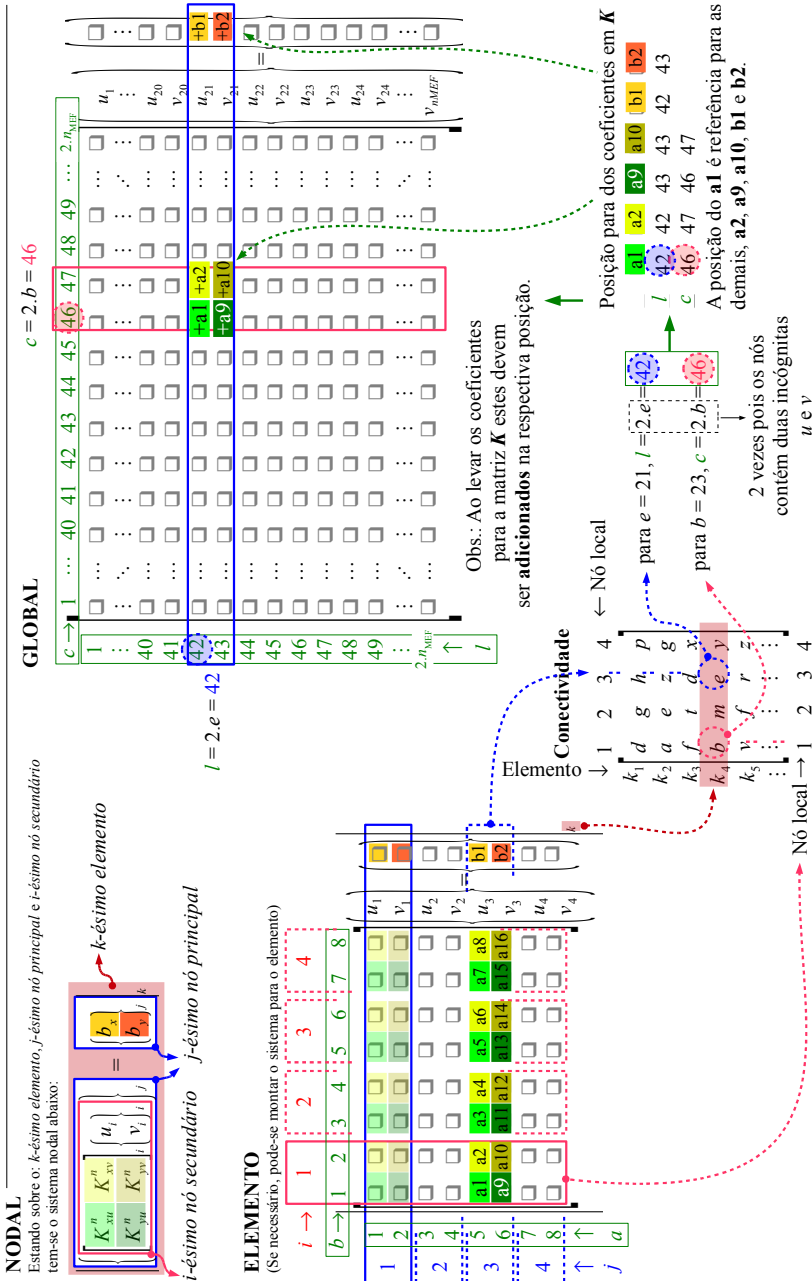


Figura 22: Montagem do sistema global à partir do sistema nodal.

3.2.6 MONTAGEM DA MATRIZ RIGIDEZ E TERMO FONTE GLOBAL

Os sistemas nodais determinados para EbFVM e FEM-Galerkin, são idênticos na forma e na indexação dos nós locais, globais e elementos. Desta forma ambos foram representados pelo sistema genérico dado pela Eq. (144). Lembrando que este sistema está vinculado a um k -ésimo elemento, j -ésimo nó principal e i -ésimo nó secundário. O processo de discretização gera um sistema global de equações conforme

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^* = \mathbf{b} \quad (70)$$

A Fig. 22 apresenta de maneira esquemática a montagem do sistema global de equações, com base no sistema nodal e na matriz conectividade. É mostrado também o sistema à nível de elemento, mas este não necessariamente deve ser montado para montagem do global. Também pôde ser visto que: o algoritmo de montagem do sistema global é o mesmo tanto para o EbFVM quanto para o FEM-Galerkin (ver figuras 14 e 15). A única diferença entre ambos reside nas equações de cômputo das componentes de \mathbf{K}^n e \mathbf{b}^n .

Um cuidado adicional deve ser tomado com relação ao cômputo de b_x e b_y , pois este é calculado uma única vez para cada j -ésimo nó principal. Isso já foi explicitado no algoritmo da Fig. 15, para o EbFVM e o FEM-Galerkin na variável de estado **bJaCalcCampo**.

3.3 CÔMPUTO DAS TENSÕES

As tensões têm origem a partir do gradiente do campo de deslocamentos, assim sua importância na verificação deste gradiente e sua aplicação no projeto de determinado elemento estrutural é indiscutível.

O gradiente é obtido através do pós-processamento do campo de deslocamentos com os assim chamados *Esquemas de Recuperação de Tensões*, sendo os mais comuns: Cômputo Direto no Nó (CDN), Extrapolação (Ex), Suavização Local (SL), Suavização Global (SG), “*Superconvergent Patch Recovery*” (SPR) e “*Patch*” Nodal para Deslocamento Linear (PNDL).

Por fugir dos propósitos centrais do presente trabalho estas técnicas são descritas no apêndice C.

4 RESULTADOS

Neste capítulo serão descritos e aplicados alguns testes padrões frequentemente utilizados na validação de modelos baseados em elementos finitos. Além disso será avaliado o comportamento do método frente a alguns problemas propostos entre outros aspectos.

4.1 TESTES PADRÕES

4.1.1 *PATCH TEST*⁴³

O objetivo do *Patch Test* é verificar a consistência do método, o processo de discretização e avaliar a implementação computacional.

A condição de consistência (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2006) a qual requer que no limite, quando h (tamanho do elemento) tende a zero, a aproximação em volumes finitos, Eq. (70), deverá modelar exatamente a equação diferencial Eq. (30). Considerando que a equação discretizada (Eq. (70)) foi obtida com uma ordem do erro $p \geq 2$, **a aproximação deverá reproduzir exatamente um problema proposto com qualquer forma linear de u^*** , da mesma forma que $u^* \rightarrow u$ quando $h \rightarrow 0$. Este requisito é testado pela atual interpretação do *patch test* mostrado na Fig. 23, o qual é avaliado para o EPT com $E = 1000 Pa$ e $\nu = 0,3$.

43 Resultados foram divulgados no ECCOMAS CFD 2010 (FILIPPINI et. al, 2010).

Serão considerados na análise os *patch tests* A, B, C e Simple-
elemento. Nestes será utilizada a solução para o deslocamento dada por

$$\mathbf{u}(x; y) = \begin{cases} u = 0,0014x \\ v = 0,0052x + 0,0014y \end{cases} \quad [\text{m}]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x; y) = \begin{cases} \sigma_{xx} = 2,0 \\ \sigma_{yy} = 2,0 \\ \sigma_{xy} = 2,0 \\ \sigma_{zz} = 0,0 \end{cases} \quad [\text{Pa}] \quad , \quad (71)$$

e para o *patch test* C com elemento distorcido será utilizada a seguinte
solução

$$\mathbf{u}(x; y) = \begin{cases} u = 0,0020x \\ v = -0,0006y \end{cases} \quad [\text{m}]$$

$$\boldsymbol{\sigma}(x; y) = \begin{cases} \sigma_{xx} = 2,0 \\ \sigma_{yy} = 0,0 \\ \sigma_{xy} = 0,0 \\ \sigma_{zz} = 0,0 \end{cases} \quad [\text{Pa}] \quad . \quad (72)$$

4.1.1.1 Resumo da Aplicação e Interpretação de cada Teste

PATCH TEST A

Neste teste são inseridos os valores exatos do deslocamento no
valor u_i^* , para cada equação do sistema linear de cada nó a pertencente
ao **interior do domínio**. Então o sistema linear, *passa no teste caso da
seguinte identidade*

$$K_{ij}u_j^* - b_i \equiv 0 \quad (73)$$

de tal forma que seja satisfeita para $i = a$ de acordo com a Fig. 23a. Esta
identidade é a representação indicial da Eq. (70) onde $i = 1 \dots 2 \times n_{nptg}$,
 $j = 1 \dots 2 \times n_{nptg}$, K_{ij} são as componentes da matriz rigidez global, b_i as
componentes do vetor força e u_j^* representa o deslocamento u^* ou v^*
conforme o valor de j , caso $j \in [1; n_{nptg}]$, então u_j^* refere-se a u^* e caso
 $j \in [n_{nptg} + 1; 2 \times n_{nptg}]$, u_j^* refere-se a v^* .

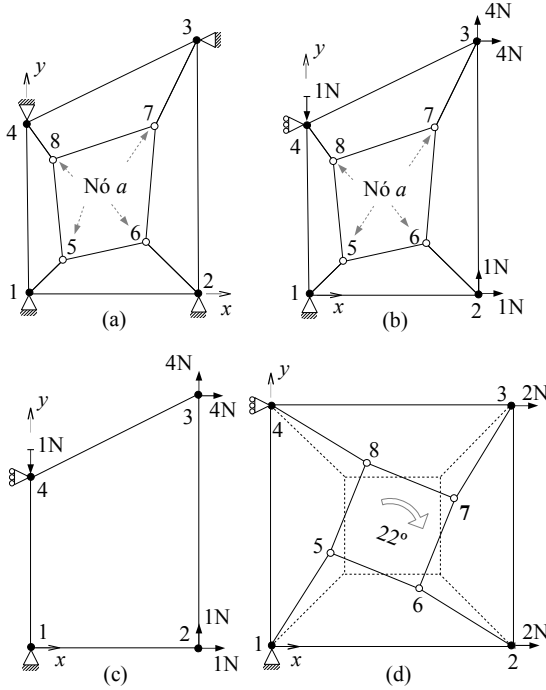


Figura 23: Patch de elementos para: (a) Patch test A e B, (b) Patch test C, (c) Simple-elemento e (d) Patch test C com elementos “degenerados”.

PATCH TEST B

Neste teste somente os valores de u_i^* , correspondentes as fronteiras do patch são substituídos no sistema linear e a partir daí os valores de u_a para o interior do domínio são determinados através de

$$u_i^* = \frac{b_i - (1 - \delta_{ij})K_{ij}u_j^*}{\delta_{ij}K_{ij}}, \tag{74}$$

onde $i = a$ conforme a Fig. 23a. Considera-se que o teste foi bem sucedido se u_a calculado for igual ao valor exato.

Ambos os patch tests (A e B) verificam somente se a equação diferencial é satisfeita para o interior do domínio. Portanto nada é verificado quanto a aproximação nas fronteiras e é justamente este aspecto que será abrangido adicionalmente pelo teste C.

PATCH TEST C

Neste teste um *patch* de elementos é montado como nos testes A e B, mas agora também com condições de contorno naturais prescritas (forças prescritas). Na Eq. (70) é fixado o mínimo número de parâmetros u^* com valor prescrito necessários para obter uma solução física válida, *i.e.*, que elimine o movimento de corpo rígido. A solução é então localizada para os demais valores de u^* . Por fim, o teste é bem sucedido caso estes valores localizados sejam iguais aos valores exatos.

Como este teste verifica o domínio e a fronteira, *ele é necessário e também suficiente para garantir a convergência com o refino da malha.*

OBSERVAÇÕES PARA OS TESTES A, B E C

É claro que nos três testes a identidade e/ou igualdade nunca é plenamente satisfeita devido aos arredondamentos e/ou truncamentos e isto deve ser levado em consideração quando as comparações são feitas.

Como o campo de deslocamento escolhido (Eq. (71) e (72)) é linear e as funções utilizadas no mapeamento dos deslocamentos são lineares, o resultado obtido pelo método numérico deve ser sempre “exato” (mantidas as observações citadas no § anterior) o que significa que o método passou no respectivo teste.

Passar nestes testes significa não somente ter-se a convergência garantida, mas também que a discretização e implementação computacionais estão corretas.

TESTE DE SIMPLES ELEMENTO

Este, é uma alternativa para o teste C, entretanto considerando apenas um elemento. A aprovação neste teste é de fato um requisito para verificar se a formulação em elementos finitos é estável, já que por ocasião de um patch maior, este pode não revelar certas instabilidades inerentes a um simples elemento.

4.1.1.2 Aplicação dos Testes aos Casos da Fig. 23

Para comparação a Tab. 5 apresenta as coordenadas, soluções e forças nodais para a Eq. (71) referentes a Fig. 23a, b e c e para a Eq. (72) referente a Fig. 23d. Os termos da matriz rigidez e vetor força estão

na Tab. A.5.

Tabela 5: Coordenadas, soluções e forças nodais para a Eq. (71) referentes a Fig. 23a, b e c e para a Eq. (72) referente a Fig. 23d.

Para a Eq. (71)							Para a Eq. (72)					
N	x	y	u	v	b_x	b_y	x	y	u	v	b_x	b_y
1	0,0	0,0	0,0000	0,0000	-4,0	-4,0	0,0	0,0	0,000000	0,000000	-2,0	0,0
2	2,0	0,0	0,0028	0,0104	1,0	1,0	2,0	0,0	0,004000	0,000000	2,0	0,0
3	2,0	3,0	0,0028	0,0146	4,0	4,0	2,0	2,0	0,004000	-0,001200	2,0	0,0
4	0,0	2,0	0,0000	0,0028	-1,0	-1,0	0,0	2,0	0,000000	-0,001200	-2,0	0,0
Somente Fig. 23a e b												
5	0,4	0,4	0,00056	0,00264	0,0	0,0	0,48	0,78	0,000959	-0,000467	0,0	0,0
6	1,4	0,6	0,00196	0,00812	0,0	0,0	1,22	0,48	0,002442	-0,000288	0,0	0,0
7	1,5	2,0	0,00210	0,01060	0,0	0,0	1,52	1,22	0,003041	0,000733	0,0	0,0
8	0,3	1,6	0,00042	0,00380	0,0	0,0	0,78	1,52	0,001558	-0,000912	0,0	0,0

APLICAÇÃO DO TESTE A

Usando a Fig. 23a e a solução dada pela Eq. (71) atribui-se aos nós de fronteira os valores analíticos da Tab. 5, obtém-se o sistema de equações e sobre este verifica-se a identidade dada pela Eq. (73) aos nós 5, 6, 7 e 8, obtendo-se os resíduos para b_x e b_y que estão na Tab. 6. Como pode-se ver, os resíduos são da ordem dos erros de truncamento. *Portanto o método é aprovado no teste.*

APLICAÇÃO DO TESTE B

Usando a Fig. 23a e a solução dada pela Eq. (71), atribui-se aos nós de fronteira os valores analíticos da Tab. 5, obtém-se o sistema de equações e sobre este aplica-se a Eq. (74) aos nós 5, 6, 7 e 8 obtendo-se os valores para os deslocamentos u^* e v^* na Tab. 6. Os valores obtidos coincidem exatamente com os valores analíticos da Tab. 5. *Portanto o método é aprovado no teste.*

APLICAÇÃO DO TESTE C

Usando a Fig. 23b e a solução dada pela Eq. (71), atribui-se aos nós de fronteira os valores analíticos da Tab. 5 para os deslocamentos

prescritos e forças prescritas, obtém-se o sistema de equações e sobre este aplica-se a Eq. (74) aos nós 2, 3, 5, 6, 7 e 8 para u e v e ao nó 4 somente para v , obtendo-se assim os valores para os deslocamentos u^* e v^* na Tab. 6 com os respectivos erros absolutos. Como pode-se ver os erros são da ordem dos erros de truncamento e/ou arredondamento, portanto *o método é aprovado no teste*.

Tabela 6: Teste A – Resíduos para g_x e g_y . Teste B – Deslocamento u^* e v^* . Teste C – Deslocamento u^* e v^* com os respectivos erros.

N	Teste A		Teste B		Teste C			
	g_x	g_y	u^*	v^*	u^*	Erro	v^*	Erro
2					0,00280	1,0E-17	0,01040	9,9E-17
3					0,00280	4,0E-17	0,01460	9,7E-17
4							0,00280	2,0E-17
5	1,6E-15	-3,9E-15	0,00056	0,00264	0,00056	0,0	0,00264	1,0E-17
6	-2,7E-14	5,3E-15	0,00196	0,00812	0,00196	0,0	0,00812	4,0E-17
7	4,2E-15	-7,6E-14	0,00210	0,01060	0,00210	2,0E-17	0,01060	9,7E-17
8	0,0E+00	0,0E+00	0,00042	0,00380	0,00042	3,0E-18	0,00380	2,0E-17

APLICAÇÃO DO TESTE DE SIMPLES ELEMENTO

Usando a Fig. 23c e a solução dada pela Eq. (71), atribui-se aos nós de fronteira os valores analíticos da Tab. 5 para os deslocamentos prescritos e forças prescritas, obtém-se o sistema de equações e sobre este aplica-se a Eq. (74) aos nós 2 e 3 para u e v e ao nó 4 somente para v , obtendo-se assim os valores para os deslocamentos u^* e v^* . Estes valores coincidem exatamente com os valores analíticos, portanto *o método é aprovado no teste*.

APLICAÇÃO DO TESTE C COM ELEMENTOS “DEGENERADOS”

Usando a Fig. 23d e a solução dada pela Eq. (72), atribui-se aos nós de fronteira os valores analíticos da Tab. 5 para os deslocamentos prescritos e forças prescritas, obtém-se o sistema de equações e sobre este aplica-se a Eq. (74) aos nós 2, 3, 5, 6, 7 e 8 para u e v e ao nó 4 somente para v , obtendo-se assim os valores para os deslocamentos u^* e v^* que coincidem exatamente com os valores analíticos. Portanto *o método é aprovado no teste*.

4.1.2 LOCKING VOLUMÉTRICO

É sabido que a formulação padrão baseada em deslocamentos para problemas de elasticidade falha quando o coeficiente de Poisson assume o valor 0,5. Na verdade, para o FEM em condições específicas, o problema surge quando o material se aproxima da incompressibilidade com $\nu > 0,4$.

A aplicação de uma formulação mista para tais problemas pode evitar as dificuldades e é de grande interesse prático pois o comportamento quase incompressível é encontrado em uma variedade de problemas de engenharia. Uma das formulações mistas envolve não somente os deslocamentos, mas também a tensão hidrostática. Este tipo de formulação não será abordada neste trabalho, mas apenas as implicações de $\nu \rightarrow 0,5$ para a formulação baseada unicamente em deslocamentos.

Para entender melhor as implicações devidas a $\nu \rightarrow 0,5$, deve-se observar o comportamento da relação constitutiva dada pela Eq. (20), repetida aqui para maior clareza e da Eq. (22), referente ao tensor de elasticidade isotrópica. O limite do tensor elasticidade quando $\nu \rightarrow 0,5$,

$\lim_{\nu \rightarrow 0,5} [C]$, é dado por

$$\lim_{\nu \rightarrow 0,5} [C] = \begin{bmatrix} +\infty & +\infty & +\infty & 0 & 0 & 0 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 & 0 & 0 \\ +\infty & +\infty & +\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}E \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Isso mostra que para as componentes normais da tensão e deformação, as respectivas componentes do tensor elasticidade, vão ao infinito quando $\nu \rightarrow 0,5$, o que leva a condição de incompressibilidade, ou seja, as tensões necessárias para uma mudança de volume, por menor que seja esta mudança, tendem a valor infinito. Levando por conseguinte a não haver mudança de volume e permitindo apenas mudança na forma do volume, lembrando sempre que este trabalho trata de deformações infinitesimais. A mudança de volume pode ser medida pela dilatação volumétrica, D , que pode ser calculada por

$$D = \varepsilon_{ii} \quad (76)$$

e em termos de tensões por

$$D = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{ii} . \quad (77)$$

Outro aspecto importante da aplicação do limite na Eq. (20) reside em: Quando as componentes do tensor elasticidade, responsáveis pela mudança de volume, tendem a infinito, pequenas variações nas deformações (ou deslocamentos) levam a grandes variações nas tensões normais. Numericamente isto implica que quando $\nu \rightarrow 0,5$ os erros de *truncamento ou arredondamento*⁴⁴ devido às operações aritméticas através da CPU, passam a ter influência significativa sobre os resultados obtidos.

Tendo em vista estas observações sobre o problema da incompressibilidade serão executados três testes. O primeiro e o segundo referem-se a um problema de simples compressão no EPD e EPT respectivamente. Estes testes têm como objetivo ilustrar principalmente o comportamento dos problemas frente aos erros de arredondamento e de truncamento. O terceiro teste refere-se a uma tira com ranhura sob tração onde o comportamento do campo de deslocamento e do campo de pressão hidrostática são analisados.

4.1.2.1 Simples compressão – EPD

O problema teste consiste em um bloco em forma de cubo de aresta $1,0 m$. Este está sujeito a compressão constante na face superior, $\sigma_{yy} = 400,0 MPa$, a restrição em Oy na face inferior e restrição em Ox para o ponto central da face inferior. Para este tipo de condição a solução analítica da componente σ_{xx} deve ser nula, então espera-se que $\sigma_{xx_{num}} \approx 0,0 Pa$.

A Fig. 24 ilustra o comportamento do valor absoluto médio da dilatação volumétrica frente a variação do coeficiente de Poisson. O gráfico mostra que a partir de certo valor ($\nu \approx 0,1$) quanto mais o coeficiente de Poisson se aproxima de $0,5$ menor a dilatação volumétrica. Interessante também observar que esta convergência ocorre sem oscilações, mesmo para valores de ν muito próximos de $0,5$. Na mesma figura, é

44 Os erros no cômputo de uma CPU utilizando um sistema de Aritmética de Ponto Flutuante (APF), o qual depende de uma base (normalmente *binária*, 2 e *decimal*, 10) e do número de dígitos, podem ocorrer devido a dois fatores: (i) Um dado número não tem representação finita num dado sistema de APF, que é o caso dos números irracionais; (ii) O comprimento de palavra não comporta a quantidade de dígitos (mesmo finito) deste número. (RUGGIERO e LOPES, 1988). O **truncamento** irá ocorrer quando certa função, e.g., e^x , é representada como uma série, no caso de e^x , uma série de potências. Então como é uma série infinita será necessário truncar os termos da série em determinado termo. O **arredondamento** ocorre devido à dificuldade de representação de um valor na APF escolhida.

mostrado o mesmo gráfico em tamanho pequeno, sem escala log para o eixo $\|\bar{D}\|$. Neste também é perceptível a convergência suave da dilatação volumétrica para o valor nulo. Além disso a convergência não é linear. Este tópico merece um maior aprofundamento em trabalhos futuros.

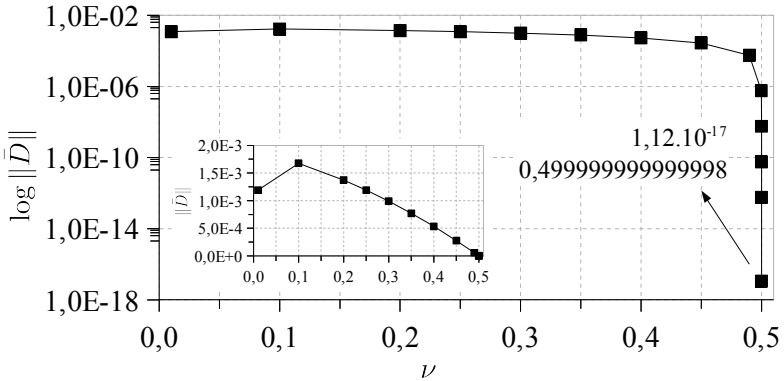


Figura 24: Valores numéricos para o valor absoluto da dilatação volumétrica média obtidos pelo EbFVM para diversos valores de ν .

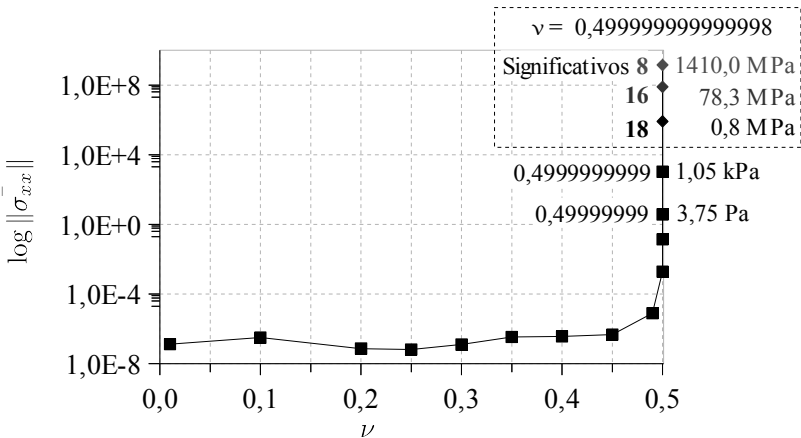


Figura 25: Valores numéricos para o valor absoluto da tensão normal σ_{xx} média obtidos pelo EbFVM para diversos valores de ν .

A Fig. 25 mostra o comportamento da tensão σ_{xx} em função de ν , a qual tem valor analítico nulo. O gráfico, mostra que os valores calculados apresentam um σ_{xx} relativamente baixo, quando comparados com a

tensão de $400,0 \text{ MPa}$ aplicada no bloco, para até $\nu = 0,49999999$. A partir deste valor, ou até mesmo um pouco antes deste, a média do valor absoluto da tensão, que deveria ser nula, eleva-se devido aos erros (de arredondamento e truncamento) envolvidos. Isso fica claro quando se observa o comportamento do valor da tensão para $\nu = 0,499999999999998$ frente a utilização de 8, 16 ou 18 algarismos significativos no algoritmo de solução do sistema. Este valor de ν , apresenta uma diferença em relação ao limite 0,5 que está no mesmo nível de erro da CPU, o que implica num elevado erro no cômputo da tensão. É perceptível que quanto menor o número de algarismos significativos, maior o erro, levando σ_{xx} a superar até mesmo o próprio valor da tensão aplicada no caso do cômputo com 8 algarismos significativos.

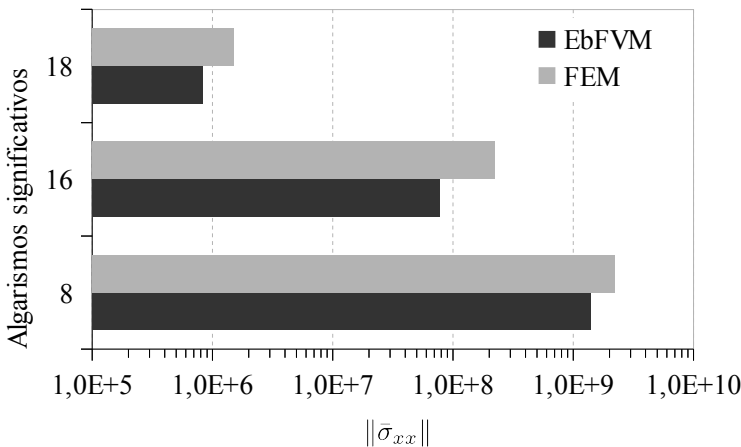


Figura 26: Valores numéricos para o valor absoluto da tensão normal σ_{xx} média, obtidos pelo EbFVM e FEM para $\nu = 0,499999999999998$.

Frente a influência do erro e dos algarismos significativos, juntamente com o número de operações aritméticas, optou-se por plotar os resultados de $\|\bar{\sigma}_{xx}\|$ para o caso mais extremo, com $\nu = 0,499999999999998$, para o EbFVM e para o FEM. Os resultados são mostrados na Fig. 26. Na figura observa-se o que era esperado, os valores para o FEM apresentaram maiores erros de CPU devido ao maior número de operações aritméticas envolvidas no cômputo dos coeficientes.

Uma análise idêntica a da Fig. 26 foi feita para o EPT e o comportamento repetiu-se de forma semelhante.

4.1.2.2 Placa com Ranhura

O problema teste consiste em uma placa com uma ranhura conforme ilustrado na Fig. 27. O material utilizado apresenta $E = 24 Pa$ e $\nu = 0,5$. Este problema foi resolvido por Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2006, p. 419) utilizando a formulação mista envolvendo deslocamento e pressão hidrostática, daí a possibilidade de utilizar-se $\nu = 0,5$. As referências para comparações, utilizar-se-ão dos resultados obtidos neste artigo.

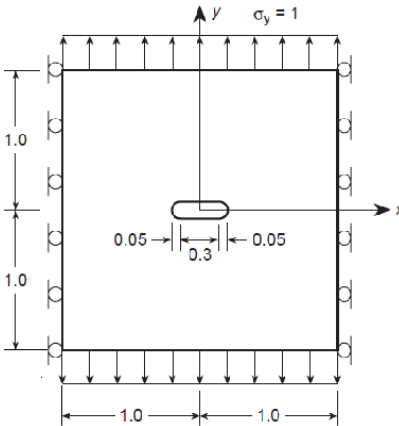


Figura 27: Geometria e carregamento da placa com ranhura (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2006, p. 419).

Importante ressaltar que este tipo de formulação mista fornece excelentes resultados e não apresenta problemas de *locking*. Então neste problema teste a pergunta a ser respondida é: *Até que valor de ν é possível resolver numericamente com razoável sucesso um problema utilizando-se o EbFVM.*

A malha que será utilizada no teste é apresentada na Fig. 28. Consiste numa malha para um quadrante do problema, utilizando-se de elementos quadriláteros.

Os testes irão comparar os deslocamentos v sobre a face superior, $v(x; 1, 0)$, onde

$\{x \in \mathbb{R} : 0, 0 \leq x \leq 1, 0\}$, a tensão hidrostática sobre o eixo Ox , $p(x; 0, 0)$, onde $\{x \in \mathbb{R} : 0, 2 \leq x \leq 1, 0\}$ e a tensão hidrostática sobre o eixo Oy , $p(0, 0; y)$, onde $\{y \in \mathbb{R} : 0, 05 \leq y \leq 1, 0\}$.

Na Fig. 29 são mostrados os resultados para o deslocamento v sobre a face superior, $v(x; 1, 0)$, para diversos valores de ν . O valor referência foi extraído de Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2006, p. 420). Na figura é nítido que os valores para v são coerentes até $\nu = 0,49$, além disso vê-se que conforme $\nu \rightarrow 0,5$ os valores de $v \rightarrow v_{referencia}$. O cômputo de v começa a apresentar problemas à medida que a precisão do cálculo está muito próxima do erro da CPU (já comentado). E isto pode ser visto para a curva com $\nu = 0,499995$.

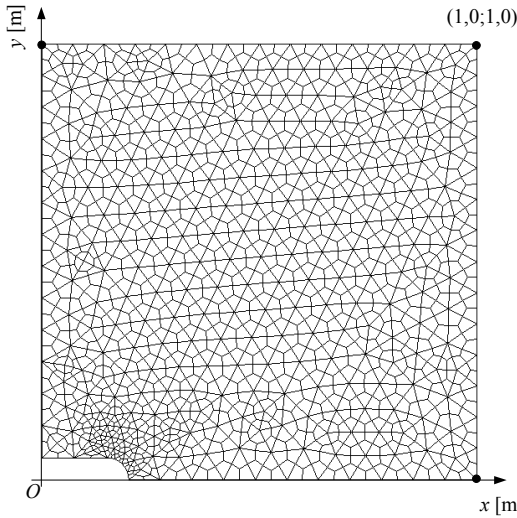


Figura 28: Quadrante do problema proposto discretizado com 1655 nós e 1596 elementos quadrilaterais.

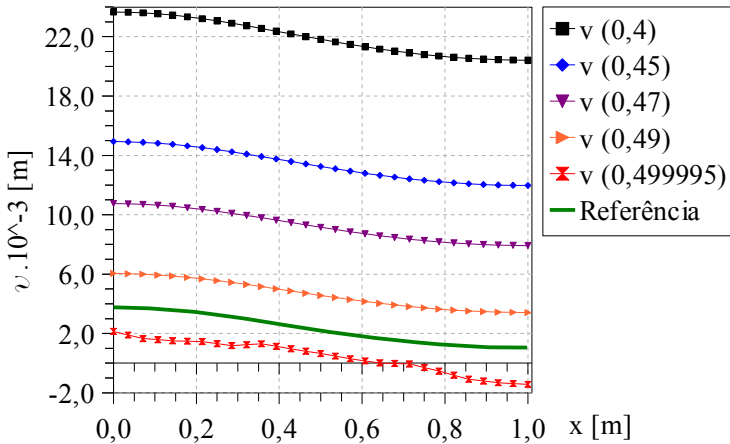


Figura 29: Deslocamentos v sobre a face superior, $v(x; 1, 0)$, obtidos com diferentes valores para ν .

Na Fig. 30 é apresentada a distribuição da tensão hidrostática sobre o eixo Ox , $p(x; 0, 0)$, onde $\{x \in \mathbb{R} : 0, 2 \leq x \leq 1, 0\}$. Lembrando que a referência foi obtida para $\nu = 0, 5$, observa-se que os resultados

obtidos pelo EbFVM, tendem a se aproximar da referência conforme $\nu \rightarrow 0,5$, exceto no ponto sobre a superfície da ranhura em $x = 0,2 m$. Este é um teste inicial, ficando a sugestão para trabalho futuro um maior refino na região próxima da ranhura o que possivelmente melhoraria significativamente o valor da pressão em $x = 0,2 m$, mesmo porque o nó imediatamente anterior apresenta uma convergência estável, além disso a pressão hidrostática é determinada com base nas tensões normais. Novamente, neste problema é perceptível a influência do erro de CPU ao se observar as oscilações presentes nos valores da pressão principalmente para $\nu = 0,49$.

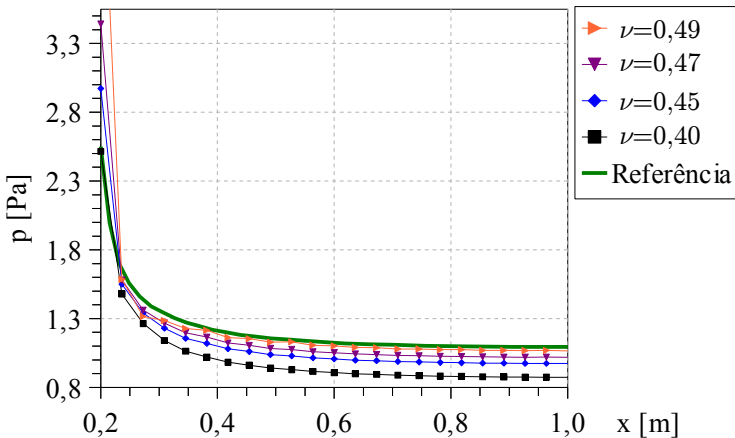


Figura 30: Pressão hidrostática p sobre o eixo Ox , $p(x; 0, 0)$, obtida com diferentes valores para ν .

A última análise é apresentada na Fig. 31, consistindo na distribuição de pressão hidrostática sobre o eixo Oy , $p(0; y; 0)$, onde $\{y \in \mathbb{R} : 0,05 \leq y \leq 1,0\}$. Aqui novamente pode-se ver que a pressão converge para o valor referência conforme $\nu \rightarrow 0,5$, porém aparecem oscilações no valor da pressão e essas oscilações são tanto maiores quanto mais $\nu \rightarrow 0,5$ e isso, conforme já analisado, deve-se ao erro de CPU.

4.1.3 ERROS NA NORMA L2 E NA NORMA DA ENERGIA

O erro local para o campo de deslocamento é a diferença entre a solução exata e a solução aproximada, assim o erro e , é dado por

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^*, \quad (78)$$

onde \mathbf{u} é a solução exata e \mathbf{u}^* a solução numérica.

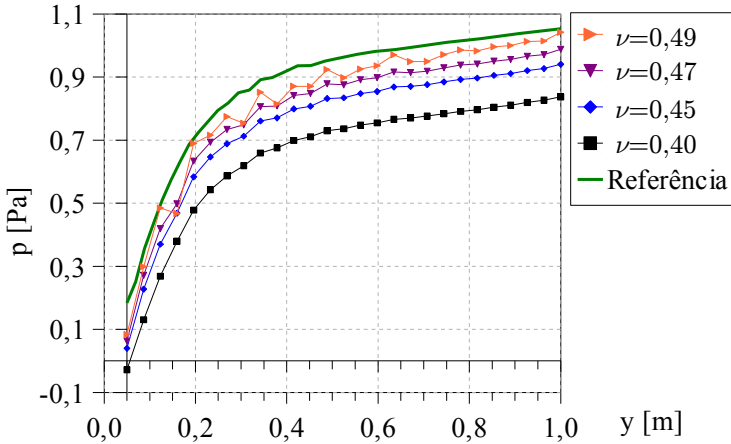


Figura 31: Tensão hidrostática p sobre o eixo Oy , $p(0, 0; y)$, obtida para diferentes valores de ν .

De maneira similar, pode-se definir o erro sobre as deformações, ε , as quais representam o gradiente da solução, ou ainda sobre as tensões, σ , o que é representado respectivamente pelas equações

$$\mathbf{e}_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^* \quad (79)$$

$$\mathbf{e}_\sigma = \sigma - \sigma^* \quad (80)$$

Estas formas de representar o erro, são geralmente inconvenientes e ocasionalmente enganosas. Por esta razão, várias “normas” representando alguma quantidade escalar, são frequentemente introduzidas para medir o erro (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2006, p. 456).

A seguir serão descritas duas normas comumente utilizadas na representação do erro.

4.1.3.1 Normas de Erros⁴⁵

ERRO NA NORMA DA ENERGIA

A equação diferencial linear tratada por este trabalho é dada por

$$\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0} . \quad (81)$$

Através desta equação pode-se definir uma *norma da energia escrita para o erro* conforme

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left| \int_{\Omega_{FE}} \mathbf{e}^T \mathbf{L} \mathbf{e} d\Omega_{FE} \right|^{\frac{1}{2}} \equiv \left| \int_{\Omega_{FE}} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T \mathbf{L} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) d\Omega_{FE} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (82)$$

onde $|\cdot|$ retorna o valor absoluto do argumento, Ω_{FE} é o domínio do problema no espaço \mathbb{S}^h e que $\int_{\Omega_{FE}} \equiv \sum_{k=1}^{n_e \in l_{cm}}$.

Partindo deste conceito de *norma da energia* pode-se definir para problemas de elasticidade a mesma norma conforme

$$\|\mathbf{e}\|_E = \left[\int_{\Omega_{FE}} (\mathbf{S}\mathbf{e})^T \mathbf{D} (\mathbf{S}\mathbf{e}) d\Omega_{FE} \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (83)$$

onde \mathbf{e} é dado pela Eq. (78), \mathbf{S} é o operador que para problemas 2D é dado por

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} , \quad (84)$$

\mathbf{D} é a matriz elasticidade para problemas 2D, a qual para o EPT pode ser retirada da Eq. (23) e para o EPD da Eq. (24), sendo em ambas, todo o termo que multiplica o vetor deformação $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$.

Lembrando que a deformação e a tensão, tanto exatas como aproximadas, podem ser representadas pela relação cinemática e a relação constitutiva (equações (23) e (24)), conforme

⁴⁵ Análise semelhante foi feita por Vaz Jr, Muñoz-Rojas e Filippini (2009) para o FVM clássico em malha cartesiana.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{S} \mathbf{u}^* \quad \text{e} \quad (85)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^* . \quad (86)$$

Além disso a relação mostrada na Eq. (87) será útil.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* \quad (87)$$

Utilizando estas últimas relações, a *norma da energia* dada na Eq. (83), pode ser escrita em relação à deformação conforme

$$\|\mathbf{e}_\varepsilon\|_E = \left[\int_{\Omega_{FE}} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*)^T \mathbf{D} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) d\Omega_{FE} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (88)$$

e a partir desta, com o auxílio da Eq.(87), pode-se obter em relação à tensão conforme

$$\|\mathbf{e}_\sigma\|_E = \left[\int_{\Omega_{FE}} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega_{FE} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (89)$$

A Eq. (89) foi deduzida para o erro na norma da energia, a qual foi escrita para o **erro na tensão**, \mathbf{e}_σ , dado pela Eq. (80). Assim a partir da Eq. (89), pode-se definir um valor global para a **norma da energia escrita para a tensão**, esse valor é dado por

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_E = \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (90)$$

e será útil como base de comparação para os erros obtidos. Nesta equação, o valor da norma computado é o analítico, já que a solução analítica é conhecida.

ERRO NA NORMA L2 DA TENSÃO

Uma norma escalar para a tensão, implementada de forma relativamente fácil, é a norma L2, a qual é determinada através de

$$\|e_\sigma\|_{L2} = \left[\int_{\Omega_{FE}} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega_{FE} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (91)$$

A Eq. (91) representa a norma L2 do **erro na tensão**, e_σ , dado pela Eq. (80). Assim a partir da Eq. (91), pode-se definir um valor global para a **norma L2 da tensão**, esse valor é dado pela Eq. (92) e será útil como base de comparação para os erros obtidos. Nesta equação, o valor da norma computado é o analítico, já que a solução analítica é conhecida.

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{L2} = \left[\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (92)$$

ERRO NA NORMA L2 E DA ENERGIA NO ASPECTO NODAL

Tanto a norma da energia quanto a norma L2 foram definidas para o domínio Ω_{FE} , porém estas podem ser computadas a nível nodal conforme

$$\|e_\sigma^i\|_E = \left[(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (93)$$

$$\|e_\sigma^i\|_{L2} = \left[(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*)^T (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (94)$$

4.1.3.2 Problema Teste “Cubic⁴⁶”

Este problema teste possui solução analítica. O termo “Cubic” refere-se à solução analítica do problema, a qual é um polinômio de ordem 3. A Fig. 32 apresenta a geometria e carregamento deste problema que foi proposto por Fenner (1986, *apud* Yazdani et al., 1997). Trata-se de uma viga em EPT, com comprimento $L = 8,0 m$, altura $H = 4,0 m$ e espessura $e = 1,0 m$. Além das reações de apoio, as solicitações são: força total aplicada na face esquerda, $P = 250 N$ e momento na face direita, $M = 2000 Nm$. Porém na face direita utilizou-se CC em deslocamento prescrito, os quais foram determinados pela equação

46 Nossa tradução: “Cubico”.

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{-P_{Tot} y}{2EI} \left[(L^2 - x^2) + \frac{2+\nu}{3} \left(y^2 - \frac{H^2}{4} \right) \right] \\ v(x, y) = \frac{-P_{Tot} y}{EI} \left[\frac{L^3}{3} - \frac{L^2 x}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{H^2(4+5\nu)(L-x)}{24} + \frac{\nu x y^2}{2} \right], \end{cases} \quad (95)$$

e na face esquerda utilizou-se a distribuição parabólica fornecida pela equação e sua integral respectivamente por

$$P(y) = 6 \frac{P_{Tot}}{H} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{x}{H} \right)^2 \right] \quad e \quad (96)$$

$$I(y) = \frac{3 P_{Tot}}{2} \frac{y}{H} - 2 \frac{P_{Tot}}{H^3} y^3. \quad (97)$$

Estas foram determinadas de acordo com os dados do problema, onde $P_{Tot} = P$. Por fim, a Fig. 33 mostra a distribuição de forças adotada sobre cada nó da face esquerda.

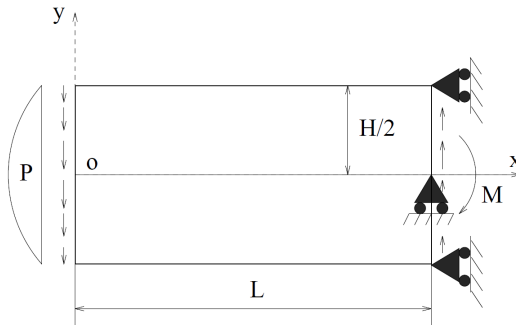


Figura 32: Geometria e carregamento do problema “Cubic” (YAZDANI, 1997).

As propriedades do material são o coeficiente de Poisson, $\nu = 0,3$ e o módulo de Young $E = 3,0 \cdot 10^7 Pa$. A Eq. (95) fornece a solução analítica do campo de deslocamentos para as condições de contorno impostas. Nesta equação I é o momento de inércia de 2ª ordem, P_{Tot} é a força cisalhante total, L e H são o comprimento e altura da viga respectivamente. A partir dos deslocamentos exatos é possível determinar o campo de tensões exato através da equação

$$\sigma(x; y) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P_{T.ot}}{l}xy \\ 0 \\ \frac{P_{T.ot}}{l} \left(\frac{1}{8}H^2 - \frac{1}{2}y^2 \right) \end{Bmatrix}. \quad (98)$$

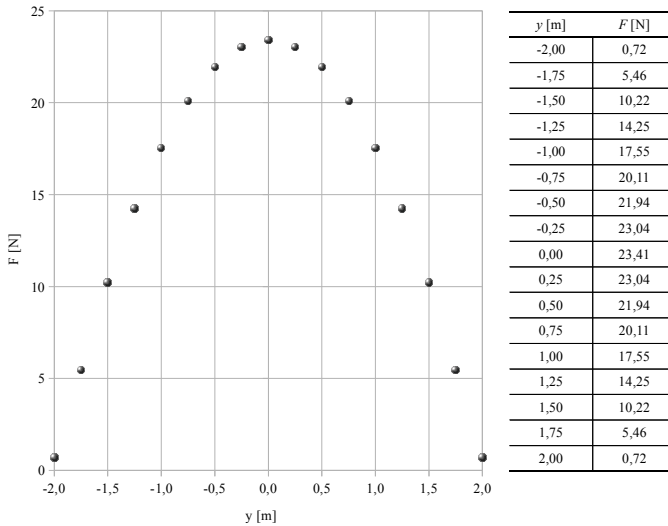


Figura 33: Distribuição de força parabólica ao longo dos nós da face esquerda.

Sobre este problema teste, foram feitas algumas análises do comportamento da norma L2 do erro na tensão e do erro na norma da energia, ambas no aspecto nodal. O campo de tensões utilizado foi obtido através da técnica CDN. Essas análises serão descritas a seguir e para efeitos de comparação, os valores globais para ambas as normas, extraídos do problema proposto e utilizando as equações (90) e (92) são apresentados na Tab. 7.

Tabela 7 - Valores globais para norma da energia e L2 sobre a tensão.

Norma global	Valor	Unidade
$\ \sigma\ _E$	$2,82252841732 \times 10^{-1}$	$[J^{\frac{1}{2}}]$
$\ \sigma\ _{L2}$	$1,46628782986 \times 10^3$	$[Nm^{-\frac{1}{2}}]$

NORMA L2 DO ERRO - $\|e_{\sigma}^i\|_{L_2}$

Foi realizado o cômputo de $\|e_{\sigma}^i\|_{L_2}$ para cada nó da malha. Tanto a malha, como o campo de valores estão ilustrados na Fig. 34. Nesta figura observa-se que os valores nas fronteiras são altos em relação aos valores do domínio. Para melhorar a visualização o mesmo mapa é mostrado na Fig. 35 com uma faixa de valores que deixa de fora os valores nas fronteiras.

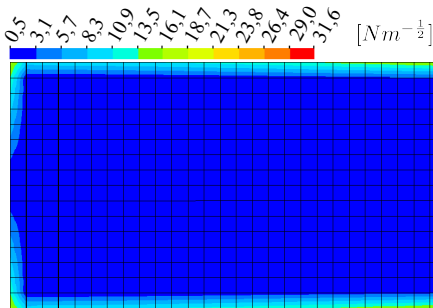


Figura 34: Mapa de erro na norma L2 nodal para a tensão, $\|e_{\sigma}^i\|_{L_2}$. Malha cartesiana 32×16 elementos.

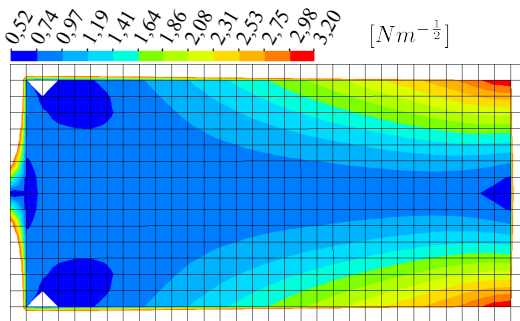


Figura 35: Mapa de erro na norma L2 nodal para a tensão, $\|e_{\sigma}^i\|_{L_2}$, com faixa de valores reduzida. Malha cartesiana 32×16 elementos.

O fato da norma L2 do erro na tensão, ser mais acentuada nos nós próximos da fronteira, já era esperado, já que nesta região os nós fazem parte de um menor número de elementos (a amostragem é mais pobre). Apesar do elevado erro na fronteira, até 31,6, no interior do domínio os

erros são muito menores, atingindo valores máximos de 3,2, que são $10\times$ menores que aqueles, o que pode ser observado na Fig. 35.

Quanto aos valores na fronteira, deve-se ainda observar que: Apesar da face direita estar sujeita a deslocamento prescrito, esta apresentou erros mais elevados em relação ao restante da fronteira, acentuando-se mais na região dos cantos. Isso é observável em ambas as figuras.

ERRO NA NORMA DA ENERGIA - $\|e_{\sigma}^i\|_E$

Foi realizado o cômputo de $\|e_{\sigma}^i\|_E$ para cada nó da malha. Tanto a malha como o campo de valores obtido estão ilustrados na Fig. 36. Da mesma maneira que para a norma L2, os valores nas fronteiras são extremamente altos em relação aos valores do domínio e isso é confirmado pelo mapa mostrado na Fig. 37, com uma faixa de valores que exclui os valores nas fronteiras.

De forma similar à norma L2, o fato do erro na norma da energia ser mais acentuada nos nós próximos da fronteira era esperado, pois nesta região os nós fazem parte de um menor número de elementos. Apesar do elevado erro na fronteira, atingindo valores de até $8,652 \times 10^{-6}$, novamente no interior do domínio os erros são aproximadamente $10\times$ menores, atingindo valores máximos em torno de 750×10^{-6} , o que pode ser observado na Fig. 37.

De forma idêntica a norma L2, aqui também observa-se que a face direita apresentou erros mais elevados em relação ao restante da fronteira, acentuando-se mais na região dos cantos.

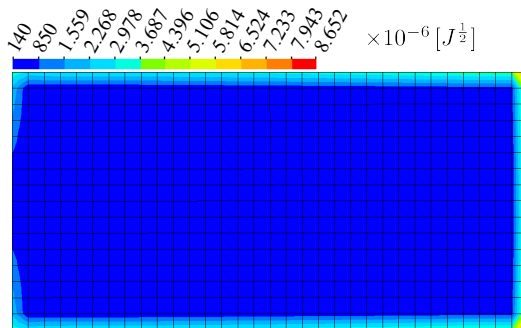


Figura 36: Mapa de erro na norma da energia nodal para a tensão, $\|e_{\sigma}^i\|_E$. Malha cartesiana 32×16 elementos.

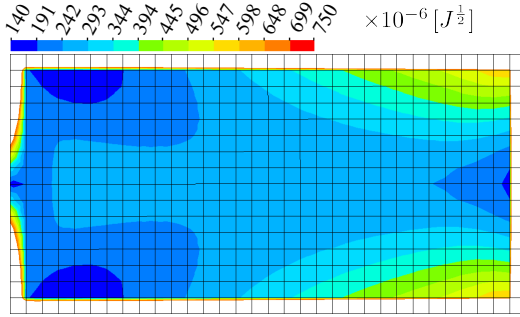


Figura 37: Mapa de erro na norma da energia nodal para a tensão, $\|e_{\sigma}^i\|_E$, com faixa de valores reduzida. Malha cartesiana 32×16 elementos.

Além das avaliações sobre as figuras 36 e 37 foram feitas duas análises sobre o campo de $\|e_{\sigma}^i\|_E$, utilizando-se de malhas não estruturadas com elementos quadrilaterais. As malhas possuem variação no refino, sendo uma delas com variação preponderante na direção horizontal, figuras 38 e 39, e a outra na direção vertical, figuras 41 e 40.

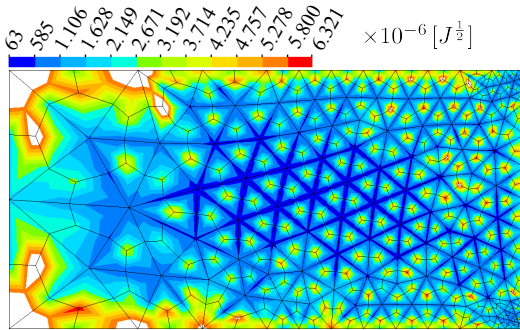


Figura 38: Mapa de erro na norma da energia nodal para a tensão, $\|e_{\sigma}^i\|_E$, com faixa de valores reduzida. Malha não estruturada (707 nós) e refino predominantemente horizontal.

Em todas as figuras, fica evidente que onde a malha é refinada, os erros são menores. Também que o refino na face direita, que é a face com maiores erros nas análises anteriores, colaborou para a redução dos erros, ficando abaixo dos erros nas demais regiões de fronteira. Outra observação que é mais evidenciada nas figuras 38 e 40, consiste em que os erros são menores sobre os nós que envolvem maior número de ele-

mentos e maiores onde os nós envolvem um menor número de elementos. Isto é observável pela coloração com azul mais intenso (■), a qual representa o primeiro intervalo de valores.

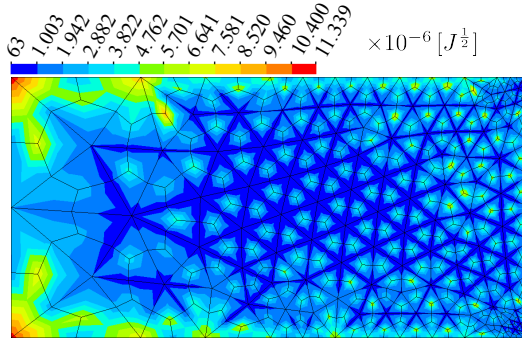


Figura 39: Mapa de erro na norma da energia nodal para a tensão, $\|e_{\sigma}^i\|_E$. Malha não estruturada (707 nós) e refino predominantemente horizontal.

Esta avaliação com malha não estruturada, também foi feita para a norma L2, a qual resultou em conclusões praticamente idênticas as da norma da energia.

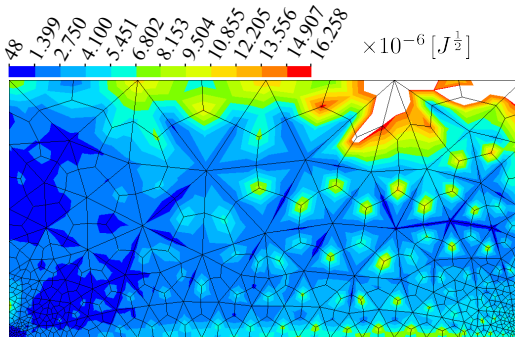


Figura 40: Mapa de erro na norma da energia nodal para a tensão, $\|e_{\sigma}^i\|_E$, com faixa de valores reduzida. Malha não estruturada (727 nós) e refino predominantemente vertical.

JUSTIFICATIVA PARA OS MAIORES ERROS NA FACE DIREITA

Com respeito aos maiores erros apresentados na face direita, pode-se adicionar algumas observações com relação aos mapas das com-

ponentes do tensor σ^* : σ_{xx}^* , σ_{yy}^* e σ_{xy}^* , quando comparados com a solução exata σ dada na Eq. (98).

Aparentemente nenhuma discrepância significativa é percebida no mapa para σ_{xx}^* , que pode ser visto na Fig. 42. A distribuição apresenta-se linear tanto em x , quanto em y , coincidindo com o esperado na Eq. (98).

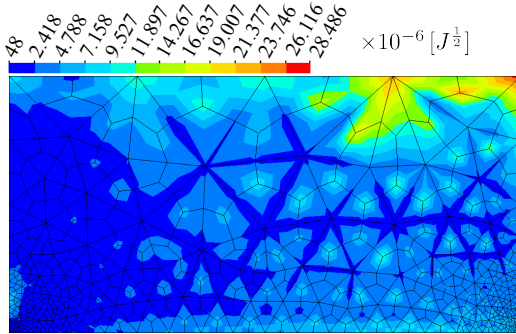


Figura 41: Mapa de erro na norma da energia nodal para a tensão, $\|e^i_\sigma\|_E$. Malha não estruturada (727 nós) e refino predominantemente vertical.

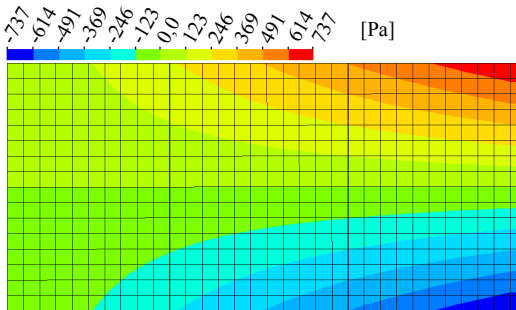


Figura 42: Componente σ_{xx}^* obtida para o teste com malha cartesiana.

O valor analítico para o mapa de σ_{yy} , é nulo para todo domínio e fronteira. Porém os valores computados, σ_{yy}^* , apresentam discrepâncias principalmente nas fronteiras, sendo esta uma das causas dos valores elevados de $\|e^i_\sigma\|_{L2}$ e $\|e^i_\sigma\|_E$ sobre as fronteiras.

Conforme a solução analítica para σ_{xy} era esperada uma variação apenas na direção Oy , porém, na região próxima da extremidade direita

apareceram variações na direção Ox não compatíveis com a solução analítica. Estas variações também contribuem para os elevados erros $\|e_{\sigma}^i\|_{L_2}$ e $\|e_{\sigma}^i\|_E$, na extremidade direita.

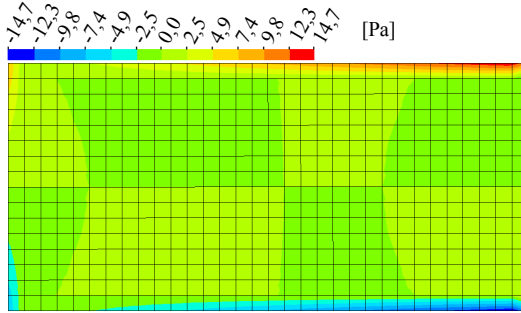


Figura 43: Componente σ_{yy}^* obtida para o teste com malha cartesiana.

Considerando as observações com respeito aos campos de tensão aproximada fica relativamente evidente que os maiores valores de $\|e_{\sigma}^i\|_{L_2}$ e $\|e_{\sigma}^i\|_E$ são devido à técnica de obtenção de tensões utilizada, no caso CDN, a qual é uma técnica relativamente pobre para pontos na fronteira.

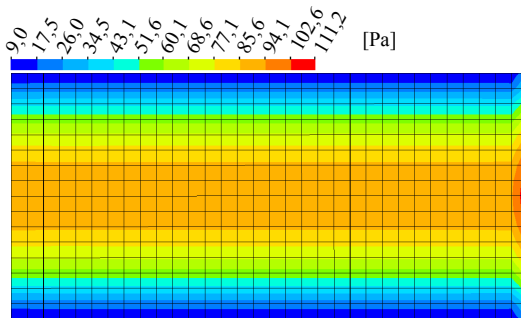


Figura 44: Componente σ_{xy}^* obtida para o teste com malha cartesiana.

De qualquer forma, os valores dos erros no interior do domínio são baixos, o que caracteriza o bom desempenho do método EbFVM. Um possível trabalho futuro poderia repetir os testes para outras técnicas de obtenção de tensões.

COMPARAÇÃO DOS MÁXIMOS ERROS COM O VALOR GLOBAL

Os valores máximos de $\|e_{\sigma}^i\|_{L_2}$ e $\|e_{\sigma}^i\|_E$, para os nós no *interior* do domínio e para os nós na *fronteira*, são comparados com os valores globais apresentados na Tab. 7, esta comparação é feita verificando qual a fração percentual que o valor máximo representa sobre o global. Tanto os valores máximos como as frações percentuais são apresentados na Tab. 8.

Como pode-se ver, para o interior do domínio, os máximos valores da norma L2 do erro na tensão e do erro na norma da energia representam uma fração pequeníssima do valor global. Já no caso da fronteira a fração percentual é bem mais representativa, cerca de $10\times$ o valor daquelas. Assim pode-se dizer que os valores computados nas fronteiras são os maiores responsáveis pelos erros.

Tabela 8 - Valores máximos de $\|e_{\sigma}^i\|_{L_2}$ e $\|e_{\sigma}^i\|_E$ e suas frações percentuais em relação aos valores globais.

Norma	Interior		Fronteira		Unidade da norma
	Valor	Fração [%]	Valor	Fração [%]	
L2	3, 2	0, 22	31, 6	2, 2	$[Nm^{-\frac{1}{2}}]$
E	0, 00075	0, 27	0, 00865	3, 1	$[J^{\frac{1}{2}}]$
ENH*	---	---	0, 0113	4, 2	
ENV*	---	---	0, 0285	10	

(*) ENH e ENV representam a norma da energia para a malha não estruturada com variação de tamanho na malha principalmente na direção Horizontal e Vertical respectivamente.

4.1.4 CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

O sistema global, Eq. (70), em muitas situações deve ser resolvido através de métodos iterativos. Levando isto em conta, nesta secção é feita uma análise de convergência da solução, utilizando Gauss-Seidel com e sem sobre-relaxação sucessiva (SOR).

O processo iterativo é parado quando a norma do *vetor resíduo* fica menor ou igual que certo nível de tolerância. Este vetor resíduo, \mathbf{R} , é obtido quando a solução aproximada \mathbf{u}^* obtida em determinada iteração é substituída no sistema global de equações, Eq. (70), gerando uma componente de \mathbf{R} para cada uma das equações do sistema. A norma do

resíduo, $\|\mathbf{R}\|$, é obtida pela equação

$$\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_{nptg}} (R_i)^2} . \quad (99)$$

Os valores iniciais para u^* são todos nulos. Um problema de EPT é utilizado nesta avaliação. O mesmo consiste de uma viga engastada em ambas extremidades e é mostrado na Fig. 45, onde além da geometria, condições de contorno e propriedades do material, é mostrado o mapa obtido para o campo de deslocamento u^* . A malha utilizada é com 1392 elementos quadriláteros e 1491 nós.

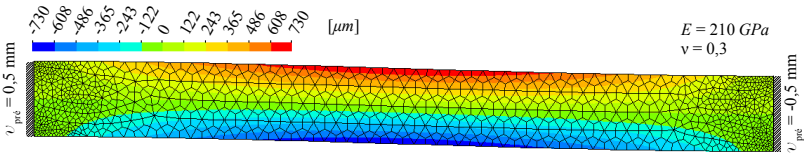


Figura 45: Geometria, condição de contorno, propriedades do material e mapa do deslocamento u^* .

O método SOR é aplicado sobre o procedimento de Gauss-Seidel conforme a equação

$$(\phi_P^{I+1})_{SOR} = \omega (\phi_P^{I+1})_{Gauss-Seidel} + (\omega - 1) \phi_P^I , \quad (100)$$

onde ϕ_P representa a variável sendo resolvida, I a i -ésima iteração e ω o coeficiente de sobre-relaxação, com $\omega \in (0, 0; 2, 0)$. Os efeitos do valor de ω são:

- Caso $0, 0 < \omega < 1, 0$, tem-se a sub-relaxação onde a velocidade de convergência sofre redução quanto menor for ω ;
- Caso $\omega = 1, 0$, tem-se o método de Gauss-Seidel;
- Caso $1, 0 < \omega < 2, 0$, tem-se a sobre-relaxação, onde a velocidade de convergência sofre aumento quanto maior for ω .

Para a análise de convergência do resíduo no método SOR, é interessante determinar o maior coeficiente de sobre-relaxação ω admissível para o problema proposto. Portanto é feito o levantamento de ω conforme mostrado na Fig. 46. Para o EbfVM $\omega_{otimo} = 1,82$ e para o FEM $\omega_{otimo} = 1,95$. Deve-se ressaltar que estes coeficientes são obtidos para

o problema proposto da Fig. 45. Assim para outros problemas estes valores irão sofrer variações.

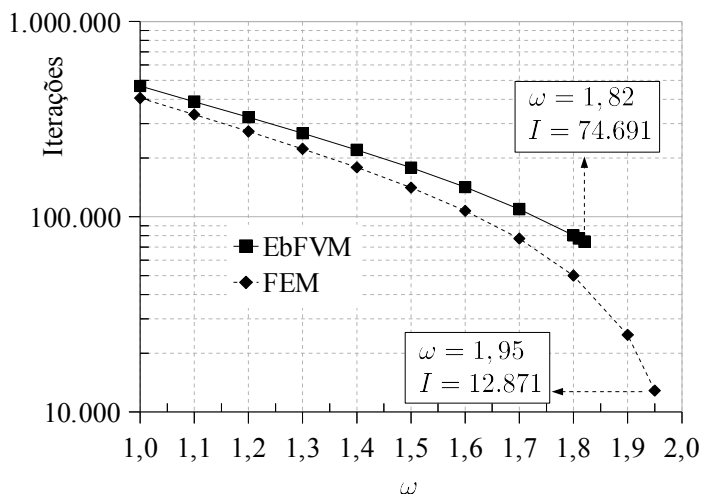


Figura 46: Coeficiente de sobre-relaxação ótimo.

Tabela 9: Iterações e tempo para Gauss-Seidel e Gauss-Seidel com SOR.

		Gauss-Seidel	SOR- ω_{otimo}	Redução [%]
EbFVM	Iterações	467.751	74.691	84,03
	Tempo [s]	563	55	90,23
FEM	Iterações	405.601	12.871	96,83
	Tempo [s]	392	9	99,98

Por fim fazendo o levantamento da convergência da norma do resíduo, ao se utilizar o método de Gauss-Seidel e Gauss-Seidel com SOR, utilizando para este último ω_{otimo} , obtém-se o gráfico apresentado na Fig. 47. Neste gráfico observa-se que o número de iterações necessárias para atingir $\|\mathbf{R}\| = 1,0 \times 10^{-4} N$, utilizando Gauss-Seidel é 467.751 para o EbFVM e 405.601 para o FEM, valores estes considerados próximos do ponto de vista da ordem de grandeza. Por outro lado utilizando-se o método SOR com o melhor coeficiente de sobre-relaxação a solu-

ção para o EbFVM exigiu 74.691 iterações, o que corresponde a uma redução de 84% no número de iterações. Para o FEM utilizando-se o SOR foram necessárias 12.871 iterações correspondendo a uma redução em 97%. A Tab. 9 apresenta um resumo destes valores, adicionando também o tempo de CPU necessário para a solução do sistema.

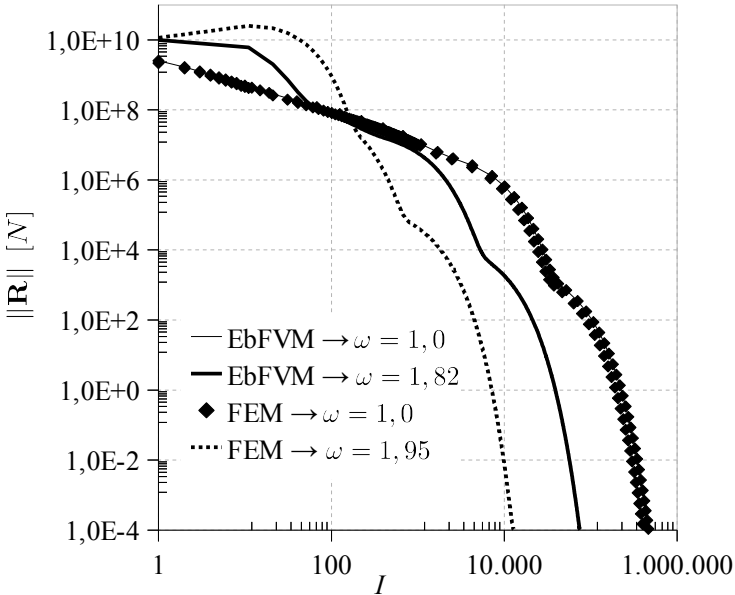


Figura 47: Convergência da norma do resíduo.

Na tabela vê-se *significativamente que o procedimento de solução iterativo para o sistema gerado pelo FEM convergiu mais rapidamente*. Apresentando maior diferença no processo com SOR. Apesar disso, na Fig. 47 é perceptível que o EbFVM com SOR, para aproximadamente as 100 primeiras iterações, apresenta uma redução mais acentuada no valor do resíduo. Ao contrário o FEM, sobre as primeiras 20 iterações, apresenta um aumento no valor do resíduo. Esta característica apresentada pelo EbFVM poderá ser melhor explorada em trabalhos futuros envolvendo solução através de métodos *Multigrid* que exploram principalmente a rápida convergência inicial apresentada pelo sistema.

O fato do FEM ter seu resíduo aumentado nas iterações iniciais pode estar associado ao elevado coeficiente de sobre-relaxação, $w = 1,95$, pois para $w = 1,0$ este comportamento não ocorreu.

4.1.5 EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON⁴⁷

A *extrapolação de Richardson* foi originalmente concebida para incrementar a taxa local de convergência da solução numérica. Por outro lado a solução exata, ϕ_{exact} , em certo ponto \mathbf{x} pode ser estimada através da equação

$$\phi_{exact}(\mathbf{x}) = \phi_h(\mathbf{x}) + e_h(\mathbf{x}) = \phi_h(\mathbf{x}) + M h^p + O(h^{p+1}), \quad (101)$$

onde ϕ_h é a solução discreta, e_h é o erro de aproximação, h é um índice que indica o tamanho da malha, M é uma constante e p é a ordem do erro local. A aplicação correta da extrapolação de Richardson requer 3 condições: (i) a solução exata deve ser suave o suficiente para que a expansão em série de Taylor seja justificável, (ii) a ordem da convergência formal, p , é conhecida e (iii) o tamanho da malha é suficientemente pequeno, de tal forma que leva o termo da ordem do erro a dominar o erro de aproximação local, *i.e.*, a convergência é monotônica no intervalo assintótico. Para o EbFVM, a ordem exata do erro de aproximação é dificilmente conhecida *a priori*, assim recomenda-se o uso de uma estimativa da ordem, p^* , que pode ser determinada assumindo uma convergência assintótica e aplicando a Eq. (101) para três tamanhos de malhas, h_1 , h_2 e h_3 as quais mantém uma razão constante de refino r . Isto leva a obtenção da equação

$$e_{h_1} \approx \frac{\phi_{h_1} - \phi_{h_2}}{r^{p^*} - 1}, \quad p^* = \frac{\log\left(\frac{\phi_{h_3} - \phi_{h_2}}{\phi_{h_2} - \phi_{h_1}}\right)}{\log(r)} \quad e \quad r = \frac{h_3}{h_2} = \frac{h_2}{h_1}, \quad (102)$$

onde $h_3 > h_2 > h_1$ e as malhas são cartesianas. Os erros são avaliados somente nos nós coincidentes das 3 malhas e são associados a malha mais refinada, portanto a técnica proposta por Richardson não fornece uma medida global. Neste trabalho, esta técnica verifica a ordem do erro para os deslocamentos e tensões.

A ordem do erro aproximada, p^* , é obtida para o problema de uma viga em balanço, ilustrada na Fig. 48 sujeita ao EPT. No mesmo teste, a convergência é verificada quanto a ser monotônica ou não. E com a intenção de comparar os resultados da LN escolheu-se uma viga delgada com $L/H = 20$.

47 Análise semelhante foi feita por Vaz Jr, Muñoz-Rojas e Filippini (2009) para o FVM clássico em malha cartesiana.

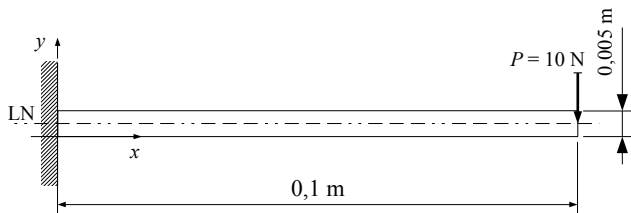


Figura 48: Viga em balanço usada para determinar a ordem p^* e verificar a convergência monotônica.

4.1.5.1 Verificação da Convergência Monotônica

Para verificar se a convergência é monotônica, foram utilizadas cinco malhas cartesianas: 40×2 , 80×4 , 160×8 , 320×16 e 640×32 elementos.

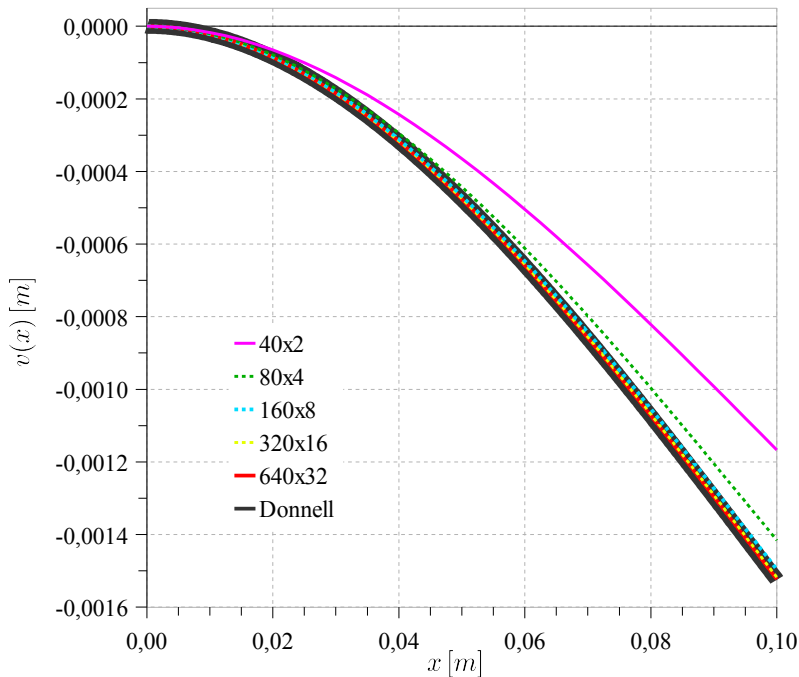


Figura 49: Deslocamento v sobre a LN com diferentes malhas e a solução analítica proposta por Donnell.

A Fig. 49 mostra a linha neutra, onde pode-se ver que com o refino da malha a solução aproximada tende aos valores analíticos. Sobre estes resultados é verificada através da Fig. 50 para o ponto na extremidade livre sobre a LN, que a convergência é monotônica decrescente. A solução analítica proposta por Donnell (1976) será abordada em detalhes na secção 4.2.1.

4.1.5.2 O Erro de Richardson e sua Ordem

A determinação da ordem do erro de Richardson aproximada, p^* , é feita utilizando-se a Eq. (102) e as malhas 640×32 para h_1 , 320×16 para h_2 e 160×8 para h_3 . p^* , por sua vez foi obtido para o deslocamento u , v , total d , o deslocamento total é obtido pela equação

$$d = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (103)$$

e para as componentes de tensão σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} nos pontos da malha h_3 . As tensões são obtidas a partir da técnica PNDL.

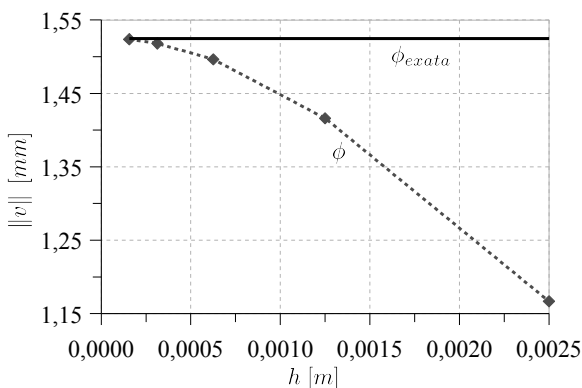


Figura 50: Convergência monotônica para o deslocamento v do ponto $(x; y) = (0, 1; 0, 0025) m$.

Diversas análises que se seguem utilizarão a malha 160×8 , além disso algumas linhas, secções e nós que são apresentados na Fig. 51, serão úteis na interpretação das análises e resultados. O número dos nós nos cantos também é indicado na figura. A numeração de nós se dá sempre da esquerda para direita e de baixo para cima.

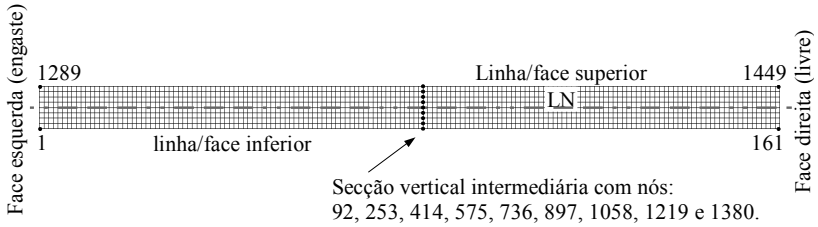


Figura 51: Malha 160x8 elementos.

RICHARDSON PARA O DESLOCAMENTO u

O mapa de p^* para o deslocamento u , é mostrado na Fig. 52. Além disso o erro de Richardson, e_h , também é computado e apresentado na Fig. 53.

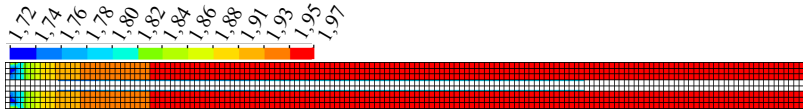


Figura 52: Mapa da ordem do erro de Richardson p^* para u .

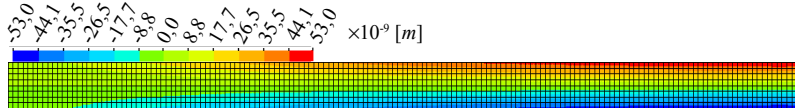


Figura 53: Mapa do erro de Richardson e_h para u .

A LN e face esquerda possuem deslocamento u nulo e prescrito respectivamente, assim p^* não é determinado. Por outro lado no restante do domínio $p^* \in [1,72 ; 1,97]$ e neste a grande parte entre $[1,95 ; 1,97]$, o que caracteriza que a ordem da aproximação está muito próximo de 2. Além disso, a Fig. 54 mostra que a variação de p^* desde 1,72 até 1,97 é bastante rápida e se desenvolve nos primeiros nós próximos do engaste. As extremidades superiores do conjunto de curvas são os nós próximos à face direita e as extremidades inferiores são os nós próximos à face esquerda. Além disso, o conjunto de nós que representa a LN foi omitido (645 à 805).

A Fig. 55 mostra os erros da Fig. 53, porém num gráfico de e_h em função do nó, este por sua vez, para malha cartesiana uniforme represen-

ta a posição em Ox . Nesta figura, pode-se ver os erros elevados na extremidade direita, nulos na LN e extremidade esquerda além da *variação linear do erro ao longo de cada secção*, o que é ilustrado pela reta azul intermitente que passa pelos nós: 68, 229, 390, 551, 712, 873, 1035, 1195 e 1356. Além disso pode-se ver que abaixo da LN, os erros são negativos e acima positivos, considerando-se a forma de cômputo destes, e que tem mesmo sinal dos deslocamentos vê-se que as secções deformaram aquém do valor exato.

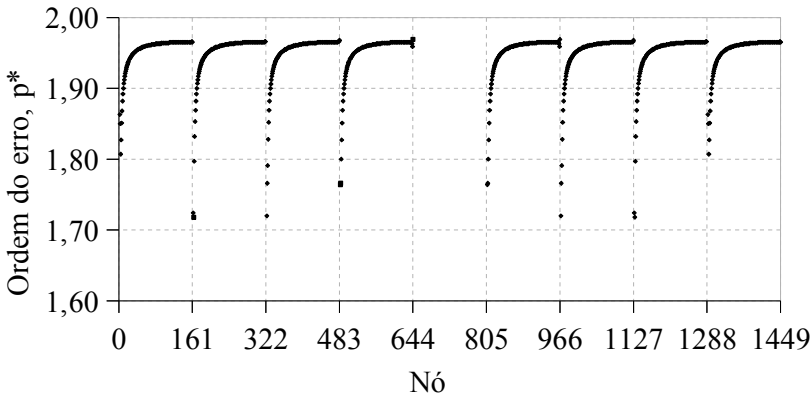


Figura 54: Ordem do erro de Richardson p^* em função dos nós para u .

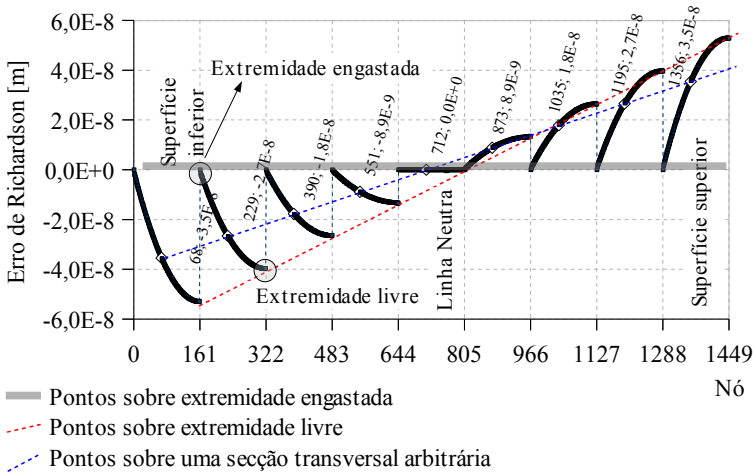


Figura 55: Erro de Richardson, e_h , em função dos nós para u .

Como a face esquerda está sujeita a deslocamento prescrito, é de se esperar que os erros próximo a esta região sejam pequenos e aumentem ao se afastar desta, influenciados agora pelas CC com força prescrita na superfície inferior, superior e direita.

Observa-se ainda que apesar dos erros serem elevados na extremidade direita, o erro relativo é muito pequeno quando comparado com o erro relativo da extremidade esquerda.

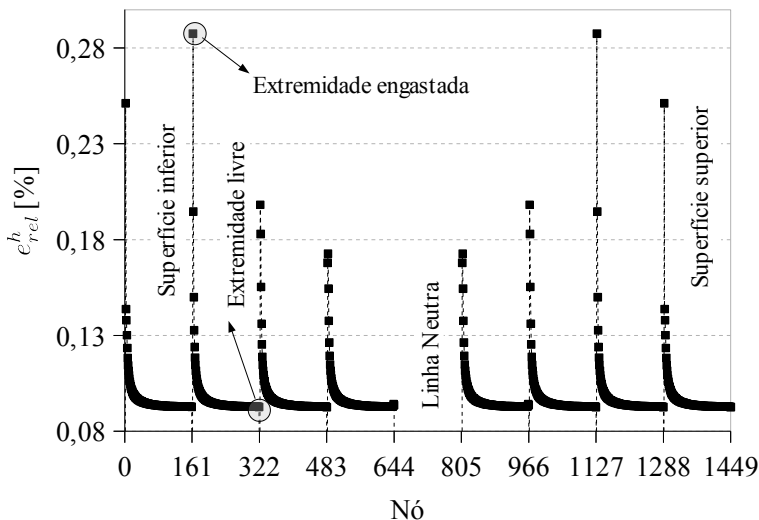


Figura 56: Erro de Richardson relativo ao valor extrapolado, e_{rel}^h , para u .

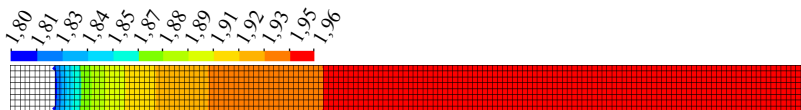


Figura 57: Mapa da ordem do erro de Richardson p^* para v .

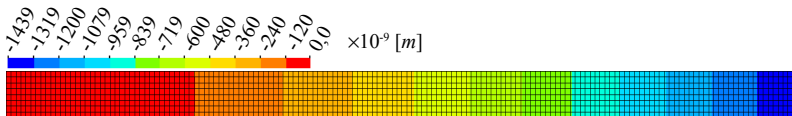


Figura 58: Mapa do erro de Richardson e_h para v .

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON PARA O DESLOCAMENTO v

O mapa de p^* para o deslocamento v é mostrado na Fig. 57.

Além disso o erro de Richardson, e_h , é computado e apresentado na Fig. 58.

Nas figuras a faixa de valores para p^* está próxima aos valores obtidos para u , porém os erros atingem valores mais elevados. Enquanto u atinge valores absolutos de erro máximo $53 \times 10^{-9} [m]$, para v o valor é $1439 \times 10^{-9} [m]$, ou seja, $27,16 \times$ maior. Esta relação é muito próxima da relação entre os deslocamentos máximos entre u e v , que é de $26,71 \times$.

Disso pode-se inferir, *não de forma conclusiva*, que: *o fato da força prescrita estar na direção de v não interfere na ordem e nem nos valores absolutos do erro e que os valores absolutos do erro estão sim relacionados com o quanto ocorreu de deslocamento, ou seja, quanto maior o deslocamento, maiores os erros envolvidos e isto ocorre de forma linear. Um exemplo disto foi visto na Fig. 55 na secção transversal arbitrária.* Dando assim uma indicação de que o acréscimo do erro está linearmente associado ao valor absoluto do deslocamento.

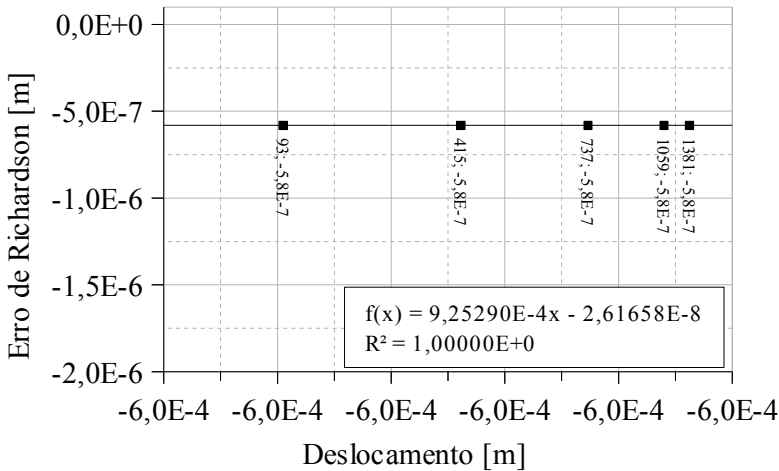


Figura 59: Erro de Richardson, e_h em uma secção transversal para v . $e_h \times v$ para a secção ilustrada na Fig. 51.

Para reforçar esta inferência sobre a relação linear entre erro e deslocamento, as figuras 59 e 60 apresentam o comportamento do erro numa secção arbitrária com nós: 93, 254, 415, 576, 737, 898, 1059, 1220 e 1381 e em pontos aleatórios: 10, 465, 537, 740, 1000, 1055, 1100, 1199 e 1400 respectivamente. Em ambos os casos o ajuste de uma reta é bem sucedido, apresentando um $R^2 \approx 1$. A Fig. 61 mostra a distribuição do

erro de Richardson em função do Nó. Nesta, a secção arbitrária transversal também é indicada na reta vermelha intermitente.

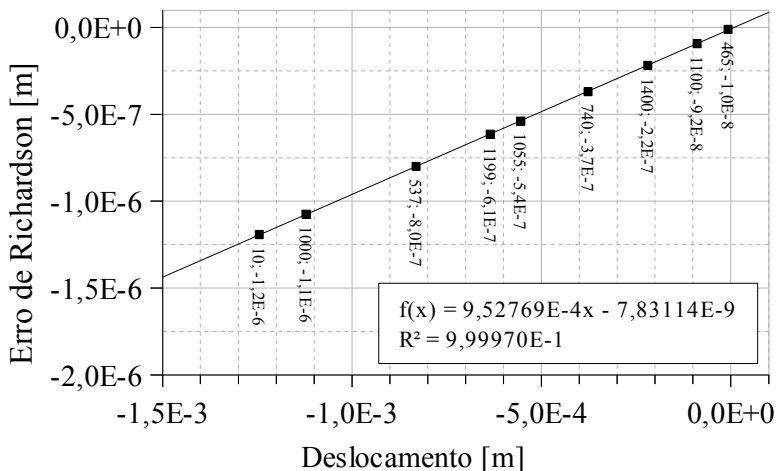


Figura 60: Erro de Richardson, e_h versus v para um conjunto aleatório de pontos.

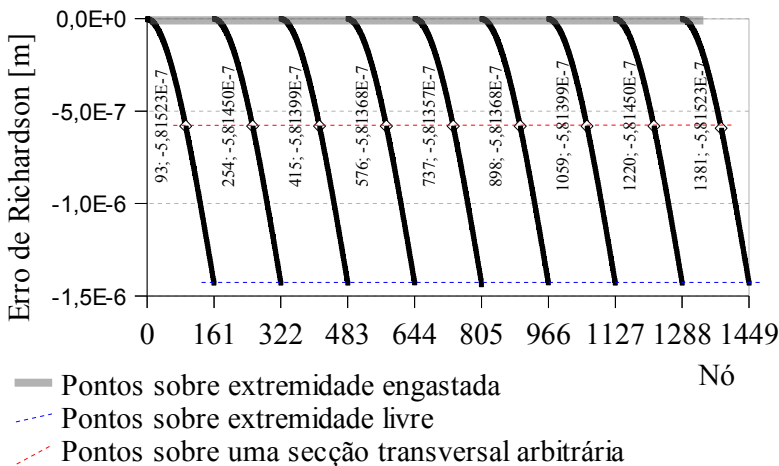


Figura 61: Erro de Richardson, e_h , em função dos nós para v .

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON PARA O DESLOCAMENTO TOTAL

O mapa de p^* para o deslocamento total é mostrado na Fig. 62.

Além disso o erro de Richardson, e_h , também é computado e apresentado na Fig. 63.

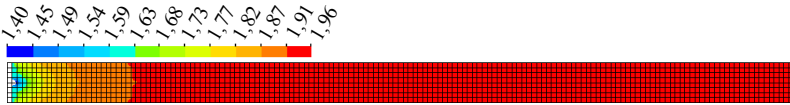


Figura 62: Mapa da ordem do erro de Richardson p^* para d .

A Fig. 62 mostra que a ordem do erro é muito próxima de 2 ao longo de quase toda viga, atingindo valores mais baixos nas regiões próximas do engaste. De qualquer maneira, pode-se dizer que a aproximação utilizada é de ordem 2. O erro estimado para o deslocamento total, na Fig. 63, também apresentou valores bastante baixos. Os maiores deslocamentos foram da ordem de $1,5 \text{ mm}$ e os maiores erros da ordem de $1,44 \times 10^{-3} \text{ mm}$, ou seja, $0,1 \%$ daqueles, indicando assim uma ótima aproximação.

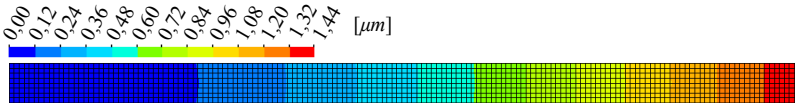


Figura 63: Mapa do erro de Richardson e_h para d .

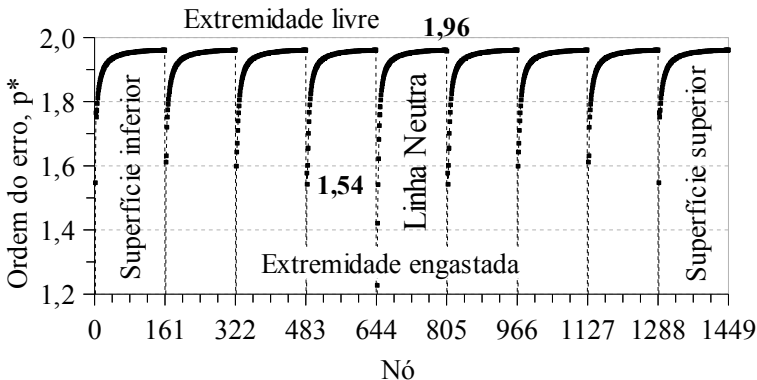


Figura 64: Ordem do erro de Richardson p^* em função dos nós para d .

A Fig. 64 mostra os mesmos dados da Fig. 62, porém em forma de gráfico, onde p^* é mostrado em função da numeração de nó. A nume-

ração de nó começa no canto esquerdo inferior, indo da esquerda para a direita, linha a linha, até atingir o canto direito superior. Assim no gráfico os nós mais abaixo referem-se a extremidade esquerda e os mais acima a extremidade direita. O primeiro conjunto de dados, do nó 1 até 161 refere-se a superfície inferior, o conjunto de dados do nó 645 até 805 refere-se a LN e do nó 1289 até 1449 a superfície superior. Observa-se que em média até o 7º nó à partir da extremidade engastada tem-se valores abaixo de 1,8 baixo para p^* , isso significa que a influência do engaste se propaga por poucos nós dentro do domínio. É certo que no engaste, o erro deve ser nulo, já que os deslocamentos são prescritos, porém o fato de ter-se deslocamentos extremamente pequenos, próximo ao engaste, pequenas oscilações numéricas representam grandes erros na região imediatamente próxima ao engaste. Além disso vê-se que a maior parte dos valores se estabilizam entre 1,90 e 1,96.

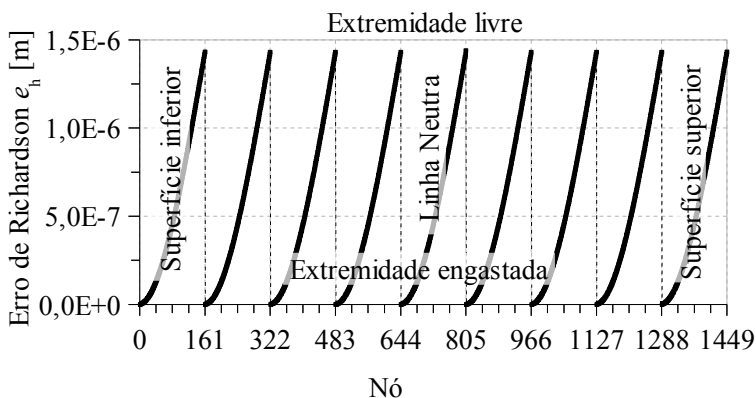


Figura 65: Erro de Richardson, e_h , em função dos nós para d .

A Fig. 65, mostra o erro de Richardson em função dos nós. As posições dos nós em relação a face esquerda, direita, inferior, superior e LN são idênticas as da Fig. 64. O erro, conforme esperado, apresentou-se menor nas regiões próximas do engaste e aumentando de forma quase linear, ao longo de praticamente toda viga. O comportamento da distribuição do erro ao longo de linhas imaginárias paralelas a LN foram idênticos entre si.

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON PARA σ_{xx}

O mapa de p^* para σ_{xx} , é mostrado na Fig. 66 e o erro e_h , é apre-

sentado na Fig. 67. Os valores do erro e_h na Fig. 67, representam adequadamente o esperado pela ordem p^* na Fig. 66. Onde a ordem do erro é mais elevada os erros são menores e onde a ordem é mais baixa os erros maiores. Os melhores resultados para a ordem do erro estão no interior da viga onde alcançam valores em torno de 9,45, estes por sua vez diminuem quando se aproximam da superfície livre inferior e superior atingindo valores menores que 4,75.

A Fig. 68 mostra a distribuição de p^* em função dos nós. Os valores apresentam-se em dois patamares bem distintos: $p^* = 4,76$ para a superfície inferior e superior e $p^* = 8,12$ para as linhas no interior, com exceção da LN pelos motivos já comentados.

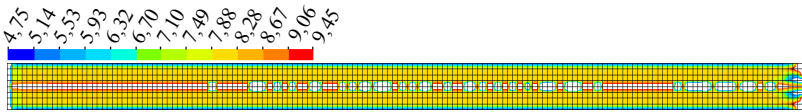


Figura 66: Mapa da ordem do erro de Richardson p^* para σ_{xx} .

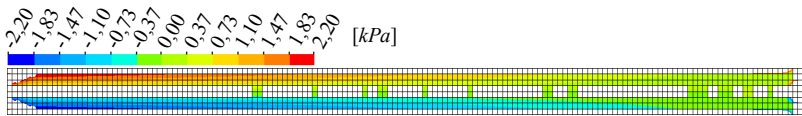


Figura 67: Mapa do erro de Richardson e_h para σ_{xx} .

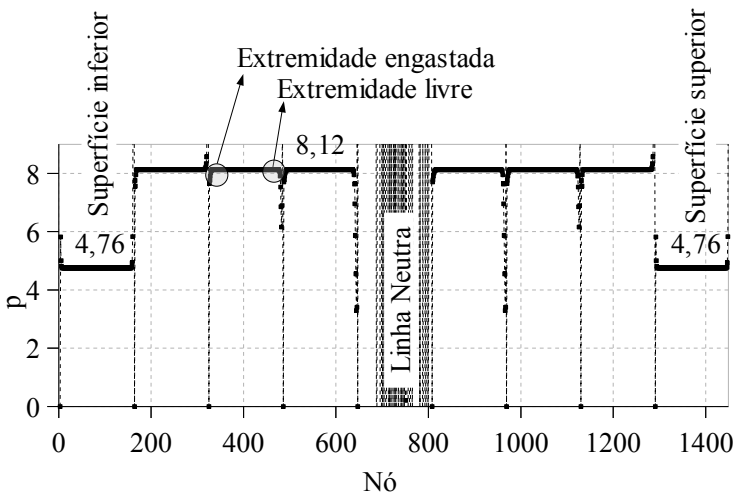


Figura 68: Ordem do erro de Richardson, p^* , em função dos nós para σ_{xx} .

A Fig. 69 é uma ampliação da superfície inferior. Esta evidencia o comportamento constante de p ao longo da linha bem como as variações presentes devido às extremidades esquerda e direita.

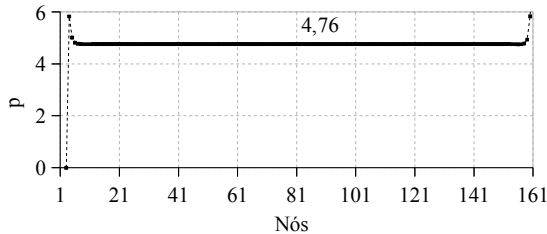


Figura 69: Distribuição de p^* em função dos nós para σ_{xx} na superfície inferior.

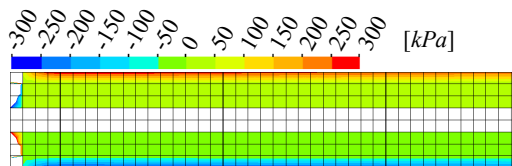


Figura 70: Mapa do erro de Richardson e_h para σ_{xx} .

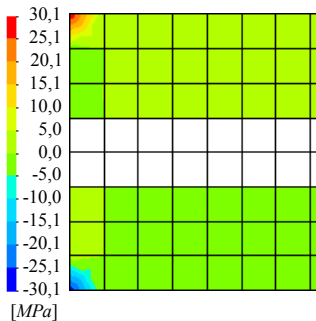


Figura 71: Mapa do erro de Richardson e_h para σ_{xx} no engaste.

A Fig. 70 apresenta uma aplicação para a região próxima do engaste, para o mapa de e_h , considerando a faixa total de valores possíveis para este. As partes brancas sobre a LN são regiões onde as tensões σ_{xx} são nulas e as no engaste estão mostradas na Fig. 71 onde os máximos erros são atingidos nos cantos inferior e superior. Estes por sua vez representam em valor absoluto aproximadamente 14,3% do valor da tensão nestes pontos conforme pode-se ver na Fig. 72.

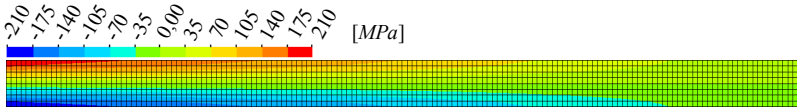


Figura 72: Mapa para σ_{xx} ao longo da viga.

Ainda com relação a e_h , a Fig. 73 deixa claro que os maiores erros estão nas regiões das superfícies livres superior e inferior, que atingem valores da ordem de $10^5 Pa$. Por outro lado os erros envolvidos nas regiões internas são da ordem de 10 a $10^3 Pa$. Sobre a LN os erros foram bastante aleatórios, pois ali os deslocamentos foram praticamente nulos e as tensões analíticas, σ_{xx} , devem ser nulas.

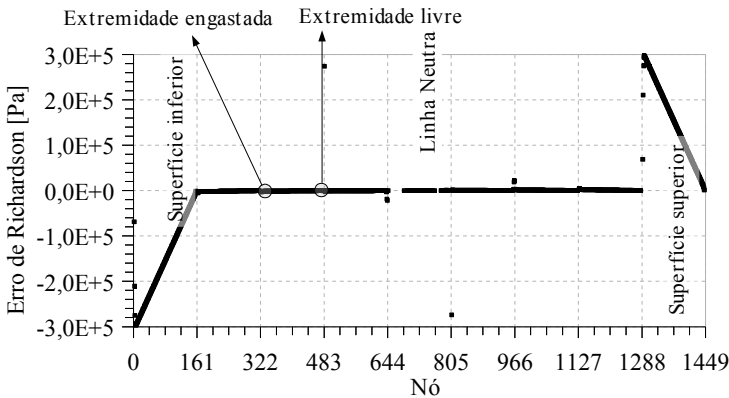


Figura 73: Erro de Richardson, e_h , em função dos nós para σ_{xx} .

Partindo da Fig. 73 e ampliando apenas a região interior, ou seja, deixando as superfícies inferior e superior de fora, obtém-se a Fig. 74. Nesta por sua vez observa-se que as **linhas horizontais** (paralelas a LN) obedecem uma distribuição linear de erros. Essa **distribuição linear** é vista também na direção transversal, ou seja, nas **linhas verticais**. Na figura estão mostradas três linhas verticais destacadas pelas cores: cinza contínuo, vermelho intermitente e azul intermitente. A primeira refere-se a face direita (livre), a segunda a face esquerda (engastada) e a terceira a uma secção intermediária representada pelos nós 253, 414, 575, 897, 1058 e 1219. Todas estas secções obedecem uma **variação linear** do erro. Destas secções, os nós sobre as faces livres e sobre a LN não obedecem o comportamento linear, pois aqueles possuem um nível de erro mais elevado conforme visto na Fig. 73 e na LN possui erro incerto de-

vido aos baixíssimos valores de σ_{xx} sobre a LN. Estas secções bem como os nós podem ser vistos na Fig. 51.

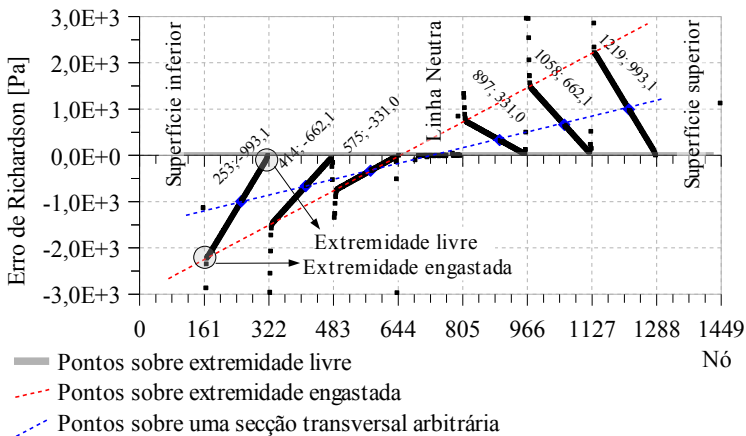


Figura 74: Ampliação para o erro de Richardson, e_h , em função dos nós para σ_{xx} .

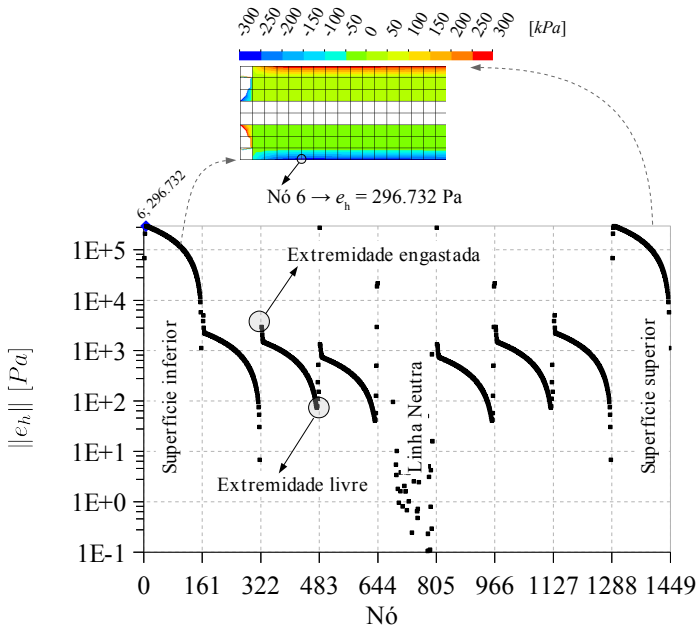


Figura 75: Valor absoluto do erro de Richardson $\|e_h\|$, em função dos nós para σ_{xx} . O eixo para $\|e_h\|$ está em escala logarítmica.

Com a finalidade de visualizar os erros em um gráfico apenas, a Fig. 75 apresenta o valor absoluto do erro em um gráfico *mono-log*. No gráfico fica claro que o comportamento das faces inferior e superior também obedecem uma regra semelhante as outras linhas horizontais, o que muda é a ordem do erro, que assume maiores valores quando condições de contorno com força prescrita estão presentes.

A figura também mostra o mapa de erros na região próxima do engaste e a indicação do nó 6, o qual apresenta o maior valor de erro sobre a face inferior. Este por sua vez possui um valor simétrico na face superior.

Novamente é chamada a atenção para a simetria da distribuição do erro. Também percebe-se que os erros são maiores na extremidade esquerda e vão diminuindo gradativamente para regiões próximas à extremidade direita e para regiões mais próximas da LN. Novamente nos extremos e sobre a LN, a convergência não é monotônica, provocando oscilações como podem ser vistas nos valores esparsos.

Novamente é chamada a atenção para a simetria da distribuição do erro. Também percebe-se que os erros são maiores na extremidade esquerda e vão diminuindo gradativamente para regiões próximas à extremidade direita e para regiões mais próximas da LN. Novamente nos extremos e sobre a LN, a convergência não é monotônica, provocando oscilações como podem ser vistas nos valores esparsos.

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON PARA σ_{yy}

O mapa de p^* para σ_{yy} é mostrado na Fig. 76 e para o erro e_h os valores oscilaram demasiadamente pois $\sigma_{yy} \approx 0$ com exceção das duas pequenas regiões (extremidades) mostradas na Fig. 77.

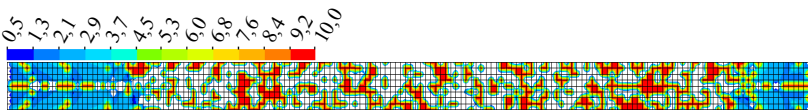


Figura 76: Mapa da ordem do erro de Richardson, p^* , para σ_{yy} .

A ordem do erro, apesar das grandes variações mostradas na Fig. 76, apresentou alguma “estabilidade” oscilando entre 1,3 e 2,9 nas regiões próximas das extremidades. Isso é causado pelo aparecimento de tensões $\sigma_{yy} \neq 0$ nestas regiões.

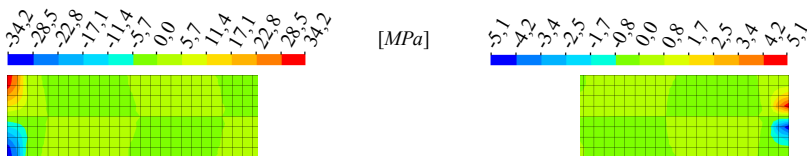


Figura 77: Tensões σ_{yy} nas extremidades da viga.

EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON PARA σ_{xy}

O mapa para a tensão σ_{xy} , é mostrado na Fig. 78 para melhor visualizar da distribuição de tensões cisalhantes ao longo da viga. São quatro regiões de interesse: 1ª região, sobre a LN, a tensão atinge o valor mínimo local $-2,93 MPa$ praticamente em toda viga. A 2ª região, ainda sobre a LN, na região próxima do engaste este valor sobre abruptamente para um máximo de $7,53 MPa$. Na 3ª região, nos cantos inferior e superior da face engastada, as tensões atingem o mínimo de $-16,5 MPa$. Na 4ª região, nas faces livres inferior e superior e parte da face direita, os valores das tensões cisalhantes são baixos, na ordem de $-0,72 MPa$, se aproximando de zero que seria o valor teórico esperado. $-0,72 MPa$ corresponde a 4% do valor mínimo de $-16,5 MPa$.

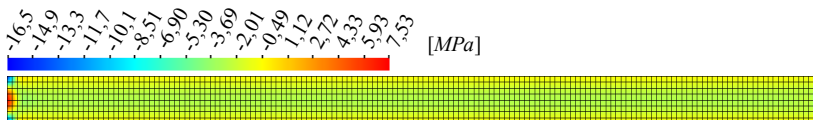


Figura 78: Mapa de tensão cisalhante σ_{xy} .

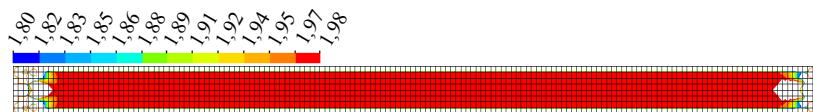


Figura 79: Mapa da ordem do erro de Richardson p^* para σ_{xy} .

O mapa de p^* é mostrado na Fig. 79 e de e_h na Fig. 80. Com exceção das faces superior e inferior e das regiões próximas a extremidade esquerda e direita, o valor de p^* é praticamente igual à 2, ou ao menos muito próximo.

Os valores dos erros em grande parte da viga estão entre $-6,33$ e $3,33 kPa$. O maior valor absoluto deste é $6,33 kPa$ e nesta região a ten-

são mais significativa ocorre sobre a LN com valor absoluto $2,39 \text{ MPa}$, assim aquele corresponde a $0,26 \%$ deste, o que corresponde a um valor bastante baixo, sendo uma excelente aproximação. Tomando ainda a mesma base de comparação, as superfícies inferior e superior possuem um erro de 100 kPa , o que corresponde a $4,2 \%$.

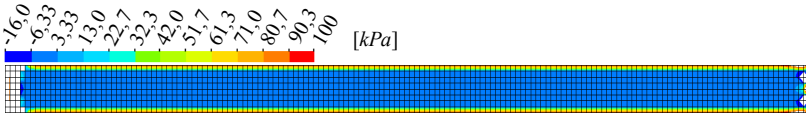


Figura 80: Mapa do erro de Richardson e_h para σ_{xy} .

4.1.5.3 Algumas Considerações

Para o problema apresentado, observou-se que o método apresenta convergência monotônica em todas regiões onde os valores de deslocamentos ou tensões são estáveis. Divergindo apenas em regiões críticas, como LN, engaste, superfície livre e outros pontos que possam introduzir instabilidade numérica ou gradientes elevados.

De uma maneira geral, o EbFVM gerou mapas de deslocamentos, tensões e erros coerentes e não apresentou nenhuma instabilidade nas regiões onde esta não era esperada.

A simetria e linearidade na distribuição de erros é outro indicativo da convergência suave (monotônica) para a solução exata, sendo o esperado de um método de solução numérica.

Com relação a análise das tensões, estas são obtidas por pós-processamento, assim tanto o erro como sua ordem não dependem apenas da técnica EbFVM, mas também da técnica de recuperação de tensões utilizada.

4.2 PROBLEMAS PROPOSTOS

4.2.1 VIGA EM BALANÇO⁴⁸

Este é um problema clássico em engenharia e na teoria de vigas, encontra-se a solução analítica para o deslocamento da Linha Neutra, para uma viga engastada em uma extremidade e força aplicada sobre a linha neutra na extremidade livre para o EPT. A geometria deste problema é mostrado na Fig. 81 e as propriedades do material são

⁴⁸ Esta análise foi apresentada no XXIX CILAMCE (FILIPPINI et. al, 2008).

$E = 210 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$. Esta viga tem um índice de esbeltez igual a $\frac{L}{H} = 10$.

Comparar-se-á com duas soluções: A solução clássica de Bernoulli-Euler fornecida pela equação (BEER, 1989)

$$v(x) = \frac{P}{3EI} \left[\left(\frac{3L}{2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{2}\right) x^3 \right] \quad (104)$$

e a solução proposta por Donnell (1976) é apresentada na equação

$$v(x) = \frac{P}{3EI} \left[\left(\frac{2(8-9\nu)H^2}{40}\right) x + \left(\frac{3L}{2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{2}\right) x^3 \right], \quad (105)$$

a qual possui um termo adicional em x . A equação de Bernoulli-Euler desconsidera na curvatura da viga

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \quad (106)$$

o termo $(dy/dx)^2$ durante sua dedução. Este é desconsiderado, pois para viga esbelta e pequenas deformações, o termo é próximo de zero.

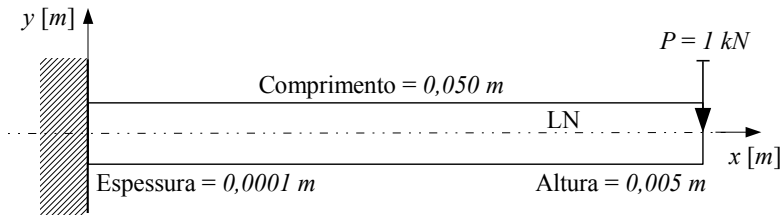


Figura 81: Viga em balanço.

A solução de Bernoulli-Euler é originada da seguinte igualdade

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI} \quad (107)$$

Nestas últimas equações, I representa o momento de inércia da secção, E o módulo de Young e $M(x)$ o momento fletor em uma secção da viga numa posição x .

Este problema foi resolvido com duas malhas. A primeira 40×4 elementos e a segunda 80×8 elementos. Foram utilizados elementos quadriláteros e malhas cartesianas. Os resultados foram obtidos pelo EbFVM, pelo clássico FVM (FILIPPINI, 2004c), pelo FEM e com-

paradas com as soluções de referência de Bernoulli-Euler e Donnell.

A Fig. 82 apresenta o gráfico do **erro relativo** (er), para as soluções (v_{num}), quando comparadas com a solução analítica (v_{an}), proposta por Donnell. O erro relativo é sobre os deslocamentos v na LN e calculado conforme a Eq. (108), onde ϕ_{num} e ϕ_{an} , são valores genéricos, obtidos pelo método numérico e analítico respectivamente, que para o presente caso, este seria o deslocamento v . Portanto, com o auxílio da Eq. (108), pode-se perceber que estes valores **negativos** dos erros, indicam que o **deslocamento** atingido pelo método **foi menor que o analítico**.

$$er = \frac{\phi_{num} - \phi_{an}}{\phi_{an}} \cdot 100 [\%] \quad (108)$$

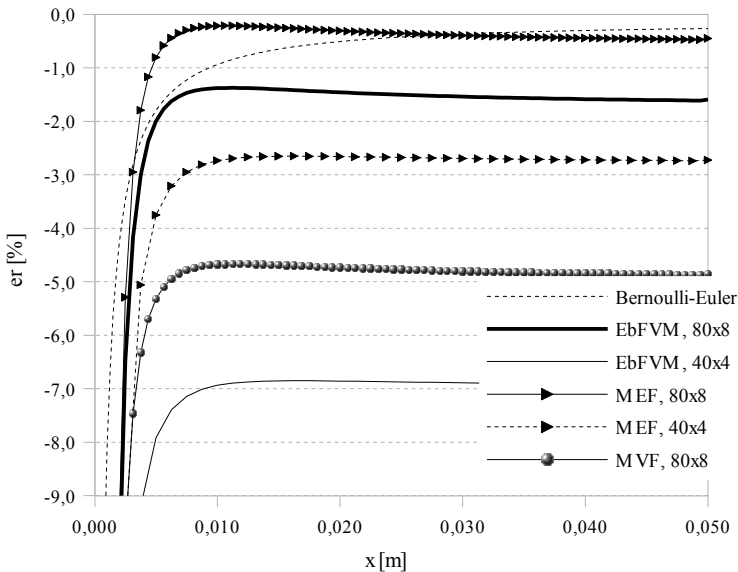


Figura 82: Erro relativo na LN. Os valores deste gráfico estão na Tab. A.1.

O primeiro aspecto evidente são os erros elevados na região próxima do engaste. Isso se deve ao fato de que os deslocamentos nessa região, são pequenos, portanto os erros absolutos, quando comparados com o deslocamento representam um percentual significativo deste. Observa-se que após a região próxima do engaste os erros relativos mantém-se praticamente constantes ao longo da viga, apresentando um leve aumento ao se aproximar da extremidade livre. O comportamento do erro para Bernoulli-Euler não segue o mesmo comportamento, pois a

diferença deste com a solução analítica sugerida, é um termo linear (o primeiro termo entre parêntesis na Eq. (105)).

No caso da convergência da solução sob o efeito do refino de malha, o MEF converge mais rapidamente para a solução sugerida, seguido do EbFVM que também apresenta bons resultados, erros em torno de 1,2% maiores que o MEF e por fim, o MVF apresentou erros maiores, em torno de 4 % a mais que o FEM e 3 % a mais que o EbFVM para a maior parte da região afastada do engaste. Esse resultado vem do fato de que na fronteira do volume de controle, o FVM utiliza-se de metade dos pontos de integração utilizados pelo EbFVM. A Fig. 83 ilustra isso.

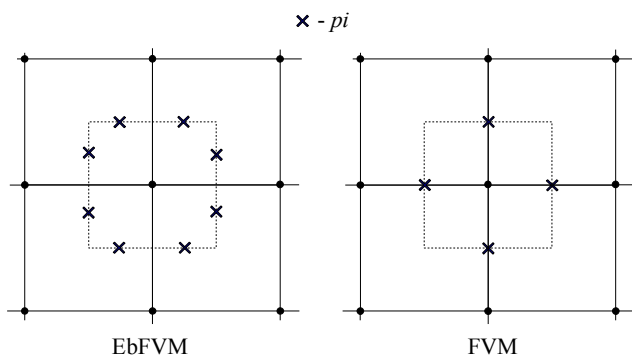


Figura 83: Pontos de integração para EbFVM e FVM.

Ainda sobre o mesmo problema, é feita uma análise da influência do refino de malha, sobre o deslocamento v do ponto sobre a LN na extremidade livre. Os resultados estão na Fig. 84. Os valores analíticos de v foram obtidos pela equação de Bernoulli-Euler. Conforme esperado da mesma forma como ocorreu para o erro relativo, é visível que com o refino de malha a solução para o deslocamento neste ponto avança de deslocamentos menores que os analíticos para malhas mais grosseiras para maiores que os analíticos em malhas mais refinadas, evidenciando novamente que as equações analíticas, são para problemas com viga de elevado índice de esbeltez.

4.2.2 TENSÃO CISALHANTE EM UMA PLACA BI-ENGASTADA

Este problema consiste em uma viga bi-engastada, sujeita a deslocamento prescrito em ambas extremidades (ver Fig. 85). Devido às deformações, internamente aparecem tensões normais e cisalhantes, sendo

que estas últimas atingem um valor máximo sobre a LN. O problema foi analisado como EPD.

Com a finalidade de avaliar a recuperação de tensões a partir do campo obtido pelo EbFVM, o problema foi resolvido com duas malhas: 60×6 e 100×10 elementos. Dois esquemas de recuperação de tensões foram testados sobre os resultados obtidos, comparando-os com os resultados obtidos pelo FEM e com uma solução referência obtida através do FEM para uma malha 700×70 elementos.

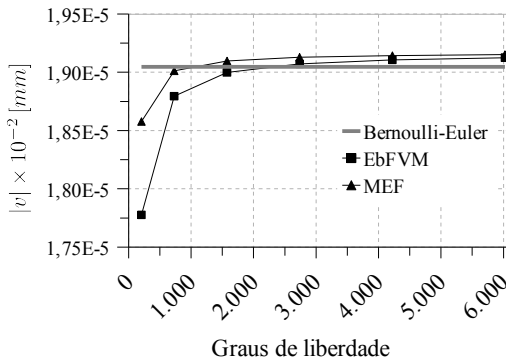


Figura 84: Deslocamento da extremidade livre sobre a LN. Os valores deste gráfico estão na Tab. A.2.

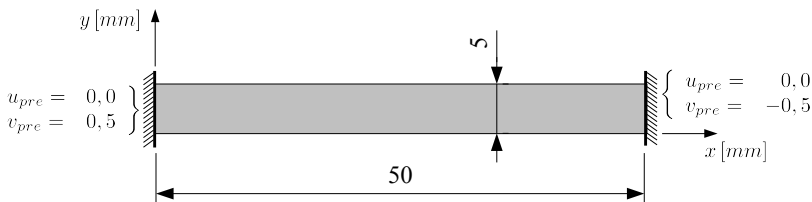


Figura 85: Placa bi-engastada com deslocamento prescrito em ambas extremidades.

Os esquemas de recuperação de tensões (detalhados no apêndice C) utilizados foram: Cômputo Direto no Nó (CDN), Extrapolação (Ex), Suavização Local (SL), Suavização Global (SG), “*Superconvergent Patch Recovery*” (SPR) e “*Patch*” Nodal para Deslocamento Linear (PNDL).

Destes esquemas, o PNDL foi sugerido por Vaz Jr (2008) e ainda não foi testado sobre o EbFVM. Em suma, este esquema consiste em localizar os coeficientes de um polinômio linear para interpolação do cam-

po de deslocamentos. A partir deste obtêm-se as deformações sobre o nó de interesse e consequentemente as tensões (detalhes podem ser vistos no apêndice C).

A Fig. 86 apresenta os resultados da tensão cisalhante sobre a LN para a malha 60×6 utilizando-se dos esquemas de suavização CDN e PNDL para o EbFVM e o SPRE, SG, SL, Ex, SL_ABX e CDN para o FEM além do resultado fornecido pelo FVM clássico obtidos por Vaz Jr, Muñoz-Rojas e Filippini (2009). O esquema SL_ABX utiliza-se da SL, local porém com função de interpolação uma ordem abaixo das funções utilizadas para os deslocamentos, portanto para elemento linear utiliza-se de funções constantes. Todas as tensões obtidas para o FEM contaram com o uso do aplicativo MANEH (2009). Na Fig. 87 é mostrada uma ampliação da região, cuja legenda é idêntica a utilizada na Fig. 86.

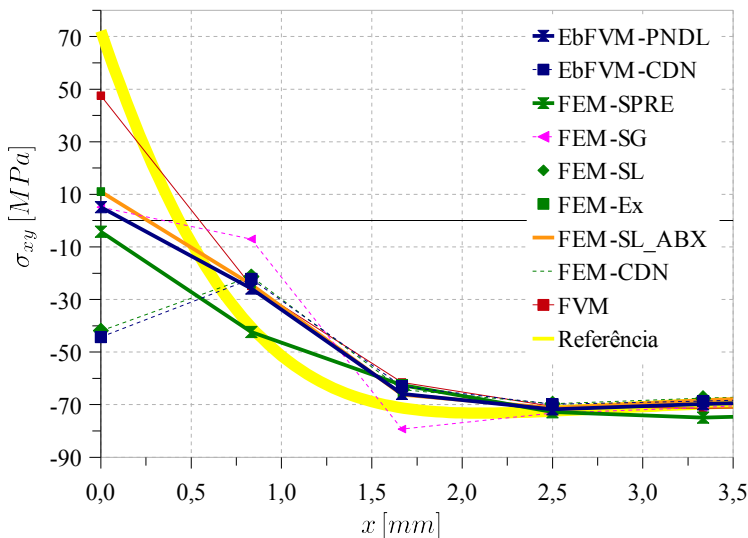


Figura 86: Tensão cisalhante sobre a LN próximo ao engaste em $x = 0$ para malha 60×6 . Os valores deste gráfico constam na tabela A.4.

No caso do FVM clássico, o qual é desenvolvido sobre uma malha cartesiana, determina-se a tensão utilizando uma interpolação parabólica dos deslocamentos do nó referência com os nós adjacentes a este, então a derivada é estimada a partir desta interpolação e as tensões são computadas sobre o nó referência. Na figura as tensões cisalhantes, principalmente próximo ao engaste, acompanham com boa proximidade a

referência. Isto está relacionado diretamente à forma de recuperação de tensões adotada pelo método, no caso um esquema de 2ª ordem nos deslocamentos, favorecido pela malha estruturada e ortogonal.

No caso do FEM-Ex, apesar de ser uma extrapolação com tensão constante no elemento, o desempenho é bom se comparado aos demais, e isso se deve a utilização das tensões nos pontos de super-convergência (GP). Mesmos resultados são fornecidos pela técnica FEM-SL_ABX.

Os casos FEM-CDN, FEM-SL e EbFVM-CDN apresentam valores muito próximos, porém são pobres com respeito a representação do gradiente de deslocamento na fronteira. O caso FEM-SG apresentaria resultados razoáveis se não fossem as oscilações presentes próximo ao engaste, estas desaparecem em regiões longe deste.

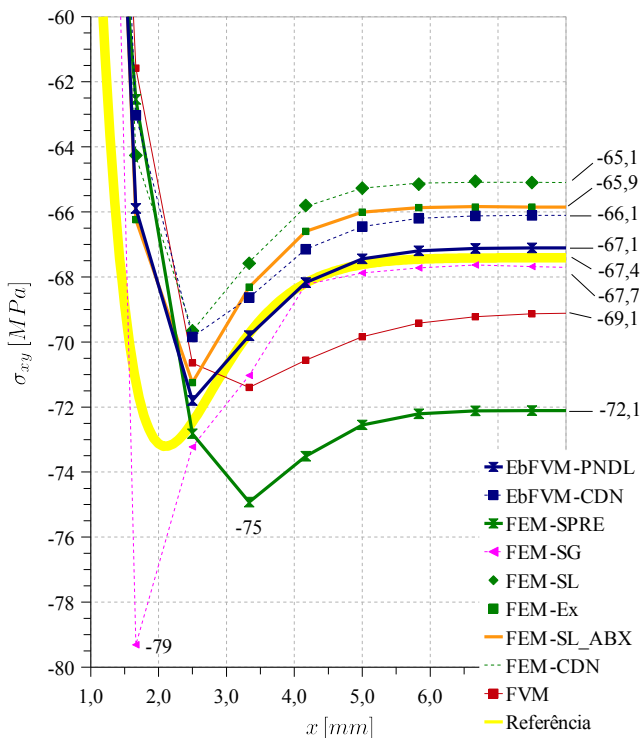


Figura 87: É uma ampliação da Fig. 86.

No EbFVM-PNDL e FEM-SPRE, os resultados são razoáveis, com certa vantagem do EbFVM com respeito ao valor junto ao engaste e

ao valor de tensão máxima ao longo da maior parte da viga. Ambos acompanham com razoável proximidade a curvatura da Referência. Isso é um indicativo de ausência de instabilidades.

Adicionalmente é interessante ressaltar que as técnicas utilizadas pelo FEM (com exceção do CDN, Ex e SL_ABX) fazem uma aproximação linear das tensões dentro do elemento. O que não ocorre com o EbFVM-PNDL que considera as tensões constantes dentro do patch.

Assim mesmo com uma ordem abaixo, este fornece bons resultados se comparado aos demais. Por outro lado a técnica Ex, e SL_ABX também deram bons resultados utilizando tensões constantes no elemento.

Por fim pode-se dizer que EbFVM-PNDL (com tensões constantes) é consistente com os esquemas FEM-Ex e FEM-SL_ABX que possuem tensões constantes no elemento. Ainda que o EbFVM-CDN apresenta resultados muito próximo ao FEM-CDN.

4.2.2.1 Tensões Calculadas pela Teoria de Vigas

Utilizando-se da teoria de vigas (SNYDER, 1973), pode-se obter a tensão cisalhante máxima teórica, σ_{xy}^{max} , associada a LN, mais precisamente no meio da viga que no presente caso corresponde ao ponto $(x; y) = (25; 2, 5) [mm]$. A tensão cisalhante teórica é determinada através de

$$\sigma_{xy}^{max} = \frac{3V_c}{2A}, \quad (109)$$

onde V_c indica a força cortante ao longo da viga e A é a área da secção transversal.

A determinação de V_c é feita utilizando o método da sobreposição para vigas estaticamente indeterminadas e pode ser determinada por

$$V_c = -\frac{12EIy_{max}}{l^3}, \quad (110)$$

onde E é o *Módulo de Young*, l é o comprimento da viga (50 mm), y_{max} é a flecha máxima (1 mm), I é o momento de inércia da secção que para o estado plano de deformação deve ser determinado através da equação

$$I = \frac{bh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (111)$$

onde h e b são a altura e a espessura da placa respectivamente e ν é o coeficiente de *Poisson*.

Resolvendo as equações (109), (110) e (111) para o problema proposto, obtém-se o valor teórico $\sigma_{xy}^{max} = 69.230.769,2308 Pa$ ou $69,23 MPa$, o qual, juntamente com o valor de referência $\sigma_{xy} = -67,41 MPa$, servem de comparação para os valores obtidos pelo EbFVM, FEM e FVM utilizando-se uma malha 60×6 elementos. As comparações estão na Tab. 10, onde os erros relativos, er , foram determinados conforme

$$er = \frac{\phi_{num} - \phi_{an}}{|\phi_{an}|} \cdot 100 [\%] \tag{112}$$

Tabela 10: Erro relativo sobre σ_{xy}^{max} para o EbFVM, FEM e FVM em relação à teoria de vigas.

		$\sigma_{xy}[MPa]$	Teórico	Referência
Teórico		-69,23		
Referência		-67,41	$er [\%]$	$er [\%]$
EbFVM	PNDL	-67,11	3,06	0,45
	CDN	-66,10	4,52	1,94
FEM	SPRE	-72,11	-4,16	-6,97
	SG	-67,68	2,24	-0,40
	SL	-65,10	5,97	3,43
	Ex	-65,85	4,88	2,31
	SL_ABX	-65,85	4,88	2,31
	CDN	-65,10	5,97	3,43
FVM		-69,08	0,22	-2,48

O FVM quando comparado com a solução teórica apresentou uma excelente aproximação com um erro relativo de 0,22%. O FEM utilizando-se da suavização global apresentou boa aproximação em relação a solução teórica com erro relativo de 2,24% e em relação a solução de referência com erro de -0,40%.

Por fim o EbFVM utilizando-se do esquema PNDL quando com-

parado com a solução teórica apresentou um erro de 3,06 %, com a solução de referência um erro de 0,45 % e com o esquema CDN um erro relativo de 1,94 %. Apesar dos bons resultados obtidos pelo FEM-SG, este apresentou oscilações não físicas no valor da tensão, na região onde altos gradientes de deformação estão presentes (ver Fig. 87). O mesmo não ocorreu com o FVM e o EbFVM.

4.2.3 PROBLEMA “CUBIC”⁴⁹

O problema *Cubic*, descrito na secção 4.1.3.2, possui solução analítica e é aqui utilizado para verificar os erros na solução obtida através do EbFVM para os campos de deslocamento.

O problema foi resolvido com o EbFVM e com o FEM utilizando-se uma malha com 32×16 elementos e considerando-se quatro casos de CC. Nos 4 casos, a face direita é sempre com deslocamento prescrito. As outras faces variam desde todas com força prescrita até todas com deslocamento prescrito. Aqui vale uma observação: Quando se utiliza uma CC de deslocamento prescrito sobre determinado nó, é equivalente a estipular o resultado do deslocamento para este nó e com isso está-se eliminando a equação de equilíbrio do sistema de equações. Assim a discretização sobre o nó não será levada em conta durante a solução do problema. *Portanto, se toda fronteira estiver sujeita a deslocamento prescrito, os resultados obtidos são devidos apenas as equações discretizadas para o interior do domínio assim como seu respectivos erros.* Observação semelhante foi vista no Patch Test (secção 4.1.1).

Antes da análise dos quatro casos, as figuras 88, 89 e 90 apresentam os mapas do deslocamento u , v e o deslocamento total $\|\mathbf{u}\|$. Estes mapas foram retirados do caso com todas CC com deslocamento prescrito.

A Fig. 88 apresenta o mapa para os deslocamentos u . Os valores são coerentes com o tipo de CC impostas para o problema da Fig. 32, ou seja, o problema é uma viga em balanço com força prescrita em uma extremidade, ocasionando o aparecimento de momento fletor no interior da viga e conseqüentemente o efeito de tração na região acima da LN e de compressão abaixo desta. Isso é evidenciado pelos deslocamentos em Ox , positivos e negativos respectivamente.

A Fig. 89, apresenta o mapa de deslocamento v , o qual também

⁴⁹ Parte dos resultados dos erros relativos para os campos de deslocamento foram apresentados no XXIX CILAMCE (FILIPPINI et. al, 2008) e parte no XXX CILAMCE (FILIPPINI et. al, 2009).

apresenta-se com uma distribuição coerente com o tipo de CC do problema. Próximo da face direita, devido ao momento M , as linhas de distribuição para v são levemente curvadas e quanto mais afastado desta face passam a apresentar um perfil retilíneo característico de uma viga em balanço, região esta que atinge os maiores deslocamentos v .

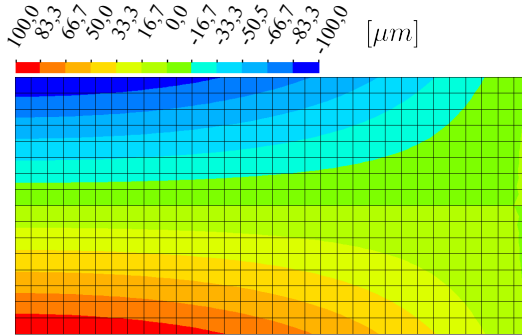


Figura 88: Mapa de deslocamento u obtido com EbFVM.

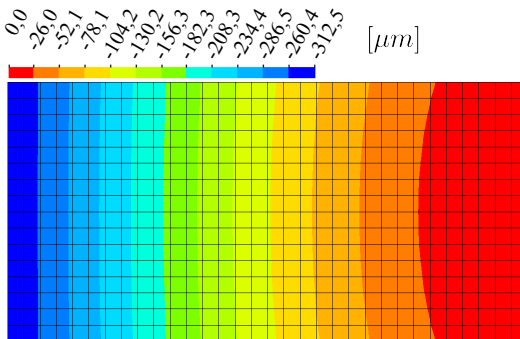


Figura 89: Mapa de deslocamento v obtido com EbFVM.

Por fim o mapa do deslocamento total $\|\mathbf{u}\|$ é mostrado na Fig. 90. Neste mapa, além dos intervalos de deformações é apresentado o vetor do deslocamento total, o qual dá uma noção geral do movimento dos pontos do corpo. Este deslocamento sobre a LN deve ser exclusivamente na direção Oy e isso é confirmado ao se observar os vetores na figura.

Nas secções que se seguem o erro relativo, er , será utilizado para comparar os resultados do EbFVM e do FEM com os resultados analíticos. A Eq. (108) é utilizada para determiná-los, porém o resultado apre-

sentado é sempre o valor absoluto de er , ou seja, $|er|$.

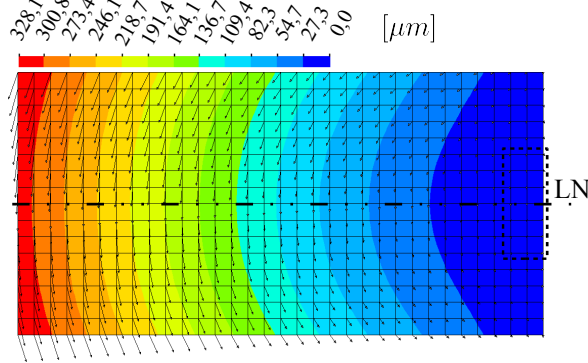


Figura 90: Mapa do deslocamento total, $\|u\|$ obtido com EbFVM.

4.2.3.1 Face Direita com Deslocamento Prescrito e demais com Força Prescrita

Esta CC, é o caso analisado em que se tem o maior número de equações discretas para a fronteira sendo consideradas no sistema de equações final e normalmente é de se esperar que maiores erros estejam envolvidos já que mais CC de Neumann estão envolvidas.

As figuras 91 e 92, apresentam os erros relativos para o deslocamento u e v , para a solução com o EbFVM.

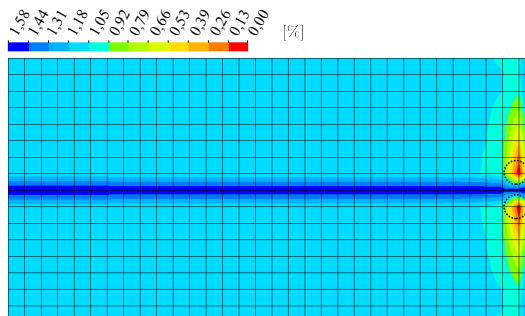


Figura 91: Mapa de $|er|$ para o deslocamento u com EbFVM.

Os erros para u , na maior parte da viga estão entre 0,53 e 0,66%. Os máximos erros são verificados sobre os dois nós marcados e isto é

justificado, pois nesta região tem-se uma restrição de deslocamento e consequentemente os deslocamentos nas proximidades são pequenos, o que faz com que pequenas variações nos resultados ocasionem grandes erros relativos. A Fig. 90 destaca esta região de pequenos deslocamentos.

Os erros para v na maior parte da viga estão entre 0,375 e 0,450%. Os máximos erros são verificados na região próxima a fronteira esquerda com força prescrita, o que é esperado, já que mais CC de Neumann estão presentes.

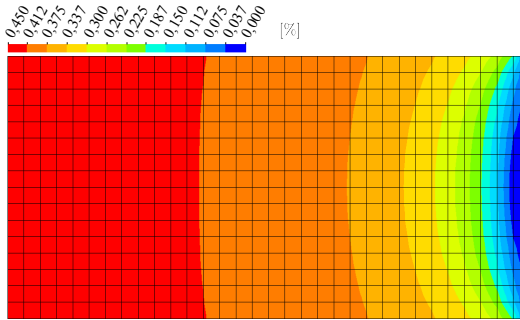


Figura 92: Mapa de $|er|$ para o deslocamento v com EbFVM.

As figuras 93 e 94 apresentam os erros relativos para o deslocamento u e v devido à solução com FEM.

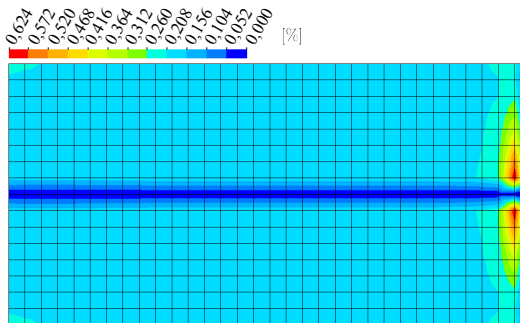


Figura 93: Mapa de $|er|$ para o deslocamento u obtidos com o FEM.

Os erros para u na maior parte da viga estão entre 0,156 e 0,208% menores que para o EbFVM. Os máximos erros ocorrem sobre a

mesma região marcada na Fig. 90 e os motivos, são os mesmos citados para o EbFVM.

Os erros para v na maior parte da viga estão entre 0,153 e 0,188% menores que no EbFVM. Os maiores erros são verificados na região próxima a fronteira esquerda com força prescrita, o que é esperado, já que mais CC de Neumann estão envolvidas na solução do problema.

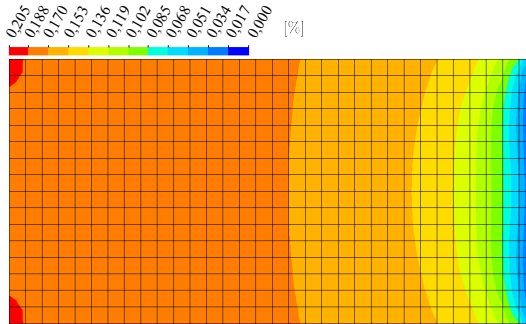


Figura 94: Mapa de $|er|$ para o deslocamento v com FEM.

4.2.3.2 Face Direita e Esquerda com Deslocamento Prescrito e demais com Força Prescrita

Para este caso, as CC utilizadas são força prescrita nula na face superior e inferior, deslocamento prescrito na face direita e esquerda, o qual foi determinado pela Eq. (95) e constam na Tab. A.3.

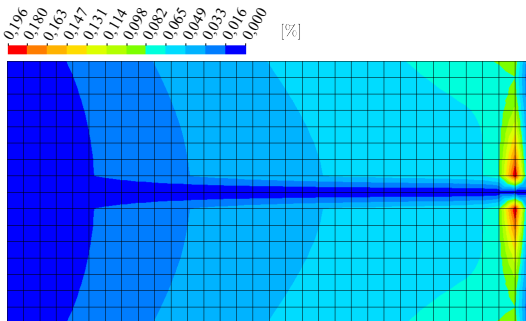


Figura 95: Mapa de $|er|$ para o deslocamento u para EbFVM.

Os erros relativos para o EbFVM, da solução numérica em relação a analítica, são calculados com a Eq. (108) e são apresentados nas figuras 95 e 96, para o deslocamento u e v respectivamente.

Percebe-se claramente que são baixos os erros relativos para os campos de deslocamento, atingindo os maiores valores em u na ordem de 0,20% e em v na ordem de 0,17%. Nas regiões próximas a face esquerda os erros se aproximaram mais de zero pois foi onde ocorreram os maiores deslocamentos, assim os erros absolutos são bastante pequenos em relação aos deslocamentos nessa região.

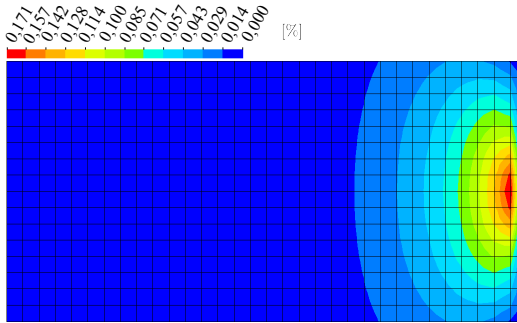


Figura 96: Mapa de $|er|$ para o deslocamento v para EbFVM.

Porém na face direita os erros assumiram valores um pouco superiores. Isto decorre de ter-se nesta face o engaste, ou seja, a restrição no deslocamento em u e v . Logo pequenos erros nos deslocamentos são bastante significativas em relação ao próprio deslocamento já que este é pequeno.

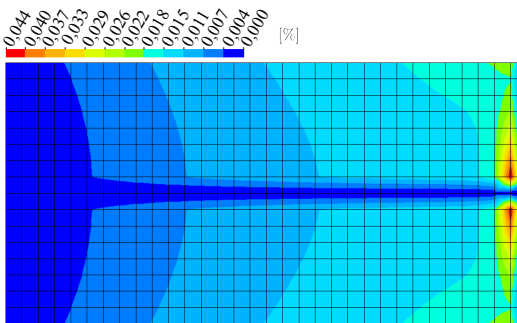


Figura 97: Mapa de $|er|$ para o deslocamento u para o FEM.

Na Fig. 96, isto é perceptível para o deslocamento v , já que no centro da face direita tem-se uma restrição com deslocamento nulo na direção Oy .

Para o FEM, os erros são mostrados nas figuras 97 e 98, para u e v respectivamente. Os erros para u na maior parte da viga estão entre 0,0 a 0,015%. Menores que para o EbFVM. Os máximos erros ocorrem sobre a mesma região marcada na Fig. 90.

Os erros para v na maior parte da viga estão entre 0,0 e 0,010%. Estes são menores que os obtidos pelo EbFVM. Os máximos erros são verificados novamente na região próxima ao ponto onde há a restrição de deslocamento e consequentemente menores deslocamentos na face direita.

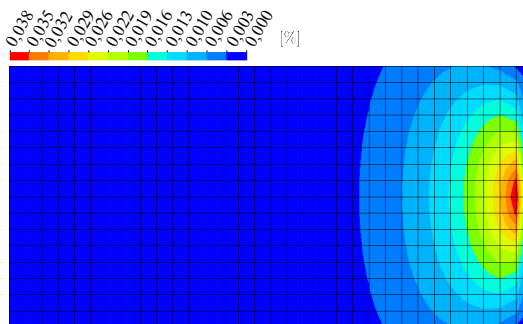


Figura 98: Mapa de $|er|$ para o deslocamento v para o FEM.

Tanto para o EbFVM como para o FEM, como era de se esperar, devido a introdução de mais uma face sujeita a CC de valor prescrito, o erro de uma maneira geral diminuiu.

4.2.3.3 Face Direita, Esquerda e Inferior com Deslocamento Prescrito e a Face Superior com Força Prescrita

Nesta CC, novamente o número de equações discretas consideradas para a fronteira é reduzido à apenas a face superior, onde se tem força prescrita, portanto é esperado que os erros diminuam em relação aos casos anteriores.

As figuras 99 e 100, apresentam os erros relativos para o deslocamento u e v devido à solução com o EbFVM.

Os erros para u na maior parte da viga estão entre 0,0 e 0,057%, menores que para o caso anterior. O máximo erro é verificado sobre a

região destacada na Fig. 99, pelos mesmos motivos já comentados. O que ocorre de diferente é que ao contrário dos casos anteriores, neste caso, apenas um dos dois pontos atinge o valor máximo. É perceptível que este ponto é o que está mais próximo da região onde a CC é de força prescrita.

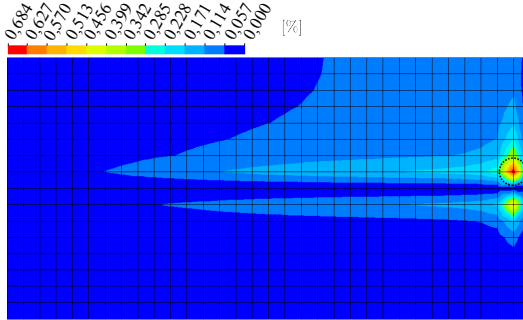


Figura 99: Mapa de $|er|$ para o deslocamento u para EbFVM.

Os erros para v na maior parte da viga, estão entre 0,0 e 0,005 %, menores que para o caso anterior. O máximo erro é verificado sobre a região destacada na Fig. 90, pelos mesmos motivos já comentados. O que ocorre de diferente é que: ao contrário dos casos anteriores, onde esta região era simétrica em relação à linha central da viga, aqui a região é deslocada para cima em direção a face com CC de força prescrita. Isso é esperado já que esta CC introduz maiores erros.

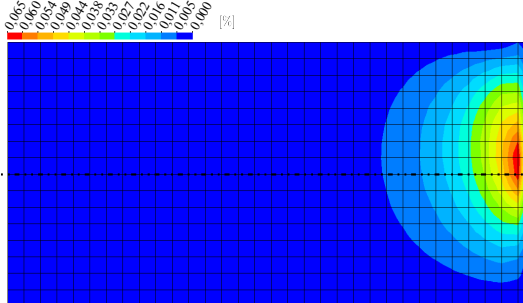


Figura 100: Mapa de $|er|$ para o deslocamento v para EbFVM.

As figuras 101 e 102 apresentam os erros relativos para o deslocamento u e v , devido à solução com o FEM.

Os erros para u na maior parte da viga estão entre 0,0 e 0,013%, são menores que para o caso anterior e menores que os obtidos para o EbFVM. O máximo erro, é verificado sobre a mesma região destacada na Fig. 99 e pelos mesmos motivos já comentados.

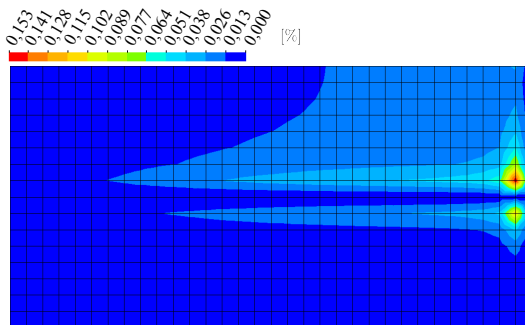


Figura 101: Mapa de $|er|$ para o deslocamento u para FEM.

Os erros para v , na maior parte da viga estão entre 0,0 e 0,001%, são menores que para o caso anterior e menores que os erros obtidos na solução com o EbFVM. O máximo erro é verificado sobre a região destacada na Fig. 90. Aqui também, a região de máximo erro, sofreu um deslocamento para cima e isso devido a CC de força prescrita presente na face superior.

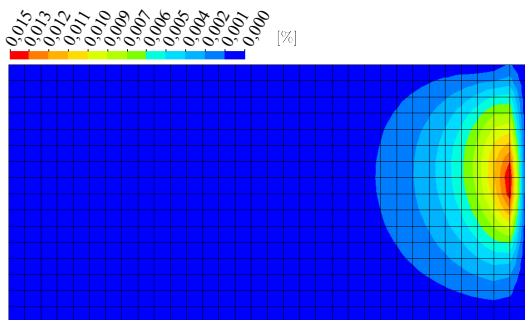


Figura 102: Mapa de $|er|$ para o deslocamento v para FEM.

4.2.3.4 Todas Faces com Deslocamento Prescrito

Nesta CC, não há nenhuma equação discreta para a fronteira sen-

do consideradas no sistema de equações, restando assim apenas as equações para o interior do domínio. Portanto, também é esperado que os erros diminuam em relação aos casos anteriores.

As figuras 103 e 104, apresentam os erros relativos para o deslocamento u e v para a solução com o EbfVM.

Os erros máximos para u são da ordem de $2,2 \times 10^{-12} \%$, evidentemente muito menores que os casos anteriores. Os máximos erros seguem a mesma localização e explicação já feita anteriormente. Adicionalmente observa-se que a simetria da distribuição dos erros novamente é verificada em relação à linha central longitudinal.

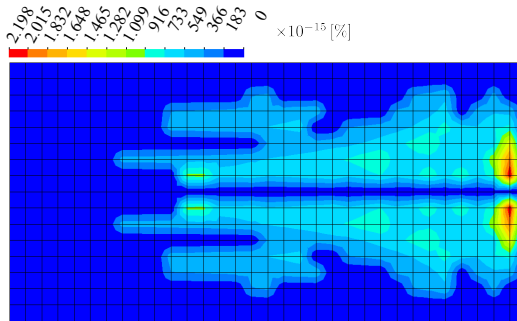


Figura 103: Mapa de $|er|$ para o deslocamento u para EbfVM.

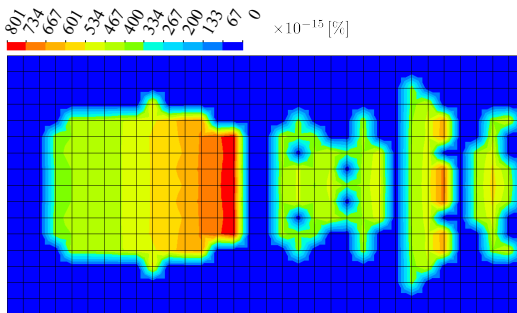


Figura 104: Mapa de $|er|$ para o deslocamento v para EbfVM.

Os erros máximos para v são da ordem de $0,8 \times 10^{-12} \%$, também muito menores que os casos anteriores. A princípio, analisar erros tão pequenos (da ordem de 10^{-12}) pode parecer de pouca utilidade, mas no caso da comparação entre os métodos, isso é útil, pois como será vis-

to ao final desta análise do problema *Cubic*, será possível verificar os erros efetivos de ambos os métodos, bem como a influência dos erros de CPU sobre os resultados.

As figuras 105 e 106, apresentam os erros relativos para o deslocamento u e v para a solução com o FEM.

Os erros máximos para u são da ordem de $12,8 \times 10^{-12} \%$, muito menores que os casos anteriores. Os máximos erros seguem a mesma localização e explicação já feita. Porém o que há de novo é que os erros são maiores que os apresentados pelo EbFVM e uma comparação mais detalhada será feita adiante.

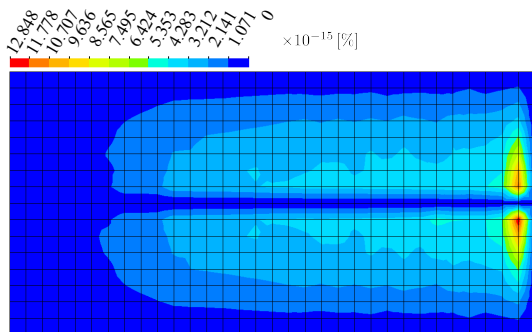


Figura 105: Mapa de $|er|$ para o deslocamento u para FEM.

Os erros máximos para v , são da ordem de $2,5 \times 10^{-12} \%$, evidentemente muito menores que os casos anteriores. Aqui também algo novo é determinado: Os erros são maiores que os apresentados pelo EbFVM, o que também será discutido em análises posteriores.

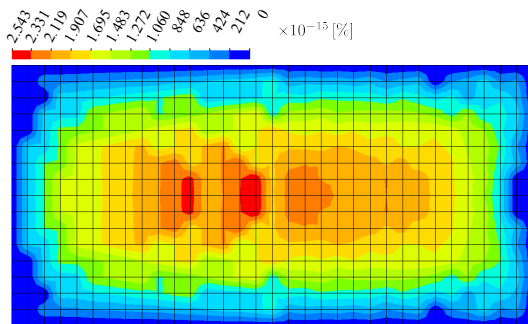


Figura 106: Mapa de $|er|$ para o deslocamento v para FEM.

Uma avaliação mais detalhada comparando os erros devidos ao EbFVM e ao FEM, será discutida na próxima secção.

4.2.3.5 Comparação entre Mapas de Erros Obtidos pelo EbFVM e pelo FEM

Esta secção destina-se a comparar os erros oriundos da solução pelo EbFVM e pelo FEM. Serão mostrados os mesmos mapas de erros da secção anterior, para os quatro casos com diferentes condições de contorno, porém na comparação dos erros de cada deslocamento, será utilizada a faixa de valores de erros do método que apresentou os menores erros. Nesta análise também será considerado apenas o valor absoluto do erro relativo, $|er_\phi|$, mesmo quando este não for indicado.

Nos gráficos de análise que se seguem (páginas 162 a 165), as regiões em branco estão com os valores acima da faixa representada na legenda, portanto indicando erros mais elevados. As condições de contorno para cada grupo de gráficos são nomeadas da seguinte maneira:

- CC1 – Para deslocamento prescrito na face direita e as demais faces com força prescrita;
- CC2 – Para deslocamento prescrito na face direita e esquerda e força prescrita nas faces superior e inferior;
- CC3 – Deslocamento prescrito na face direita, esquerda e inferior e a face superior com força prescrita;
- CC4 – Deslocamento prescrito em todas as faces.

Portanto, os gráficos são apresentados numa sequência que parte de um menor número de nós sujeito a CC com deslocamento prescrito até a totalidade de nós da fronteira sujeita a deslocamento prescrito.

PARA CC1

A Fig. 111 na página 162 mostra que os menores erros para u são por conta do FEM o qual atinge o erro máximo de 0,6237% e que para o EbFVM os erros são maiores em grande parte do domínio, atingindo o máximo de 1,576%. A região branca que ultrapassa a faixa de valores é verificada para o EbFVM, e esta vai desde 0,6237% até 1,576%.

Para v os menores erros são por conta do FEM que atinge o erro máximo de 0,2046% e o EbFVM apresenta maiores erros em grande parte do domínio, atingindo o máximo de 0,4499%. A região branca que ultrapassa a faixa de valores, é verificada para o EbFVM, a qual vai des-

de 0,2046 % até 0,4499 %.

Na Tab. 11, são listadas para cada método: as faixas de valores, $[er_{inf}; er_{sup}]$, os valores de variação do erro, V_{ermax} , sobre o erro máximo er_{max} e a percentagem (aproximada) de região branca sobre a área total, R_{acima} . Onde er_{inf} é o erro relativo inferior, o qual sempre será zero, er_{sup} é o erro relativo superior, o qual varia de acordo com o método utilizado. O valor de V_{ermax} é determinado através da equação

$$V_{ermax} = \frac{er_{sup}}{er_{max}} \times 100 \quad (113)$$

e o valor de R_{acima} através de

$$R_{acima} = \frac{A_{bco}}{A_{Total}} \times 100, \quad (114)$$

onde A_{bco} e A_{Total} são a área branca aproximada e área total respectivamente.

PARA CC2

A Fig. 112 na página 163 mostra que os menores erros para u são por conta do FEM o qual atinge o erro máximo de 0,04397 % e que para o EbFVM os erros são maiores em grande parte do domínio, atingindo o máximo de 0,1962 %. A região branca que ultrapassa a faixa de valores é verificada para o EbFVM e esta vai desde 0,04397 % até 0,1962 %.

Para v , os menores erros são por conta do FEM, atingindo o erro máximo de 0,03829 % e o EbFVM apresenta maiores erros em uma região próxima da face direita atingindo o máximo de 0,1710 %. A região branca que ultrapassa a faixa de valores é verificada para o EbFVM, a qual vai desde 0,03829 % até 0,1710 %. A Tab. 12 mostra um resumo destes valores entre outros.

PARA CC3

A Fig. 113 na página 164, mostra que os menores erros para u são por conta do FEM, o qual atinge o erro máximo de 0,1533 % e que para o EbFVM os erros são maiores em uma pequena região próxima da face direita atingindo o máximo de 0,6842 %. A região branca que ultrapassa

a faixa de valores é verificada para o EbFVM, e esta vai desde 0,1533 % até 0,6842 %.

Para v , os menores erros são por conta do FEM, que atinge o erro máximo de 0,01460 %. O EbFVM apresenta maiores erros na região próxima da face direita atingindo o máximo de 0,06526 %. A região branca que ultrapassa a faixa de valores é verificada para o EbFVM, a qual vai desde 0,01460 % até 0,06526 %. A Tab. 13 mostra um resumo destes valores.

Tabela 11: Resumo para análise de erros utilizando CC1.

	$er_{inf}[\%]$	$er_{sup}[\%]$	$V_{ermax}[\%]$	$R_{acima}[\%]$
u				
EbFVM	0,0	1,576	100,0	2,9
FEM	0,0	0,624	39,6	0,0
er_{max}		1,576		
v				
EbFVM	0,0	0,4499	100,0	91,8
FEM	0,0	0,2046	45,5	0,0
er_{max}		0,4499		

Tabela 12: Resumo para análise de erros utilizando CC2.

	$er_{inf}[\%]$	$er_{sup}[\%]$	$V_{ermax}[\%]$	$R_{acima}[\%]$
u				
EbFVM	0,0	0,19620	100,0	45,4
FEM	0,0	0,04397	22,4	0,0
er_{max}		0,19620		
v				
EbFVM	0,0	0,17100	100,0	8,2
FEM	0,0	0,03829	22,4	0,0
er_{max}		0,17100		

Tabela 13: Resumo para análise de erros utilizando CC3.

	$er_{inf} [\%]$	$er_{sup} [\%]$	$V_{ermax} [\%]$	$R_{acima} [\%]$
<i>u</i>				
EbFVM	0,0	0,6842	100,0	2,7
FEM	0,0	0,1533	22,4	0,0
er_{max}		0,6842		
<i>v</i>				
EbFVM	0,0	0,06526	100,0	10,4
FEM	0,0	0,01460	22,4	0,0
er_{max}		0,06526		

PARA CC4

A Fig. 114 na página 165, mostra que os menores erros para u são por conta do EbFVM, o qual atinge o erro máximo de $2,198 \cdot 10^{-12} \%$ e que para o FEM os erros são maiores em grande parte do domínio atingindo o máximo de $12,85 \cdot 10^{-12} \%$. A região branca que ultrapassa a faixa de valores é verificada para o FEM, e esta vai desde $2,198 \cdot 10^{-12} \%$ até $12,85 \cdot 10^{-12} \%$.

Tabela 14: Resumo para análise de erros utilizando CC4.

	$er_{inf} [\%]$	$er_{sup} [\%]$	$V_{ermax} [\%]$	$R_{acima} [\%]$
<i>u</i>				
EbFVM	0,0	2,198E-12	17,1	0,0
FEM	0,0	1,285E-11	100,0	38,7
er_{max}		1,285E-11		
<i>v</i>				
EbFVM	0,0	8,008E-13	31,5	0,0
FEM	0,0	2,543E-12	100	74,0
er_{max}		2,543E-12		

Para v os menores erros são por conta do EbFVM que atinge o erro máximo de $0,8008.10^{-12} \%$ e o FEM, *considerando que os nós na fronteira são com deslocamento prescrito*, apresenta maiores erros praticamente na totalidade do domínio atingindo o máximo de $2,543.10^{-12} \%$. A região branca que ultrapassa a faixa de valores é verificada para o FEM, a qual vai desde $0,8008.10^{-12} \%$ até $2,543.10^{-12} \%$. A Tab. 14 mostra o resumo destes valores.

VISUALIZAÇÃO GRÁFICA DE V_{ermax} E R_{acima}

De maneira a resumir os valores e suas comparações, os gráficos apresentados nas figuras 107 e 108, mostram o comportamento dos valores da variação do erro, V_{ermax} , sobre o erro máximo er_{max} , e a porcentagem de região branca sobre a área total, R_{acima} , respectivamente.

A V_{ermax} deve ser interpretada da seguinte maneira: O método com o maior erro (er_a) apresenta $V_{ermax} = 100 \%$ e o outro método, se tiver erro máximo (er_b) menor que o primeiro, apresenta $V_{ermax} = (er_b/er_a) \times 100 [\%]$. Desta forma V_{ermax} é uma comparação percentual entre os erros relativos máximos dos dois métodos.

Portanto, observando a Fig. 107, vê-se que para os três primeiros casos de CC, onde há forças prescritas, o EbFVM predomina com respeito ao erro máximo, porém quando todas as CC são de deslocamento prescrito ocorre uma inversão e o FEM passa a apresentar o maior erro percentual.

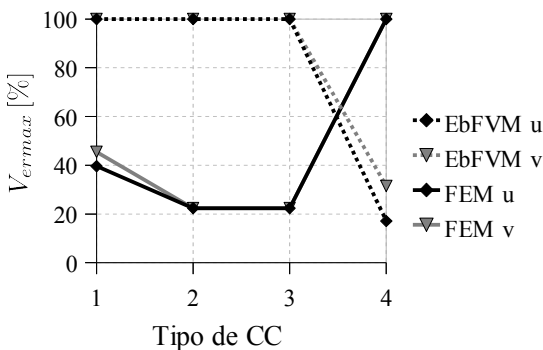


Figura 107: Variação do erro sobre o erro máximo.

A R_{acima} deve ser interpretada da seguinte maneira: Determinado método apresenta erro acima do máximo erro do outro método, porém a

região que possui erro acima pode ser apenas alguns nós ou a totalidade dos nós. Caso esta região, seja apenas parte do domínio, o valor de $R_{acima} \in (0; 100) \%$, caso esta região seja a totalidade do domínio, $R_{acima} = 100 \%$. Em outras palavras, para o método de maior erro, R_{acima} indica qual a percentagem do domínio que apresenta erros acima do erro máximo.

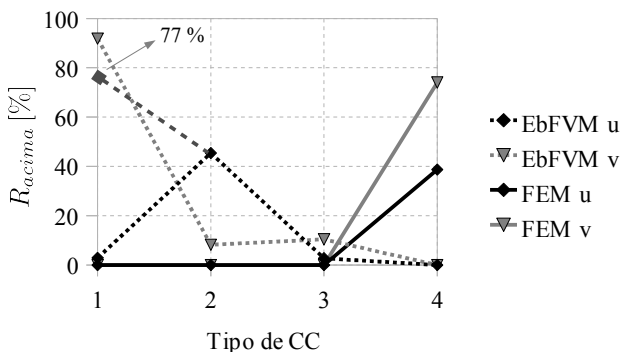


Figura 108: Percentagem de região branca sobre área total.

Portanto, a Fig. 108 mostra que nos três primeiros casos de CC que possuem força prescrita o EbFVM sempre apresentou regiões com erros acima do máximo erro apresentado pelo FEM e no quarto caso, onde estão presentes apenas condições de contorno de deslocamento prescrita ocorre uma inversão e o FEM apresenta uma região significativa com erros acima do máximo erro do EbFVM.

Na mesma figura pode-se perceber que o EbFVM melhora sua performance à medida que menos condições de contorno de força são utilizadas. Uma exceção disso é o caso “EbFVM u” para “CC1”, que apresentou um R_{acima} pequeno quando comparado com o resultado para “EbFVM v”, porém ao se observar a Fig. 111 é visível que o “EbFVM u” na maior parte do domínio é tomado por erros que possuem valores maiores que 70% do valor máximo da faixa de valores plotados. Desta forma na Fig. 108 adicionou-se uma linha suplementar para indicar o valor de R_{acima} , caso fosse incluída esta região de erros elevados na região *branca*. Assim o valor de R_{acima} passaria para o valor indicado de 77%.

Assim sendo, com a finalidade de melhorar a visualização do comportamento de ambos os métodos, a Fig. 109, mostra em escala logarítmica o Erro Nodal Médio Quadrático, en_{MQ} , para cada componen-

te do deslocamento em cada condição de contorno. O en_{MQ} é uma medida média global e é determinado através da Eq. (115), onde ϕ_{num_i} e ϕ_{an_i} são a solução numérica e analítica respectivamente e n_{nptg} é o número total de nós.

$$en_{MQ} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_{nptg}} (\phi_{num_i} - \phi_{an_i})^2}{n_{nptg}}} \quad (115)$$

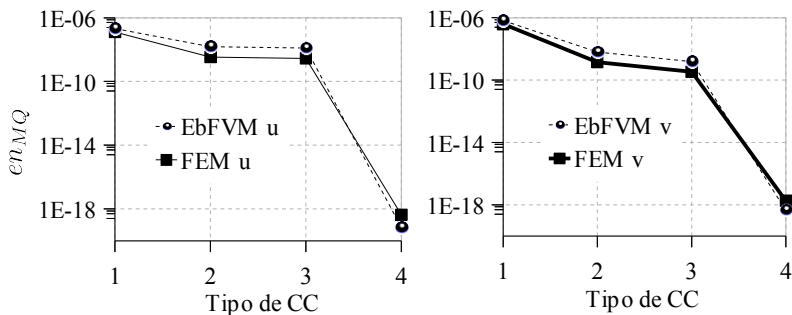


Figura 109: Comportamento do erro nodal médio quadrático para diferentes condições de contorno.

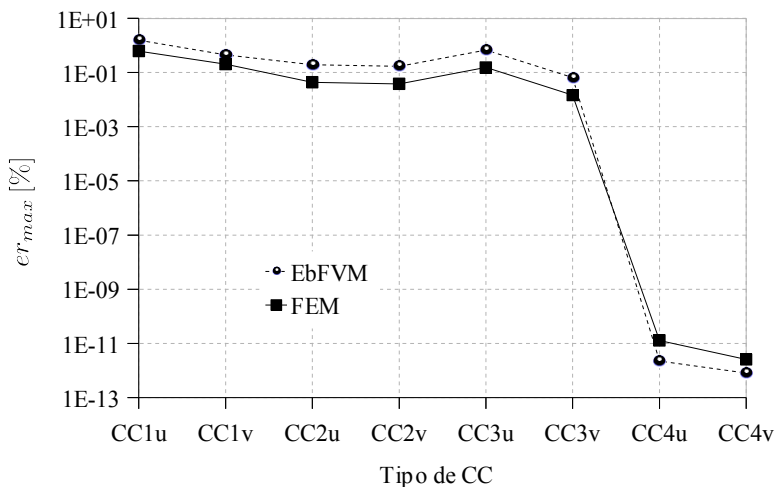


Figura 110: Erros relativos máximos para os deslocamentos nos dois métodos.

Os dois gráficos ilustram de maneira clara o comportamento da redução do erro conforme ocorre a redução das condições de contorno com força prescrita. Mostrando ainda que o valor do en_{MQ} é muito próximo entre os dois métodos, apresentando diferenças pouco significativas.

Os erros relativos baixos eram esperados para a CC4, pois os deslocamentos prescritos nas fronteiras são a solução exata do problema, ficando assim, a cargo do método descrever apenas o interior do domínio. Um resumo dos erros relativos máximos, er_{max} , são mostrados na Fig. 110. Percebe-se que quando há somente CC de deslocamento prescrito os erros são da ordem de 10^{-12} e quando há presença de forças prescritas, os erros passam à ordem aproximada de 10^0 , ou seja, $10^{12} \times$ maior.

Por fim, com estas análises pode-se ver que *as diferenças entre os dois métodos, ao menos em termos de erros relativos sobre os deslocamentos, é pequena e ambos possuem um comportamento semelhante com relação ao tipo de CC imposta*. Também, a influência das condições de contorno com força prescrita são muitíssimo significativas para serem ignoradas e merecem uma atenção maior em trabalhos futuros.

RELAÇÃO ENTRE OS ERROS RELATIVOS

As figuras 95 e 97, apresentam grande similaridade na *distribuição* dos valores absolutos dos erros relativos. Portanto, uma análise mais detalhada sobre a existência de uma relação entre os erros é de interesse. Os erros mostrados nesta secção, também foram calculados com o auxílio da Eq. (108) e a relação entre eles é determinada através da equação

$$r_{\phi} = \frac{er_{\phi EbFVM}}{er_{\phi FEM}}, \quad (116)$$

onde r representa a relação (razão), ϕ representa u ou v e er o erro relativo.

Para a análise, plotou-se os gráficos dos erros relativos, para as componentes u e v do campo de deslocamento, assim como os gráficos da relação entre os erros relativos. Estes gráficos foram plotados em relação aos nós, sendo estes contados em sequência da face esquerda para à direita, de baixo para cima, iniciando em 1 (canto inferior esquerdo) e terminando em 561 (canto superior direito), assim, cada trecho bem definido de pontos nos gráficos, referem-se a uma linha de nós no domínio Ω_{FE} . Isto foi feito para o EbFVM e para o FEM-Galerkin, desde a CC1

até a CC4.

As figuras 115 até 120 referem-se a:

- Fig. 115 – CC1 – (a) Erros relativos para u e (b) para v ;
- Fig. 116 – CC2 – (a) Erros relativos para u e (b) para v ;
- Fig. 117 – CC3 – (a) Erros relativos para u e (b) para v ;
- Fig. 118 – CC4 – (a) Erros relativos para u e (b) para v ;
- Fig. 119 – Razão entre erros relativos – (a) CC1 e (b) CC2;
- Fig. 120 – Razão entre erros relativos – (a) CC3 e (b) CC4;

O gráfico da Fig. 115, mostra que os erros relativos, tanto do EbFVM quanto do FEM, possuem valores relativamente “constantes” ao longo do domínio, ou seja, estão confinados em uma pequena faixa, conforme destacado na figura. Sofrendo variações significativas nas regiões próximas da extremidade onde os deslocamentos são muito pequenos. Essa observação é válida para situações semelhantes que ocorrem nas figuras 116 e 117.

Além disso, nas figuras de 115 a 117, fica claro que existe uma **relação** razoavelmente “constante”, entre os erros relativos do EbFVM e do FEM. Onde as exceções ocorrem, é geralmente próximo da fronteira, onde se tem a influência das condições de contorno. Essa situação não é evidenciada na Fig. 118, pois nesta os erros são extremamente baixos, portanto grandemente influenciados pelos erros de CPU. Esta relação foi computada conforme a Eq. (116) e é mostrada nos gráficos das figuras 119 e 120, para o caso CC1, CC2, CC3 e CC4.

Com exceção do gráfico da Fig. 120b (caso CC4), todos os demais, destacam a presença de uma **razão razoavelmente constante entre os erros relativos** e isso ocorre praticamente em todo o domínio. Exceções disto ocorrem nas fronteiras, devido principalmente ao tipo de CC.

Na Fig. 119a (CC1), a razão para os erros relativos no deslocamento u é próxima de 2,5 e para o deslocamento v , fica geralmente entre 2,0 e 2,4. Na Fig. 119b (CC2), a razão apresenta-se mais constante que para o caso CC1 e todos os valores, com raras exceções, estão entre 4,45 e 4,50 para u e para v . Apesar da razão ter aumentado, os erros relativos para CC2 são de 6 a 8× menores que os erros relativos para a CC1. A Fig. 120a (CC3), também apresenta valores entre 4,45 e 4,50, com exceção dos nós próximos da superfície superior, sujeita a força prescrita.

Esta análise da razão entre os erros relativos dos dois métodos, deixa claro que: apesar dos melhores resultados obtidos pelo FEM, os resultados do EbFVM são coerentes com estes e os “acompanham” sem-

pre mantendo uma razão razoavelmente fixa para quase todo domínio.

As análises feitas nestas figuras, levam a observar também o comportamento do erro no deslocamento u e v . Erro este calculado conforme a Eq. (78). Não será feita uma análise detalhada sobre estes erros.

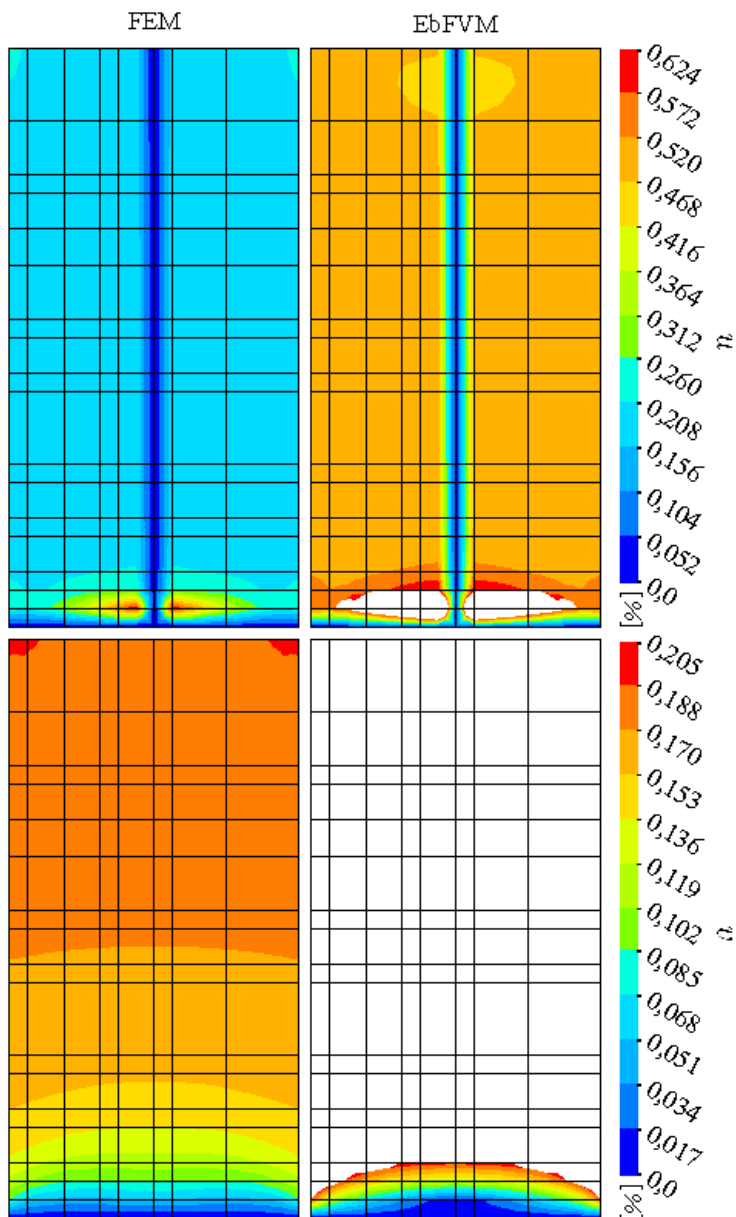


Figura 111: Comparação entre mapas de erros relativos numa mesma faixa de valores para CC1.

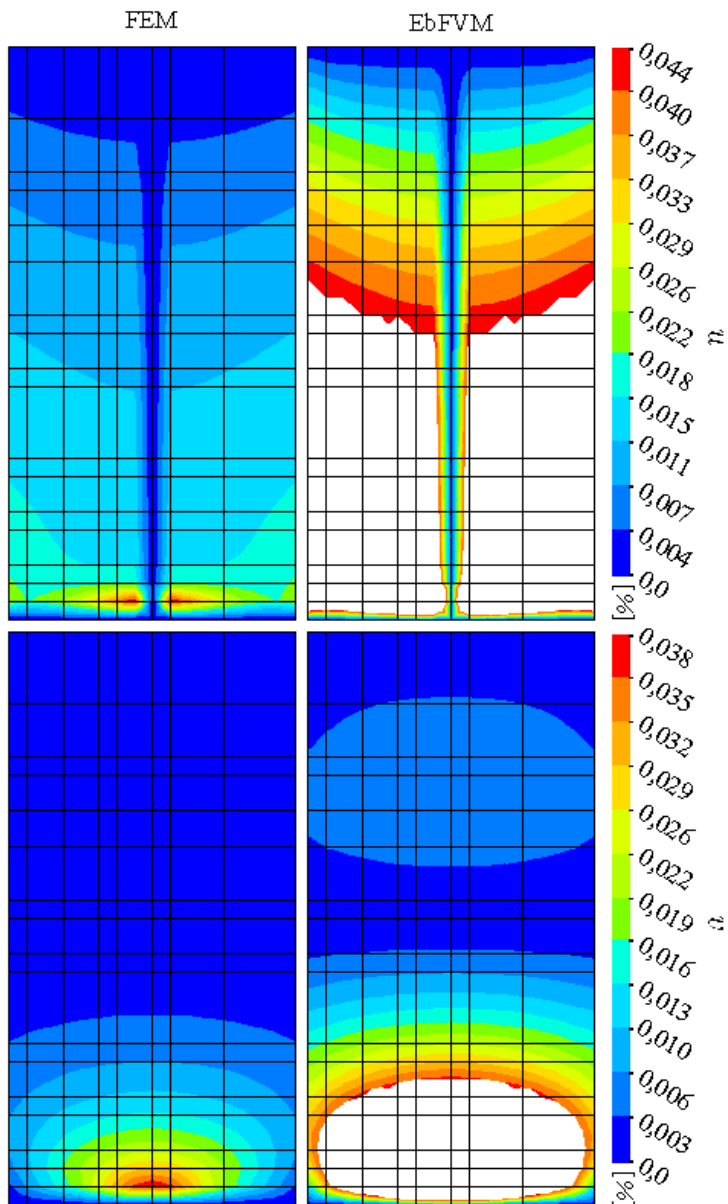


Figura 112: Comparação entre mapas de erros relativos numa mesma faixa de valores para CC2.

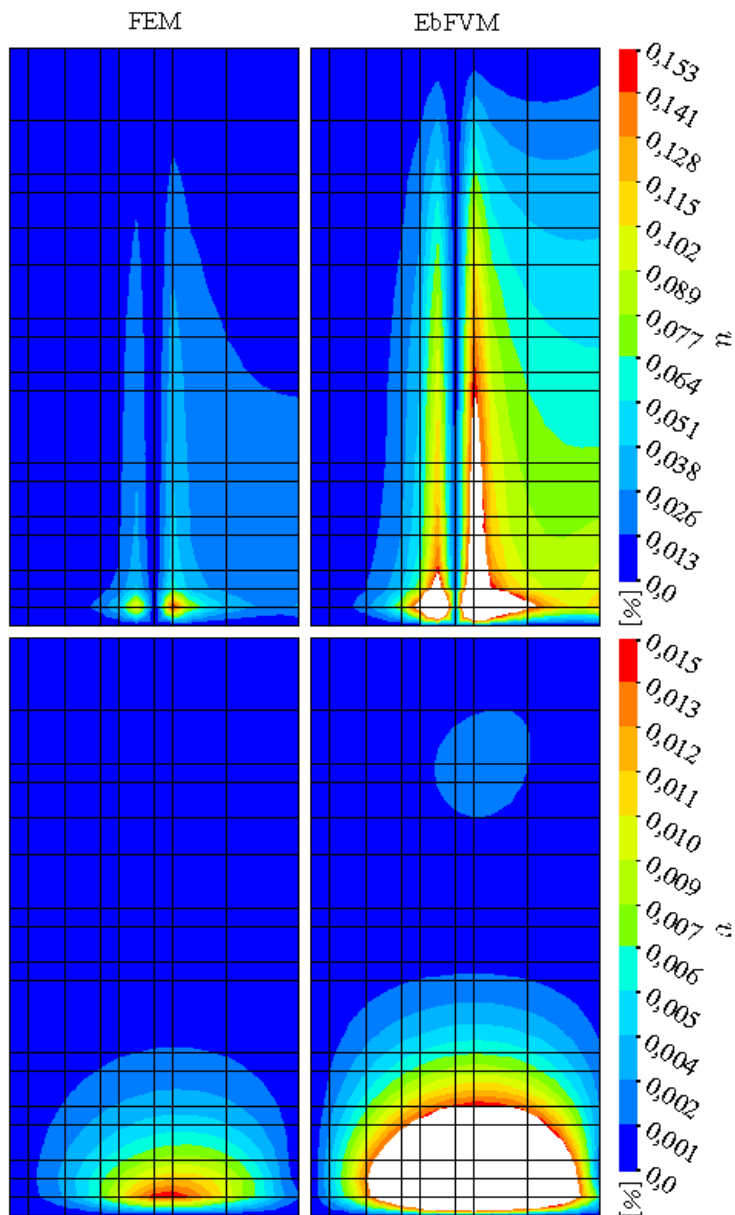


Figura 113: Comparação entre mapas de erros relativos numa mesma faixa de valores para CC3.

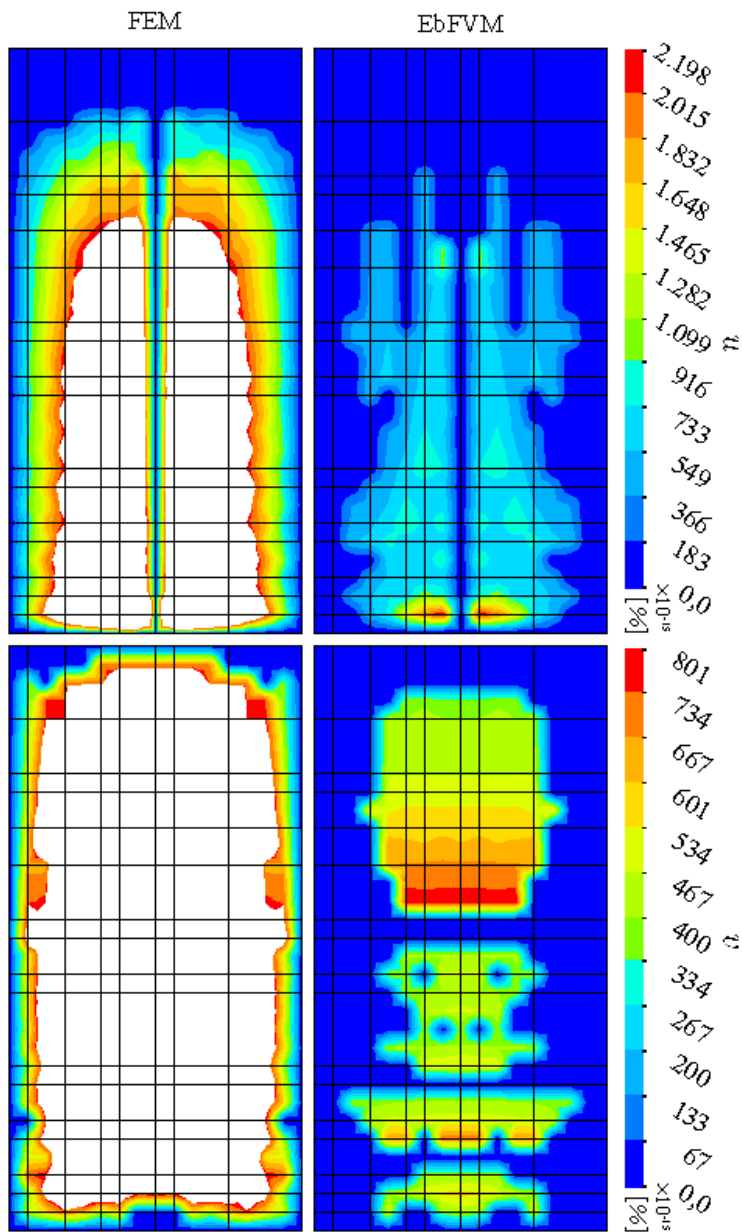


Figura 114: Comparação entre mapas de erros relativos numa mesma faixa de valores para CC4.

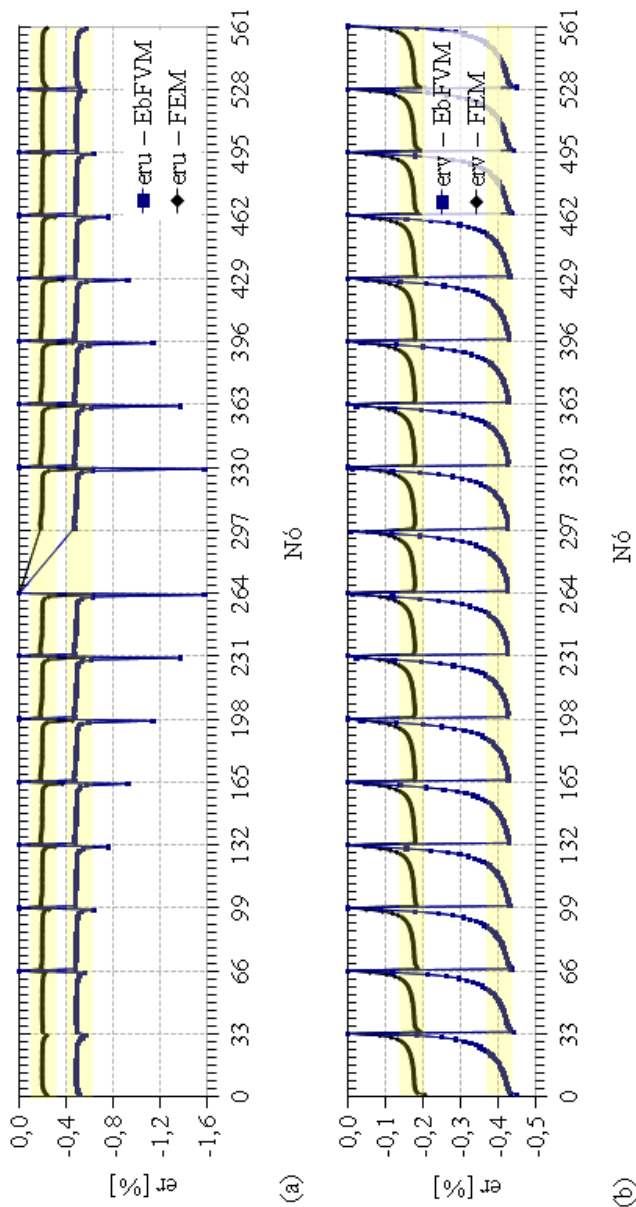


Figura 115: Distribuição de erro relativo sobre os nós para a CC1. (a) Erro relativo para u e (b) para v .

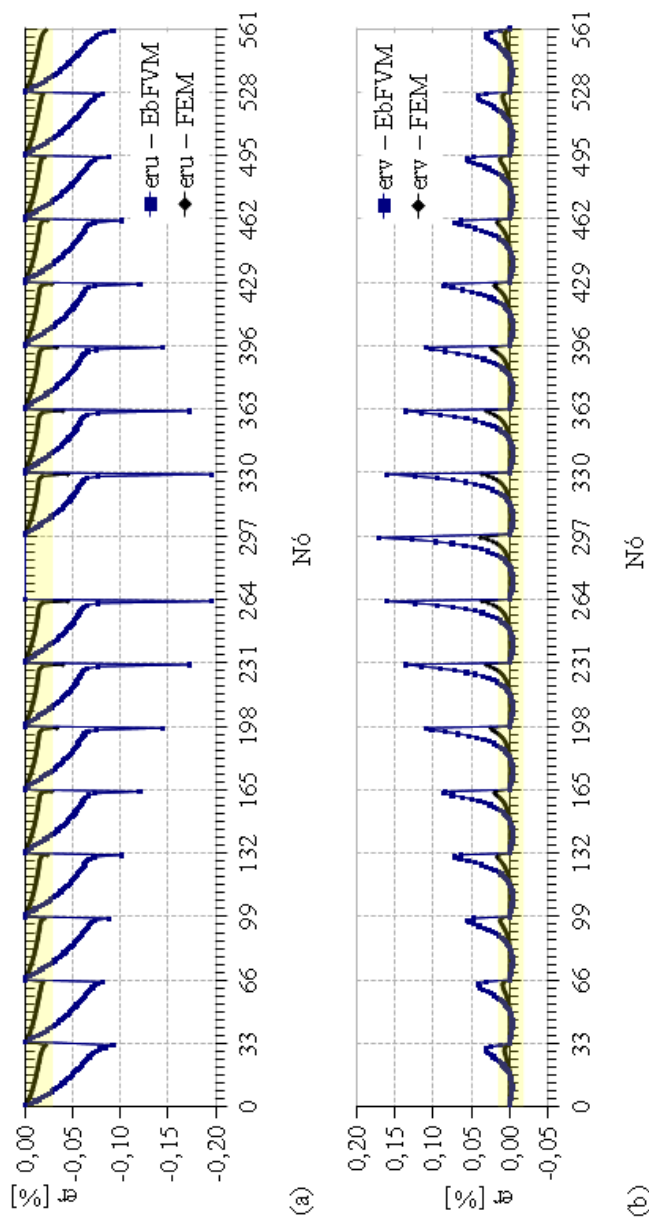


Figura 116: Distribuição de erro relativo sobre os nós para a CC2. (a) Erro relativo para u e (b) para v .

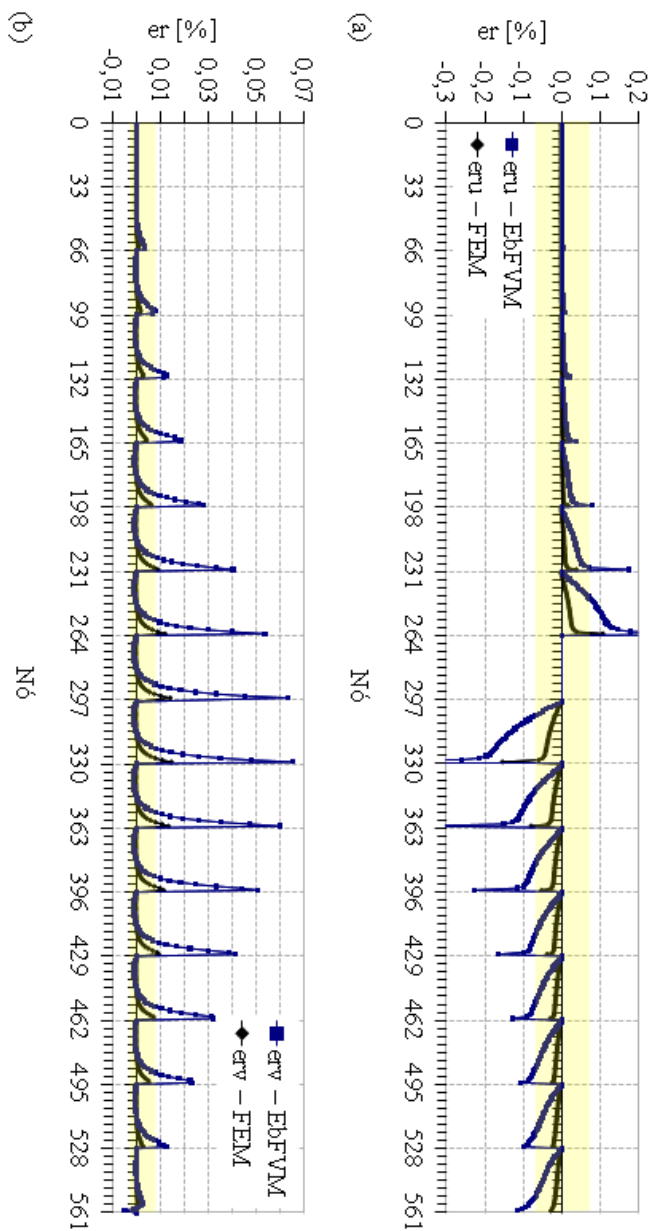


Figura 117: Distribuição de erro relativo sobre os nós para a CC3. (a) Erro relativo para u e (b) para v .

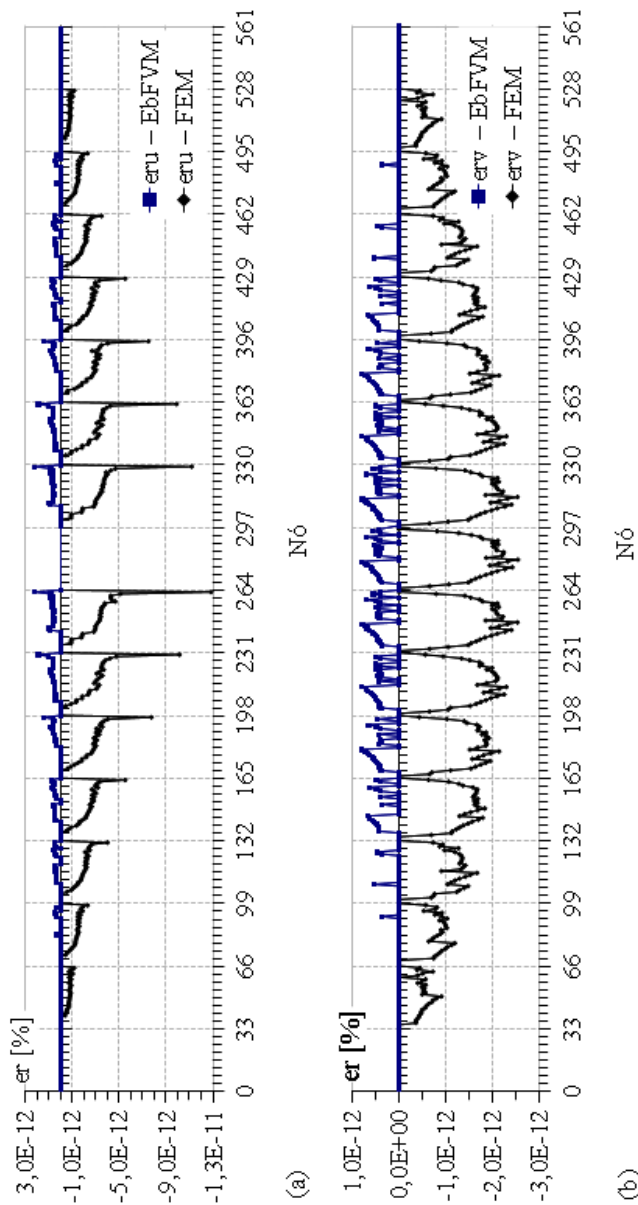


Figura 118: Distribuição de erro relativo sobre os nós para a CC4. (a) Erro relativo para u e (b) para v .

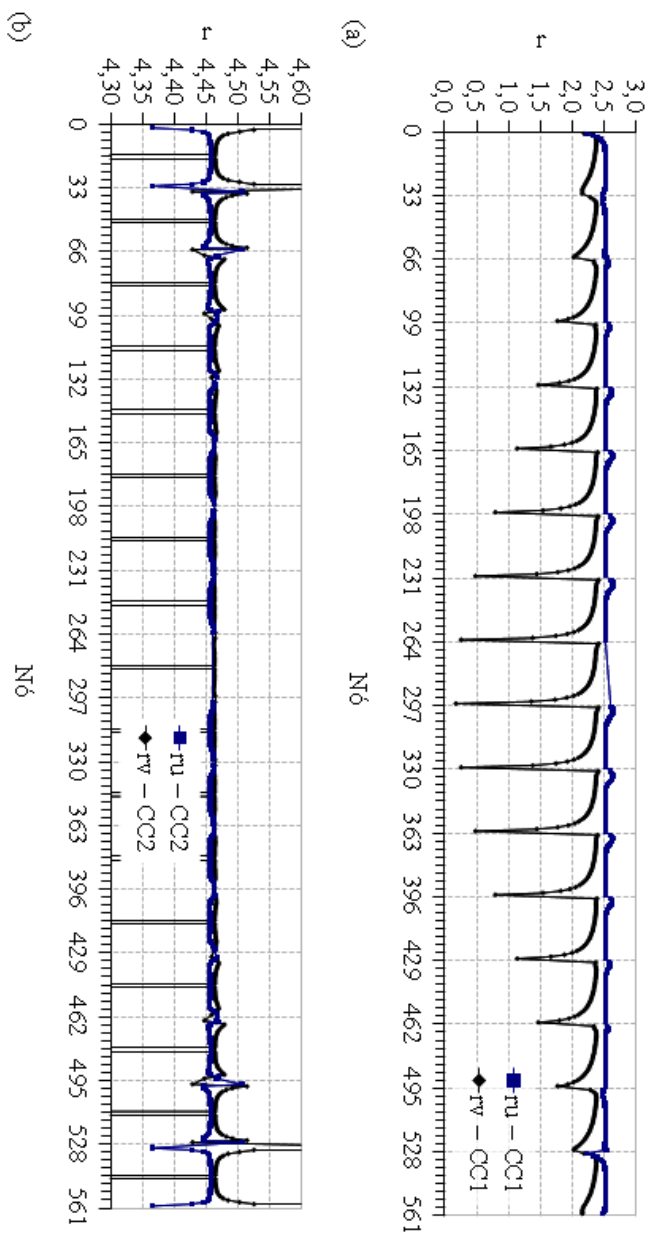


Figura 119: Distribuição da relação dos erros relativos sobre os nós para (a) CC1 e (b) CC2.

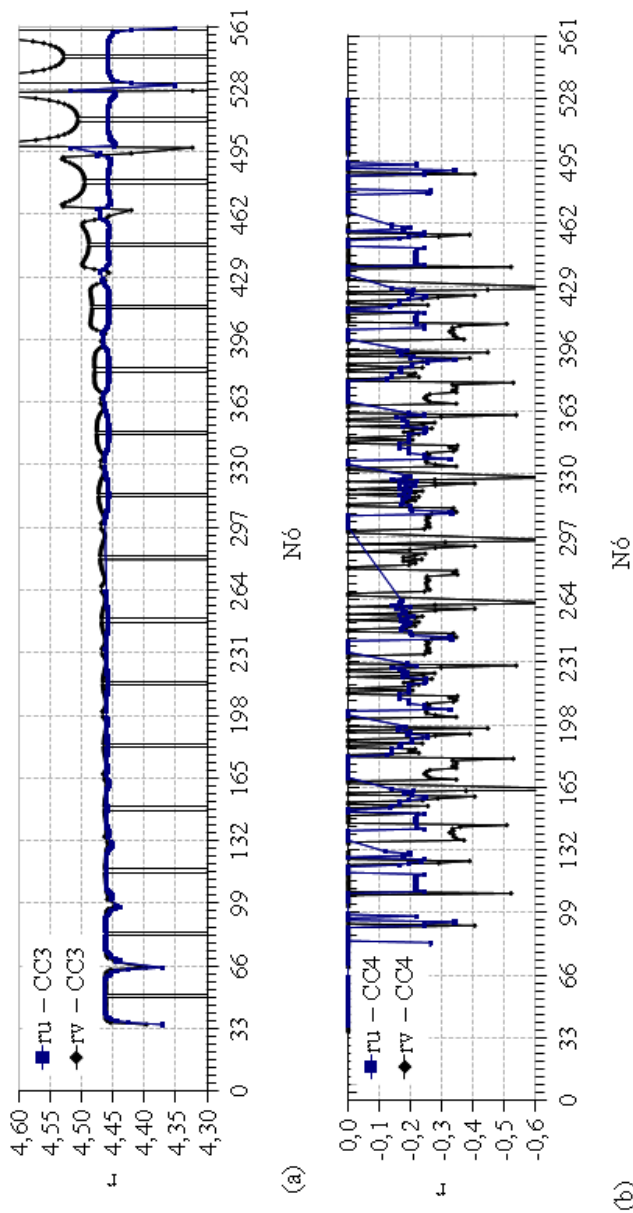


Figura 120: Distribuição da relação dos erros relativos sobre os nós para (a) CC3 e (b) CC4.

4.2.4 PLACA PLANA COM ORIFÍCIO SUJEITA A TRAÇÃO⁵⁰

É comum encontrar em engenharia casos em que elementos de pequena espessura e sujeitos a tração devem receber um orifício transversal, diminuindo com isso a secção resistente do mesmo e consequentemente provocando o aparecimento de pontos com concentração de tensões. Alguns desses problemas podem ser aproximados por um modelo de EPT, como por exemplo uma chapa de aço de espessura $e = 0,1\text{ mm}$, altura, $H = 3,0\text{ m}$ e largura, $L = 2,0\text{ m}$.

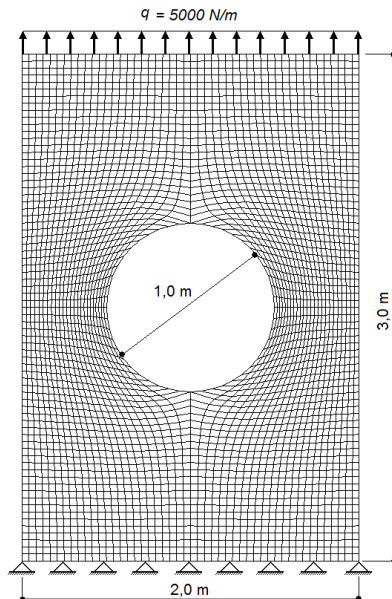


Figura 121: Geometria e carregamento de chapa com orifício sujeita a tração.

Na região central desta chapa existe um furo transversal de raio $r = 0,5\text{ m}$. A malha estruturada com 48×72 elementos, a geometria e as condições de contorno são mostradas na Fig. 121.

Para este tipo de problema, normalmente o que se procura são os pontos onde ocorre concentração de tensão. O campo de tensão normalmente é obtido por um pós processamento dos valores de deslocamento, porém neste teste inicial as tensões não foram determinadas.

A solução foi obtida utilizando o EbFVM e os campos de deslocamentos u e v é mostrado na Fig. 123 e 122 respectivamente. Para este tipo de problema, normalmente o interesse é sobre as tensões na parte interna do furo, regiões direita e esquerda do furo e próximas da linha horizontal central, pois nestas regiões as tensões são mais elevadas. Os campos de deslocamentos apresentados, mostram que os gradientes de deslocamento são um pouco maiores nessas regiões, que portanto acarreta maiores deformações e consequentemente tensões. Os campos se apresentaram simétricos como esperado.

Por ser um teste inicial, a malha foi gerada de forma simplificada, acarretando elementos bastante distorcidos e pobre razão de aspecto. Porém o comportamento geral foi conforme esperado.

⁵⁰ Esta análise foi apresentada no XXIX CILAMCE (FILIPPINI et. al, 2008).

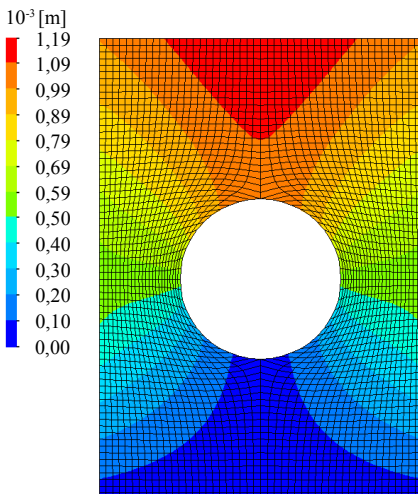


Figura 122: Mapa de deslocamento v .

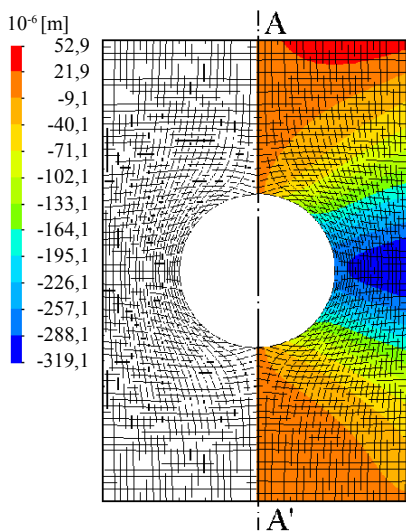


Figura 123: Mapa de deslocamento u .

4.2.5 PLACA PLANA COM CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES DEVIDO A UM ORIFÍCIO⁵¹

O caso da secção 4.2.4, aborda apenas aspectos iniciais do problema de concentração de tensões. Nesta secção os resultados de um problema de concentração de tensões são comparados com valores analíticos. O problema analítico refere-se a uma placa fina com largura e altura infinita.

Nesta placa tem-se um orifício circular de raio pequeno, $1,0\text{ mm}$ em relação a altura e largura da chapa ($32 \times 32\text{ m}$). Esta grande diferença é para garantir que o caso analítico seja bem representado pelo modelo numérico. O critério para a escolha destas proporções foi obter-se, no ponto mais afastado do orifício, a tensão $\sigma_{yy} = 0,1\text{ Pa}$ que conforme o modelo teórico no infinito deve ser nula. Esse valor é baixo quando comparado com a tensão aplicada na placa, $\sigma_{xx} = 100\text{ MPa}$. Essa diferença de $10^9 \times$, garante que os erros devidos à aproximação com o modelo teórico sejam muito próximos dos erros de CPU que ocorrem entre o 14º e 15º algarismos significativos, tendo portanto, pouca influência sobre os resultados obtidos.

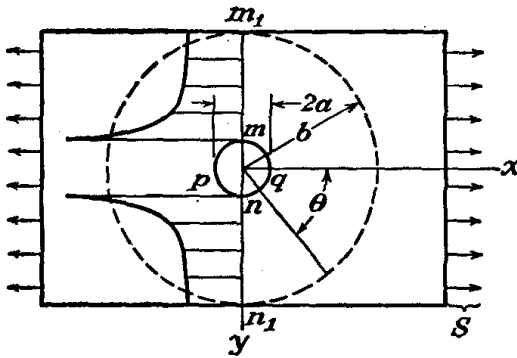


Figura 124: Placa com orifício (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970, p. 78).

A Fig. 124 ilustra este problema. Uma solução analítica em coordenadas polares é apresentada por Timoshenko e Goodier (1970)

⁵¹ Esta análise foi apresentada no XXX CILAMCE (FILIPPINI et. al, 2009).

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \end{cases} \quad (117)$$

Nesta solução normalmente o mais importante é a tensão máxima que se atinge ao redor do orifício. Com uma breve análise da Eq. (117) observa-se que a máxima tração ocorre nos pontos m e n , onde o ângulo θ é $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ respectivamente e cujo valor é $(\sigma_\theta)_{max} = 3S$, onde S é a tensão de tração aplicada na chapa conforme a figura. A máxima compressão ocorre nos pontos p e q , onde o ângulo θ é 0 e π respectivamente e cujo valor é $(\sigma_\theta)_{min} = -S$.

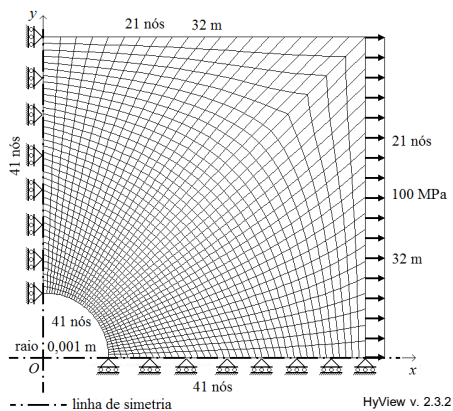


Figura 125: Geometria, malha e condições de contorno aproveitando a simetria do problema. O desenho está fora de escala.

A Fig. 125 é uma *representação esquemática* da malha estruturada utilizada, visto que o furo de 1 mm de raio é muito menor que as dimensões da chapa de 32 m . Aproveitou-se os dois planos de simetria (xOz e yOz) reduzindo assim o volume de dados para $\frac{1}{4}$ do inicial. A figura também apresenta a geometria e as CC do problema.

O problema foi resolvido obtendo-se os campos de deslocamentos e de tensões. As tensões foram obtidas pela técnica CDN.

Para os campos de deslocamentos a Fig. 126a e 126c apresentam os campos para u e v respectivamente. Como as dimensões da chapa são grandes, o pequeno orifício não gera perturbação visível nestes campos

quando se olha todo domínio. Assim conforme esperado, as distribuições são lineares.

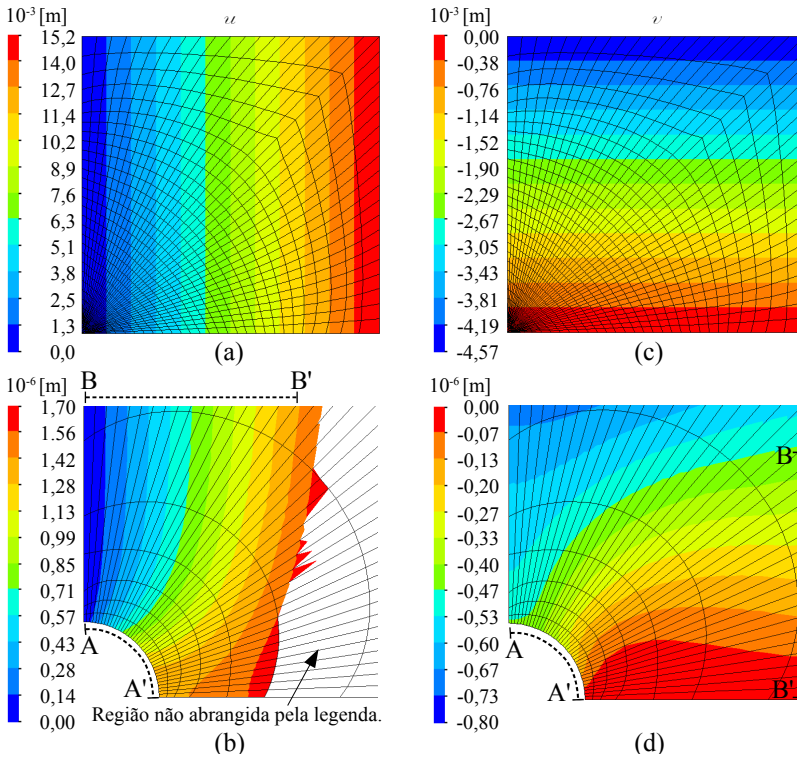


Figura 126: Mapa de deslocamento: (a) e (b) na direção Ox e (c) e (d) na direção Oy . (b) e (d) é para a região próxima do orifício.

Por outro lado, os campos de deslocamentos nas figuras 126b e 126d referem-se aos deslocamentos u e v na região do orifício, o qual é $32.000 \times$ menor que as dimensões maiores da chapa. Nestas figuras, conforme esperado, pode-se ver o comportamento não linear nos deslocamentos. Além disso quando se compara as linhas AA' com as BB' , percebe-se que longe do orifício (BB') a taxa de variação do deslocamento ao longo da linha é menor que a taxa na linha próxima (AA') do orifício. Isso explica o aumento significativo nas tensões próximas do orifício e mostra que o método é sensível a pequenas variações desde que a malha seja adequada.

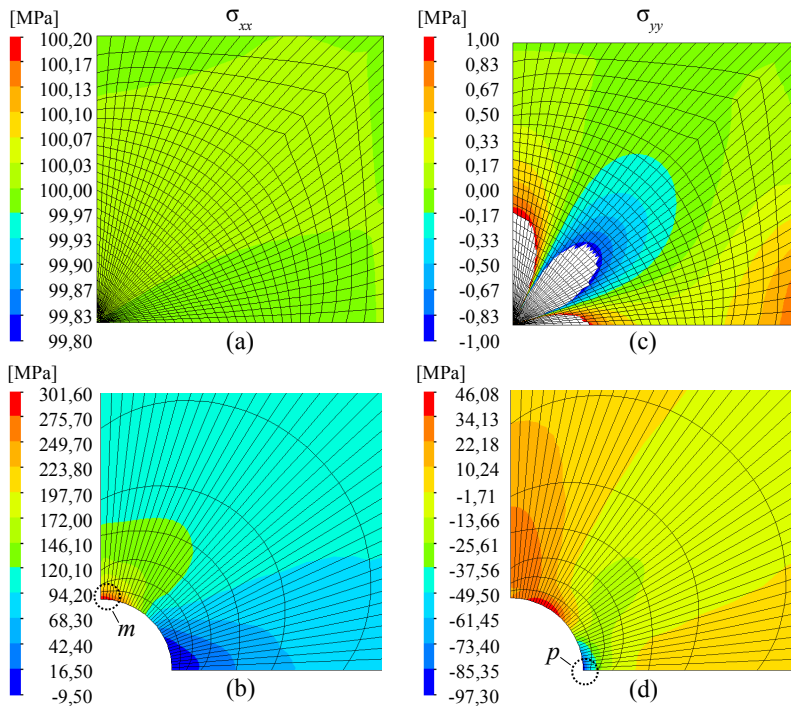


Figura 127: Mapa de tensão (a) e (b) σ_{xx} e (c) e (d) σ_{yy} . (b) e (d) é para a região próxima do orifício. Mapas obtidos com o EbFVM

Na Fig. 127c pode-se ver que as tensões σ_{yy} são da ordem da unidade de Pascal na maior parte da chapa. Próximo da borda superior assume valores na ordem dos décimos de Pascal, motivo pelo qual foi escolhida a fronteira à $32m$ do orifício, o que garante o cumprimento das hipóteses do modelo analítico pelo modelo numérico. Pode-se ainda ver que os efeitos do orifício visivelmente se propagam por boa parte da chapa, isto coincide com a teoria sobre concentração de tensões, ou seja, uma pequena descontinuidade no interior de um meio contínuo pode sujeitá-lo a altas tensões nas regiões vizinhas da falha, que neste caso, conforme valores teóricos, a maior tensão de tração que deverá aparecer devido à descontinuidade é $300 MPa$, ou seja, $3 \times$ maior que a tensão imposta externamente. Da mesma forma para σ_{xx} na Fig. 127a, o resultado numérico atende as hipóteses do modelo analítico, as quais afirmam que para regiões suficientemente afastadas do orifício, as tensões são iguais as impostas no “infinito”, neste caso $100 MPa$.

A Fig. 127b, apresenta a distribuição de tensões σ_{xx} na região vizinha ao orifício, é visível a distorção que o campo de tensões sofre em virtude da presença do orifício, mesmo este sendo minúsculo ante as dimensões da chapa. Seu valor atinge o máximo no ponto m , o que condiz com a teoria. Por outro lado a Fig. 127d apresenta a distribuição de tensões σ_{yy} na região vizinha ao orifício, seu valor atinge um máximo na compressão no ponto q , o que condiz com o modelo teórico.

A Tab. 15 contém os valores analíticos das tensões, os valores numéricos e os respectivos erros relativos sobre os pontos m e q . Estes erros são calculados pela Eq. (108). Os erros relativos são baixos, principalmente para o valor crítico de tração que apresenta um erro de 0,53% para os resultados do EbFVM e 1,23% para o FEM.

Deve-se também levar em conta as proporções do problema, que possui ordem de grandeza na casa das dezenas de metros e o “defeito” (orifício) na casa dos milésimos de metros, isto também gera influência no cômputo dos deslocamentos e conseqüentemente das tensões, outro item, é a razão de aspecto pobre dos elementos o que também pode influenciar os resultados. Mesmo assim, os resultados foram **excelentes**, e apesar de ser um problema que visa aplicação em engenharia, vem também corroborar com a validação do modelo e da aplicação da técnica de volumes finitos na área de elasticidade.

Tabela 15: Valores da tensão máxima de tração e de compressão e seus erros.

Tensão	Analítico*	EbFVM* er [%]	FEM* er [%]
σ_{xx} em m	300,00	301,59	0,53
σ_{yy} em q	-100,00	-97,30	-2,70

* Tensões em [MPa]

4.3 OUTROS ASPECTOS

4.3.1 COEFICIENTES GERADOS PELO EbFVM E PELO FEM-GALERKIN

Nesta secção é apresentada uma comparação algébrica e numérica dos coeficientes gerados pelos dois métodos. As comparações algébricas são feitas sobre as equações dos coeficientes obtidos para o FEM-Galerkin (148) e (147) e as obtidas para os coeficientes do EbFVM, (68) e (69). As comparações numéricas serão feitas tomando um simples problema teste.

COMPARAÇÃO ALGÉBRICA

Para esta comparação serão tomados apenas os coeficientes K_{xu}^n e b_x já que os demais são similares a estes. Quanto aos coeficientes K_{xu}^n , estes são mostrados nas equações (118) e (120) para o EbFVM e FEM-Galerkin respectivamente. Outro ponto importante é que para o EbFVM a integração utilizada é com 1 GP e para o FEM com 4 GP. De acordo com a Tab. 4, para o presente estudo, em nenhuma condição α_{fm} e β_{fm} são considerados simultaneamente, ou seja, sempre um dos dois será nulo, cancelando assim um dos termos dentro da integral, desta forma para simplificar a Eq. (118) será eliminado o termo com β_{fm} obtendo-se assim a Eq. (119).

$$K_{xu}^n = eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|f_m\|} [(b + 2C) y'_{r'} \phi'_{i'x} - C x'_{r'} \phi'_{i'y}] \alpha_{fm} + (b + 2C) y'_{s'} \phi'_{i'x} - C x'_{s'} \phi'_{i'y} \beta_{fm} \right\} dq \quad (118)$$

$$K_{xu}^n = eA \sum_{m=1}^2 \left\{ \int_0^{\|f_m\|} [(b + 2C) \phi'_{i'x} y'_{r'} - C \phi'_{i'y} x'_{r'}] \alpha_{fm} \right\} dq \quad (119)$$

$$K_{xu}^n = eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [(b + 2C) \phi'_{i'x} \phi'_{j'x} + C \phi'_{i'y} \phi'_{j'y}] \|J\| dr ds \quad (120)$$

As similaridades entre ambas são: O produto eA , os coeficientes $(b + 2C)$ e C e por fim as derivadas da função de deslocamento $\phi'_{i'x}$ e $\phi'_{i'y}$. Importante observar ainda para o coeficiente do EbFVM que o termo $y'_{r'}$ e/ou $x'_{r'}$ multiplicado por α_{fm} e dq corresponde ao jacobiano de transformação para **comprimento** similar a Eq. (184). No caso do FEM, este jacobiano corresponde a uma transformação de **área**, sendo dado pela Eq. (189).

Quanto a somatória com a integral simples para o EbFVM e a integral dupla para o FEM, tem-se que ter em mente que para ambos, os coeficientes são para o j -ésimo nó principal e o i -ésimo nó secundário. Assim para o EbFVM a composição da somatória das duas faces m e da integral, faz com que o polinômio seja avaliado **duas vezes** e para o FEM a integral (dupla) faz com que o polinômio seja avaliado **quatro vezes**. Isto é comentado com o intuito de alertar que haverá uma diferença entre os dois métodos no tempo de processamento de coeficientes. Por fim, a última diferença está em que o FEM possui a derivada da função peso, $\phi'_{j'x}$ e $\phi'_{j'y}$ as quais correspondem ao j -ésimo nó principal, que para o EbFVM assumiu o valor 1. Um resumo destas comparações algébricas está posto na Tab. 16.

Tabela 16: Comparação dos coeficientes K_{xu}^n gerados pelo EbFVM e FEM-Galerkin, um resumo.

	EbFVM	FEM-Galerkin
$eA, (b + 2C) e C$	Iguais	
$\phi_{i'x} e \phi_{i'y}^*$	Iguais	
Jacobiano	Comprimento $y'_r e/ou x'_r \times \alpha_{fm} dq$	Área $\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s}$
Polinômio é avaliado	2 vezes	4 vezes
$\phi_{j'x} e \phi_{j'y}^{**}$	Não possui	Possui

* Derivadas das funções de parametrização;

** Derivadas das funções peso.

Quanto a b_x , este é mostrado respectivamente para o EbFVM e para o FEM-Galerkin nas equações

$$b_x^n = (-1)e \int \int_{S_{svc_{jk}}} f_x \|J\| drds + F_{xPontual} + F_{xDistrib} \quad (121)$$

$$b_x^n = e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_j f_x \|J\| drds + F_{xPontual} + F_{xDistrib} \quad (122)$$

Para estes termos a comparação é simplificada e a principal diferença está na presença da função peso ϕ_j para o FEM. Outra diferença interessante é o termo (-1) presente para o EbFVM, o qual tem origem na dedução à partir das equações (46) e (47).

COMPARAÇÃO NUMÉRICA

A comparação algébrica é importante, porém um exemplo numérico, pode apresentar situações que algebricamente seriam mais difíceis de serem detectadas. Portanto, serão tomados dois exemplos para visualizar numericamente o que ocorre com os coeficientes numéricos de ambos os métodos. O primeiro teste envolve uma malha ortogonal e o segundo uma malha não ortogonal, mostradas na Fig. 128. Em ambos os testes serão utilizadas apenas condições de contorno de força prescrita, já que condições de deslocamento prescrito “cancelam” os coeficientes das linhas a que pertencem.

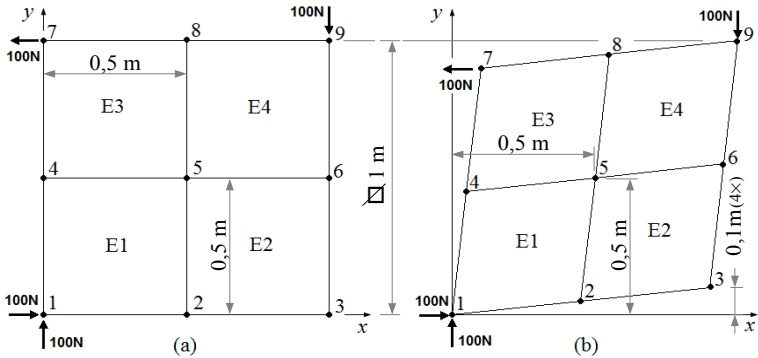


Figura 128: Caso com 4 elementos ortogonais (a) e distorcidos em (b) para análise de coeficientes.

Os coeficientes foram obtidos para o EPT, com espessura $e = 0,1 \text{ mm}$, módulo de *Young* 210 GPa e coeficiente de *Poisson* $0,3$. Os coeficientes obtidos para o EbFVM com malha ortogonal e não ortogonal, estão nas figuras 129 e 131 respectivamente e para o FEM nas figuras 130 e 132. Estes coeficientes são da ordem de 10^6 e unidade $[\text{N}/\text{m}]$. Os coeficientes das matrizes foram dispostos obedecendo à distribuição: $u_1, u_2, \dots, u_9, v_1, v_2, \dots, v_9$, de forma a facilitar a análise. Com relação a estes coeficientes é interessante observar, entre outros aspectos que:

- Em ambos os métodos e malhas a matriz é simétrica;
- A diagonal principal das matrizes para o EbFVM tem maior peso que a diagonal principal obtida para o FEM;
- O fato da malha ser ortogonal propicia maior número de coeficientes nulos.

u_1	11,68	-7,64	0	-0,14	-3,89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_2	-7,64	23,37	-7,64	-3,89	-0,29	-3,89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	-7,64	11,68	0	-3,89	-0,14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_4	-0,14	-3,89	0	23,37	-15,29	0	-15,29	0	-0,14	-3,89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_5	-3,89	-0,29	-3,89	-15,29	46,73	-15,29	-3,89	-0,29	-3,89	-0,14	-3,89	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_6	0	-3,89	-0,14	0	-15,29	23,37	0	-3,89	-0,14	-3,89	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_7	0	0	0	-0,14	-3,89	0	11,68	-7,64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_8	0	0	0	-3,89	-0,29	-3,89	-7,64	23,37	-7,64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_9	0	0	0	-3,89	-0,14	0	-7,64	-7,64	11,68	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	3,75	0,29	0	-0,29	-3,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_2	-0,29	0	0,29	3,75	0	-3,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	-0,29	-3,75	0	3,75	0,29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0,29	3,75	0	0	0	0	-0,29	-3,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_5	-3,75	0	3,75	0	0	0	3,75	0	-3,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_6	0	-3,75	-0,29	0	0	0	0	0	0	3,75	0,29	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_7	0	0	0	0,29	3,75	0	-3,75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_8	0	0	0	-3,75	0	0	3,75	0	0	-0,29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_9	0	0	0	-3,75	-0,29	0	3,75	0,29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 129: Matriz de coeficientes ($\times 10^6 N/m$) para EbFVM. Malha 2x2 ortogonal.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
u_1	10,38	-6,35	0	1,15	-5,19	0	0	0	0
u_2	-6,35	20,77	-6,35	-5,19	2,31	-5,19	0	0	0
u_3	0	-6,35	10,38	0	-5,19	1,15	0	0	0
u_4	1,15	-5,19	0	20,77	-12,69	0	1,15	-5,19	0
u_5	-5,19	2,31	-5,19	-12,69	41,54	-12,69	-5,19	2,31	-5,19
u_6	0	-5,19	1,15	0	-12,69	20,77	0	-5,19	1,15
u_7	0	0	0	1,15	-5,19	0	10,38	-6,35	0
u_8	0	0	0	-5,19	2,31	-5,19	-6,35	20,77	-6,35
u_9	0	0	0	0	-5,19	1,15	0	-6,35	10,38
v_1	3,75	-0,29	0	0,29	-3,75	0	0	0	0
v_2	-0,29	3,75	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	-0,29	3,75	0	0	0	0	0
v_4	0,29	0	3,75	0	0	0	0	0	0
v_5	-3,75	0	0	0	3,75	0	0	0	-3,75
v_6	0	0	3,75	0	0	0	0	3,75	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_8	0	0	0	-0,29	3,75	0	-3,75	0,29	0
v_9	0	0	0	-3,75	0	3,75	-0,29	0	0,29
v_{10}	0	0	0	0	0	0	0	-0,29	3,75
v_{11}	10,38	1,15	0	-6,35	-5,19	0	0	0	0
v_{12}	1,15	20,77	1,15	-5,19	-12,69	-5,19	0	0	0
v_{13}	0	1,15	10,38	0	-5,19	-6,35	0	0	0
v_{14}	-6,35	-5,19	0	20,77	2,31	0	-6,35	-5,19	0
v_{15}	-5,19	-12,69	-5,19	2,31	41,54	2,31	-5,19	-12,69	-5,19
v_{16}	0	-5,19	-6,35	0	2,31	20,77	0	-5,19	-6,35
v_{17}	0	0	0	-6,35	-5,19	0	10,38	1,15	0
v_{18}	0	0	0	0	-5,19	-12,69	1,15	20,77	1,15
v_{19}	0	0	0	0	-5,19	-6,35	0	1,15	10,38

Figura 130: Matriz de coeficientes ($\times 10^6 N/m$) para FEM. Malha 2x2 ortogonal.

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
10,22	-7,74	0	-0,24	-2,24	0	0	0	0	2,58	0,13	0	0,71	-3,42	0	0	0	0
u_2	-7,74	23,95	-7,74	-5,74	-0,48	-2,24	0	0	0,71	-3	0,13	4,27	1	-3,42	0	0	0
u_3	0	-7,74	13,73	0	-5,74	-0,24	0	0	0	0,71	-5,11	0	4,27	0,13	0	0	0
u_4	-0,24	-5,74	0	23,95	-15,48	0	-0,24	0	0,13	4,27	0	-3	1	0	0,71	-3,42	0
u_5	-2,24	-0,48	-5,74	-15,48	47,90	-15,48	-5,74	-0,48	-3,42	1	4,27	-5	1	4,27	1	-3,42	-2,24
u_6	0	-2,24	-0,24	0	-15,48	23,95	0	-5,74	-3,42	0,71	0	1	-3	0	0	0	0
u_7	0	0	0	-0,24	-5,74	0	13,73	0	0	0	0,13	4,27	0	0	0	0	0
u_8	0	0	0	-2,24	-0,48	-5,74	-7,74	23,95	0	0	-3,42	1	4,27	0,13	-3	0,13	0
u_9	0	0	0	-2,24	-0,24	0	-7,74	10,22	0	0	0	0	-3,42	0,71	2,58	0	0
v_1	2,58	0,71	0	0,13	-3,42	0	0	0	10,22	-0,24	0	-7,74	-2,24	0	0	0	0
v_2	0,13	-3	0,71	4,27	1	-3,42	0	0	-0,24	23,95	-0,24	-5,74	-15,48	-2,24	0	0	0
v_3	0	0,13	-5,11	0	4,27	0,71	0	0	0	-0,24	13,73	0	-5,74	-7,74	0	0	0
v_4	0,71	4,27	0	-3	1	4	0	0,13	-7,74	-5,74	0	23,95	-0,48	0	-7,74	-2,24	0
v_5	-3,42	1	4,27	0	-5	1	4,27	1	-2,24	-15,48	-5,74	-0,48	47,90	-0,48	-5,74	-15,48	-2,24
v_6	0	-3,42	0,13	0	1	-3	0	4,27	0,71	-2,24	-7,74	-0,48	23,95	0	-5,74	-7,74	0
v_7	0	0	0	0,71	4,27	0	-5,11	0,13	0	0	-7,74	-5,74	0	13,73	-0,24	0	0
v_8	0	0	0	-3,42	1	4,27	0,71	-3	0	0	-2,24	-15,48	-5,74	-0,24	23,95	-0,24	0
v_9	0	0	0	-3,42	0,13	0	0,71	2,58	0	0	-2,24	-7,74	0	-0,24	10,22	0	0

Figura 131: Matriz de coeficientes ($\times 10^6 N/m$) para EbFVM. Malha 2x2 não ortogonal.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
u_1	8,89	-6,41	0	1,09	-3,57	0	0	0	0
u_2	-6,41	21,29	-6,41	-7,07	2,18	-3,57	0	0	0
u_3	0	-6,41	12,40	0	-7,07	1,09	0	0	0
u_4	1,09	-7,07	0	21,29	-12,82	0	1,09	-3,57	0
u_5	-3,57	2,18	-7,07	-12,82	42,58	-12,82	-7,07	2,18	-3,57
u_6	0	-3,57	1,09	0	-12,82	21,29	0	-7,07	1,09
u_7	0	0	0	1,09	-7,07	0	12,40	-6,41	0
u_8	0	0	0	-3,57	2,18	-7,07	-6,41	21,29	-6,41
u_9	0	0	0	0	-3,57	1,09	0	-6,41	8,89
v_1	8,89	1,09	0	-6,41	-3,57	0	0	0	0
v_2	1,09	21,29	1,09	-7,07	-12,82	-3,57	0	0	0
v_3	0	1,09	12,40	0	-7,07	-6,41	0	0	0
v_4	-6,41	-7,07	0	21,29	2,18	0	-6,41	-3,57	0
v_5	-3,57	-12,82	-7,07	2,18	42,58	2,18	-7,07	-12,82	-3,57
v_6	0	-3,57	-6,41	0	2,18	21,29	0	-7,07	-6,41
v_7	0	0	0	-6,41	-7,07	0	12,40	1,09	0
v_8	0	0	0	-3,57	-12,82	-7,07	1,09	21,29	1,09
v_9	0	0	0	0	-3,57	-6,41	0	-6,41	8,89

Figura 132: Matriz de coeficientes ($\times 10^6 N/m$) para FEM. Malha 2x2 não ortogonal.

	ν_{11}	ν_{12}	ν_{13}	ν_{14}	ν_{15}	ν_{16}	ν_{17}	ν_{18}	ν_{19}	ν_{21}	ν_{22}	ν_{23}	ν_{24}	ν_{25}	ν_{26}	ν_{27}	ν_{28}	ν_{29}	Σ
ν_{11}	1,30	-1,30		-1,30	1,30					1,30	-1,30		-1,30	1,30					0,00
ν_{12}	-1,30	2,60		-1,30	-2,60					-1,30	2,60		-1,30	-2,60					0,00
ν_{13}		-1,30	1,30		1,30						-1,30	1,30							0,00
ν_{14}	-1,30	1,30		2,60	-2,60						1,30	-1,30							0,00
ν_{15}	1,30	-2,60		-2,60	5,19						-2,60	2,60							0,00
ν_{16}		1,30	-1,30		-2,60	2,60					1,30	-1,30							0,00
ν_{17}			1,30				1,30					1,30							0,00
ν_{18}				1,30			-1,30				2,60		-1,30						0,00
ν_{19}					1,30	-1,30		-1,30					1,30						0,00
Região 1																			
ν_{21}										1,30	-1,30		-1,30	1,30					0,00
ν_{22}										-1,30	2,60		-1,30	-2,60					0,00
ν_{23}											-1,30	1,30							0,00
ν_{24}										-1,30	1,30		2,60	-2,60					0,00
ν_{25}										1,30	-2,60		5,19	-2,60					0,00
ν_{26}											2,60		-2,60	2,60					0,00
ν_{27}												1,30			1,30				0,00
ν_{28}													1,30		-1,30				0,00
ν_{29}														1,30		-1,30			0,00
Região 2																			
ν_{31}																			
ν_{32}																			
ν_{33}																			
ν_{34}																			
ν_{35}																			
ν_{36}																			
ν_{37}																			
ν_{38}																			
ν_{39}																			
Região 3																			
ν_{41}																			
ν_{42}																			
ν_{43}																			
ν_{44}																			
ν_{45}																			
ν_{46}																			
ν_{47}																			
ν_{48}																			
ν_{49}																			
Região 4																			
ν_{51}																			
ν_{52}																			
ν_{53}																			
ν_{54}																			
ν_{55}																			
ν_{56}																			
ν_{57}																			
ν_{58}																			
ν_{59}																			
Σ	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 133: Planilha com a diferença entre os coeficientes ($\times 10^6 N/m$) obtidos com elementos ortogonais.

	v_{i_1}	v_{i_2}	v_{i_3}	v_{i_4}	v_{i_5}	v_{i_6}	v_{i_7}	v_{i_8}	v_{i_9}	v_{j_1}	v_{j_2}	v_{j_3}	v_{j_4}	v_{j_5}	v_{j_6}	v_{j_7}	v_{j_8}	v_{j_9}	Σ	
v_{i_1}	1,33	-1,33		-1,33	1,33					-0,14	0,14									0,00
v_{i_2}	-1,33	2,66	-1,33	1,33	-2,66	1,33				0,14	-0,28	0,14	-0,14	0,28	-0,14					0,00
v_{i_3}		-1,33	1,33		1,33	-1,33				0,14	-0,14			-0,14	0,14					0,00
v_{i_4}	-1,33	1,33		2,66	-2,66		-1,33	1,33		0,14	-0,14	-0,28	0,28	0,28	-0,14	0,14	-0,14			0,00
v_{i_5}	1,33	-2,66	1,33	-2,66	5,32	-2,66	1,33	-2,66	1,33	-0,14	0,28	-0,14	0,28	-0,56	0,28	-0,14	0,28	-0,14		0,00
v_{i_6}		1,33	-1,33		-2,66	2,66				-0,14	-0,14	0,14		0,28	-0,28					0,00
v_{i_7}				1,33	1,33		1,33	-1,33					0,14	-0,14			0,14			0,00
v_{i_8}				1,33	-2,66	1,33	-1,33	2,66	-1,33		Região 3		-0,14	0,28	-0,14	0,14	-0,28	0,14		0,00
v_{i_9}					1,33	-1,33		-1,33	1,33					-0,14	0,14		0,14	-0,14		0,00
v_{j_1}	-0,14	0,14		0,14	-0,14					1,33	-1,33		-1,33	1,33						0,00
v_{j_2}	0,14	-0,28	0,14	-0,14	0,28	-0,14				-1,33	2,66	-1,33	1,33	-2,66	1,33					0,00
v_{j_3}		0,14	-0,14		1,33	-1,33				-1,33	1,33		1,33	-1,33						0,00
v_{j_4}	0,14	-0,14		-0,28	0,28		0,14	-0,14		-1,33	1,33		2,66	-2,66		-1,33	1,33			0,00
v_{j_5}	-0,14	0,28	-0,14	0,28	-0,56	0,28	-0,14	0,28	-0,14	1,33	-2,66	1,33	-2,66	5,32	-2,66	1,33	-2,66	1,33		0,00
v_{j_6}		-0,14	0,14		0,28	-0,28				1,33	1,33	-1,33		-2,66	2,66		1,33	-1,33		0,00
v_{j_7}				0,14	-0,14		-0,14	0,14					-1,33	1,33		1,33	-1,33			0,00
v_{j_8}				-0,14	0,28	-0,14	0,14	-0,28	0,14		Região 2		1,33	-2,66	1,33	-1,33	2,66	-1,33		0,00
v_{j_9}				-0,14	0,14		0,14	-0,14						1,33	-1,33		-1,33	1,33		0,00
Σ	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Figura 134: Planilha com a diferença entre os coeficientes ($\times 10^6 N/m$) obtidos com elementos não ortogonais.

188 - O EbFVM aplicado a problemas de elasticidade plana em material isotrópico

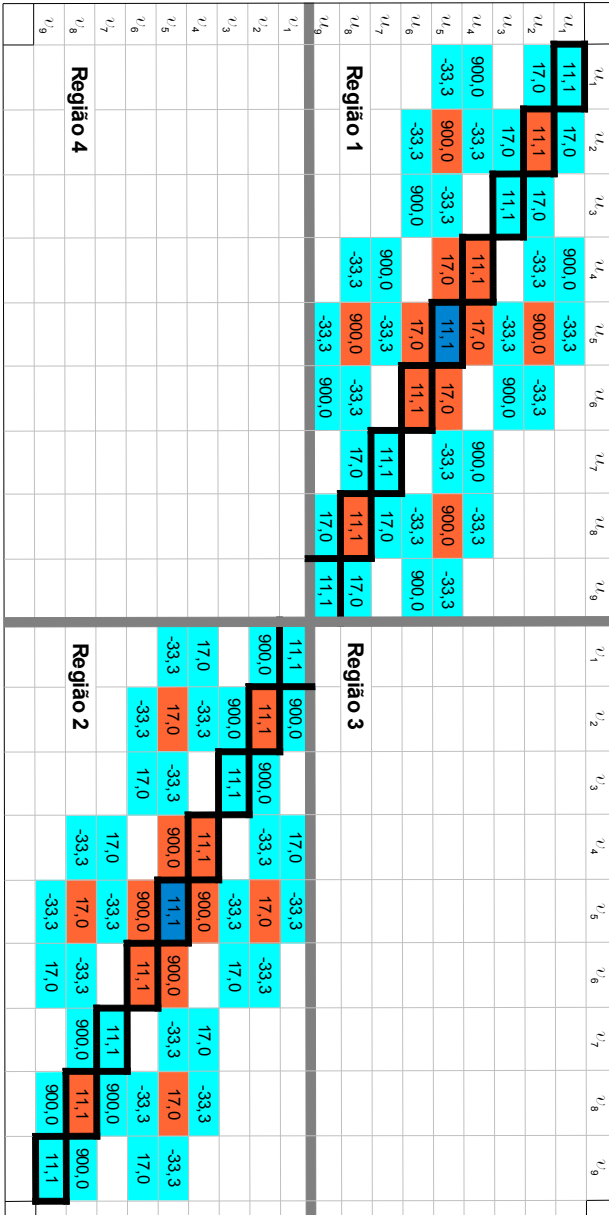


Figura 135: As diferenças percentuais ($\% \approx$) em relação aos coeficientes do EbFVM para malha ortogonal.

As figuras 133 e 134, mostram as diferenças entre os coeficientes das matrizes rigidez global obtidas pelo EbFVM e pelo FEM-Galerkin, $\mathbf{K}_{EbFVM} - \mathbf{K}_{FEM}$, para malha ortogonal e não ortogonal respectivamente. Com relação a estas diferenças observa-se:

- Em geral, as maiores diferenças ocorrem sobre a diagonal principal. Nos dois casos as diferenças na diagonal principal foram maiores que zero, o que evidencia que todos coeficientes gerados pelo EbFVM sobre a diagonal principal são maiores que os coeficientes gerados pelo FEM;
- As diferenças em ambos os casos quando somadas em linha, ou em coluna se cancelam. Isso mostra certa “equivalência” entre os pesos que os coeficientes representam para os métodos;
- No caso da malha ortogonal, não ocorrem diferenças nos termos cruzados (Regiões 3 e 4). Isto dá uma boa indicação de que em malhas estruturadas, os dois métodos têm maior proximidade;
- Nas regiões 1 e 2, as diferenças sofrem pouca alteração frente o efeito da distorção dos elementos. Em outras palavras a distorção dos elementos tem pouco efeito sobre os coeficientes destas regiões e consequentemente pouco efeito sobre as diferenças entre os deslocamentos;
- As diferenças percentuais Df_P são mostradas na Fig. 135. Estas representam o valor percentual das diferenças da Fig. 133 em relação aos coeficientes do EbFVM na Fig. 129, ou seja são calculados conforme a Eq. (123). Os termos da diagonal principal, todos apresentam uma diferença de $\approx 11\%$. Como esta análise é inicial, foi feita apenas para a malha ortogonal mas pode ser estendida para a malha não ortogonal e/ou não estruturada;

$$Df_{ijP} = \frac{(K_{ijEbFVM} - K_{ijFEM})}{K_{ijEbFVM}} \cdot 100 [\%] \quad (123)$$

- Como as diferenças entre coeficientes se repetem de forma sistemática (ver Fig. 133), as percentuais também apresentam um padrão e comportamento semelhante. E para o caso analisado na Fig. 135 os valores que se repetem são: 11,1 ; 17,0 ; -33,3 e 900 %, tanto nas equações para u como para v ;
- Os valores dos coeficientes são mostrados na forma de gráfico nas figuras 137 e 138 para 3 equações lineares de u e 3 equações lineares de v respectivamente. As três equações plotadas foram

escolhidas de forma a verificar 3 configurações distintas de células numéricas. A **primeira** configuração refere-se ao **nó 1** que está no “canto”, ou seja, seus coeficientes são originados a partir de um elemento apenas. A **segunda** configuração refere-se ao **nó 2**, o qual está na “lateral”, ou seja, seus coeficientes são originados a partir de dois elementos. Por fim, a **terceira** ao **nó 5** que está no interior do domínio e seus coeficientes são originados a partir de 4 elementos. Apesar das distintas células numéricas observa-se que as diferenças percentuais são comuns entre elas. Ou seja, sempre apresentando um padrão de variação na percentagem em 11, 1 ; 17, 0 ; -33, 3 e 900 %.

- As figuras 139 e 140 apresentam as diferenças percentuais em forma de gráfico para os mesmos casos apresentados nas figuras 137 e 138. As diferenças percentuais, cuja legenda é *EbFVM* são retiradas dos valores apresentados na Fig. 135, estes foram obtidos à partir da Eq. (123). E as diferenças, cuja legenda é *FEM*, foram extraídas a partir da mesma equação, porém agora com o divisor K_{ijFEM} , ou seja, a percentagem é em relação aos coeficientes obtidos pelo FEM. Sendo que nestas últimas também é observado um padrão repetitivo de percentagens: 12, 5 ; 20, 5 ; -25, 0 e -112, 5 %. Porém a análise se concentrará nos gráficos da legenda *EbFVM* já que as percentagens em relação ao FEM geram conclusões semelhantes.

- Ao observar as diferenças vê-se que estas estão associadas com a posição do nó vizinho e ao fato da equação ser para para u ou v . Para a malha ortogonal pode-se classificar a posição do nó vizinho com respeito a direção do deslocamento u ou v em: *alinhado*, *diagonal* e *cruzado*. Estes termos são mostrados na Fig. 136 para um exemplo com um nó genérico N . Agora é possível verificar que as diferenças percentuais obedecem à distribuição apresentada na Tab. 17. Ou seja, o coeficiente gerado pela influência do próprio nó N é o que apresenta menor diferença percentual. O coeficiente gerado pela interação com o nó vizinho *alinhado* é o que apresenta uma diferença imediatamente superior. Aquele gerado pela interação com o nó vizinho *diagonal*, apresenta uma diferença um pouco maior e por fim o que apresenta maior diferença, é o coeficiente gerado pela interação com o nó vizinho *cruzado*. Quanto a isto ser uma regra para malhas não estruturadas e não ortogonais é difícil afirmar, assim testes podem ser feitos em trabalhos futuros. De qualquer forma pode-se **inferir** que: quanto

mais o nó está “desalinhado” em relação a direção do deslocamento sendo analisado, maior a diferença percentual entre os dois métodos.

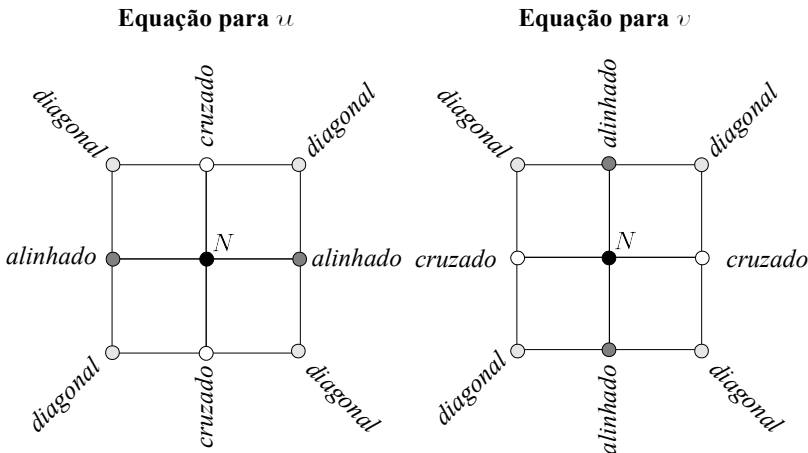


Figura 136: Classificação de nós vizinhos para malha ortogonal considerando a equação para u ou v .

Tabela 17: Diferença percentual para os coeficientes em relação ao EbFVM e o FEM para cada posição de nó vizinho.

	EbFVM	FEM
Equação para	u ou v	u ou v
O próprio nó	11, 1 %	12, 5 %
<i>alinhado</i>	17, 0 %	20, 5 %
<i>diagonal</i>	-33, 3 %	-25, 0 %
<i>cruzado</i>	900 %	-112, 5 %

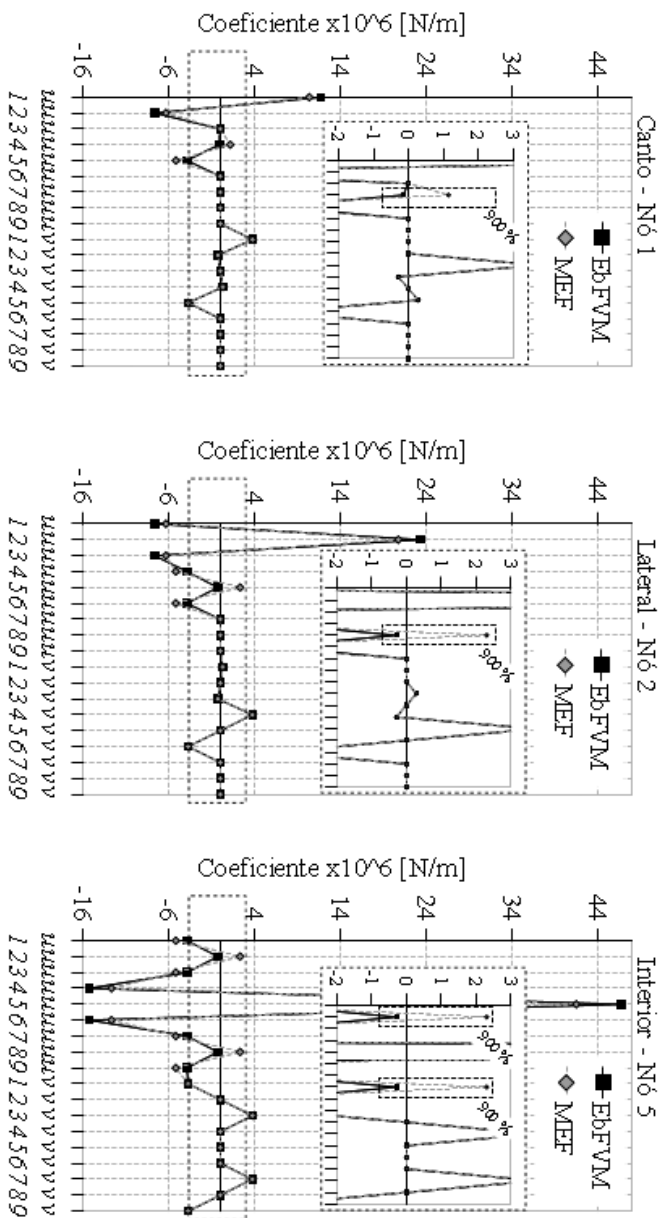


Figura 137: Coeficientes para 3 nós em 3 posições distintas. As equações são para u e a malha é 2×2 ortogonal.

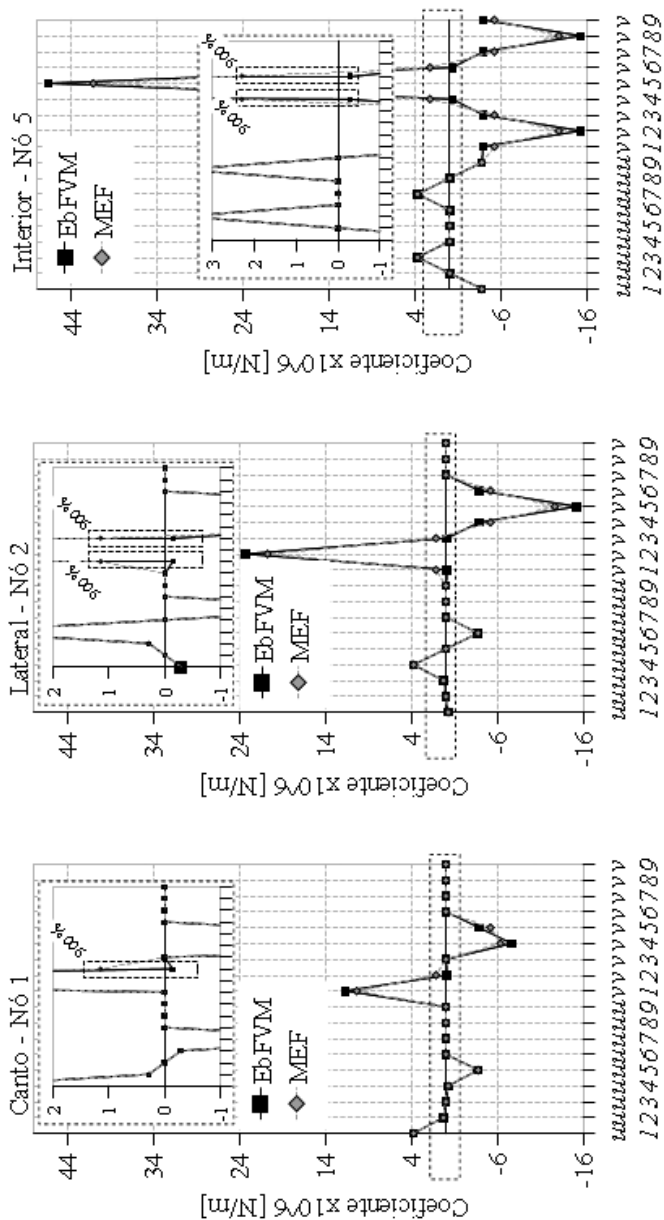


Figura 138: Coeficientes para 3 nós em 3 posições distintas. As equações são para v e a malha é 2×2 ortogonal.

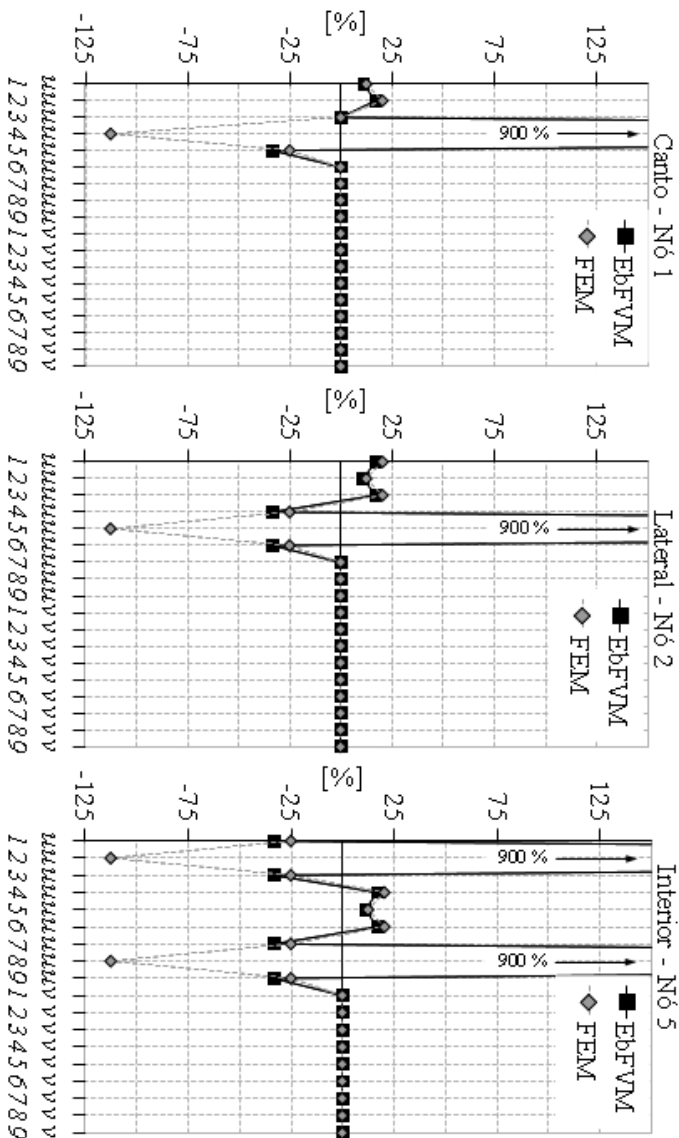


Figura 139: Diferença percentual nos coeficientes para 3 nós em 3 posições distintas. As equações são para u e a malha é 2×2 ortogonal. O percentual é determinado em relação aos coeficientes do EbFVM e do FEM.

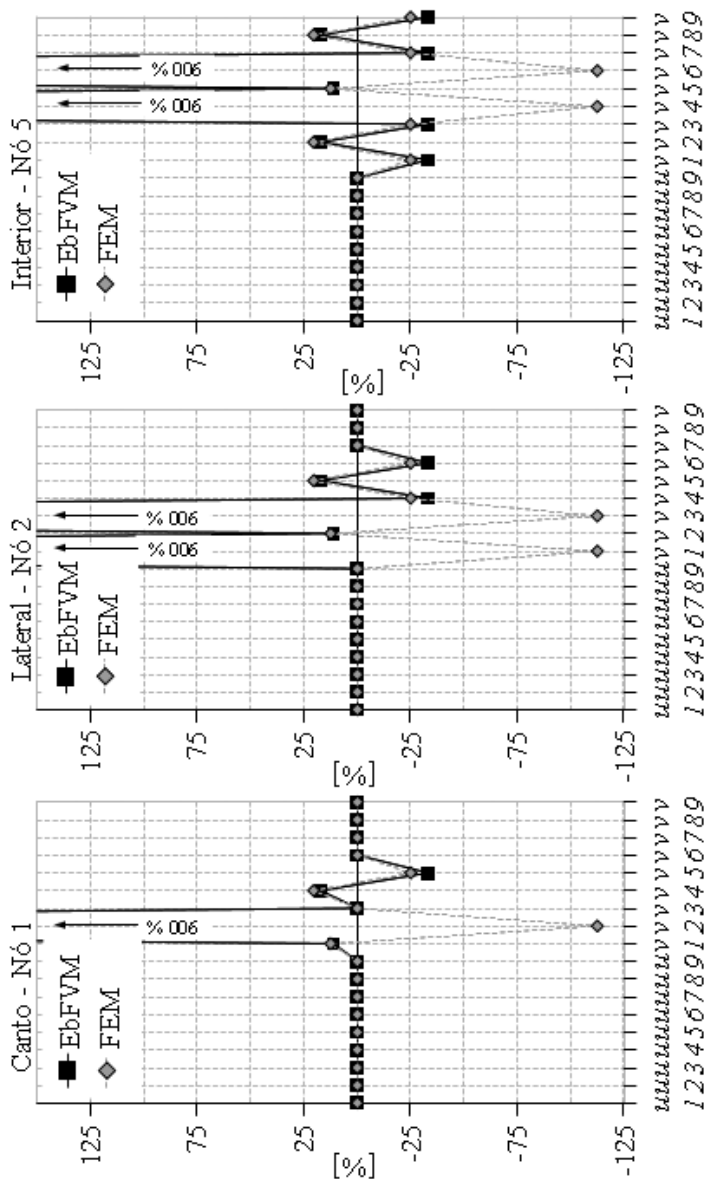


Figura 140: Diferença percentual nos coeficientes para 3 nós em 3 posições distintas. As equações são para v e a malha é 2×2 ortogonal. O percentual é determinado em relação aos coeficientes do EbFVM e do FEM.

4.3.2 CONDICIONAMENTO DA MATRIZ RIGIDEZ

O condicionamento, indica o quanto as pequenas oscilações no valor dos coeficientes podem afetar o resultado final do sistema. Esta análise foi feita para o caso da malha não ortogonal 2×2 apresentada na Fig. 128 e cujos coeficientes estão nas figuras 131 e 132 para o EbFVM e FEM respectivamente. Os valores obtidos para o condicionamento estão na Tab. 18.

Tabela 18: Condicionamento para EbFVM e FEM em uma malha não ortogonal 2×2 .

	$cond(\mathbf{A})$
EbFVM	1, 22
FEM	1, 18

Conforme visto anteriormente, o condicionamento passa a ser uma preocupação na solução do sistema linear se atingir valores próximos ou superiores a 10^4 , assim para os valores obtidos pode-se dizer que para **ambos os métodos, o condicionamento é excelente**.

4.3.3 TEMPO DE CPU

Um teste de tempo de CPU é executado para um problema de viga em balanço com a mesma geometria mostrada na Fig. 81 mudando a força na extremidade livre para $10 kN$. O caso foi analisado para o EPD. Os dados do material são: $E = 210 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,3$. No teste foi utilizado um computador *Pentium Dual-Core T3400* com 3 GB de RAM com o mínimo de aplicativos carregados no sistema utilizado (Windows Vista 2007 32 bits), de forma a minimizar os efeitos na variação do tempo de processamento devido a multitarefas. Cada tempo apresentado na Tab. 19a é uma média de exaustivas 30 amostras, portanto foram feitas 150 amostras para cada método. Foram computados **tempos de montagem** do sistema de equações e de **solução** do sistema linear obtido.

A Tab. 19b mostra os tempos obtidos em testes feitos por Bailey e Cross (1995). Os resultados apresentados mostram uma vantagem significativa no desempenho do FEM, principalmente na montagem do sistema. Isso se deve ao tipo de algoritmo utilizado para percorrer o domínio. Bailey e Cross utilizaram a técnica de percorrer o domínio através dos volumes, o que faz o algoritmo visitar o mesmo elemento diversas ve-

zes para compor os volumes que tem parte deste. Porém a técnica utilizada neste trabalho visita os elementos uma única vez, extraindo todos os coeficientes deste para os respectivos volumes de controle. Quanto aos tempos de solução do sistema de equações o artigo não descreve o método utilizado.

Tabela 19: Tempos de montagem e solução do sistema de equações.

Montagem de K		Teste	Montagem [s]	
EbFVM	MEF		FE	VF
[s]	[s]	1	1,48	3,44
0,1123	0,1706	2	10,56	40,78
0,1128	0,1695	3	1,24	2,72
0,1123	0,1690	4	344,00	632,90
0,1113	0,1695	Fonte: Bailey e Cross		
0,1144	0,1700	(1995, p. 1772)		
Média	0,1126	(b)		
	33,65 %			
[%] de tempo a menos que o FEM				
(a)				

A Tab. 19a mostra os tempos obtidos no teste aqui apresentado. Para o problema proposto, o EbFVM utilizou um tempo 33 % menor que o FEM no cômputo dos coeficientes. Vale lembrar que o FEM-Galerkin utilizado fez uso da regra de Gauss 4x4 para elementos 2D quadriláteros. Isso faz com que ao visitar um elemento, é necessário o cômputo dos polinômios da Eq. (148) por 64 vezes (4 nós x 4 nós x 4 GP). Por outro lado, no EbFVM, a avaliação é feita na fronteira e para cada nó do elemento há duas fronteiras, assim os polinômios da Eq. (19) são computados 32 vezes (4 nós x 4 nós x 2 faces). Por esse raciocínio esperaria-se que o tempo caísse pela metade, porém isso não ocorre pois no algoritmo existem elementos em comum como os laços *for to do* (figuras 14 e 15) entre outros, além de que o EbFVM precisa de um processamento extra para definição da face que será integrada e a parametrização desta face.

4.3.4 DESEMPENHO DOS ALGORÍTIMOS DE SOLUÇÃO

A qualidade da solução numérica, na maioria das vezes, está diretamente associada ao número de pontos da malha utilizada, ou seja, uma malha mais refinada representa melhor a solução da equação diferencial

discretizada. Mas esse ganho gera um maior custo computacional. Por outro lado em uma malha grosseira, a solução pode ser mais rapidamente obtida, porém com uma qualidade inferior à da malha refinada devido aos maiores erros de aproximação envolvidos.

A maioria dos algoritmos para solução de sistemas lineares são robustos e eficientes, mas seu custo computacional varia exponencialmente com o número de variáveis envolvidas conforme

$$C_s = a \times N^\gamma \quad (124)$$

Nesta equação C_s representa o Custo computacional em segundos, N é o número de graus de liberdade (variáveis envolvidas), γ é a taxa de aumento do custo e a um coeficiente com unidade de tempo. Tanto γ quanto a devem ser determinados através de testes. (CORDAZZO, 2006).

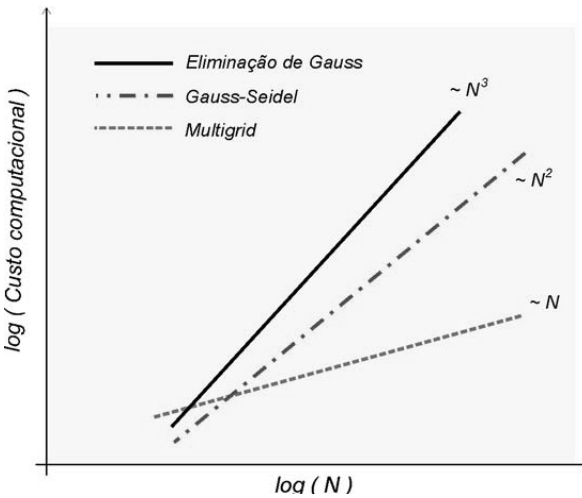


Figura 141: Desempenho de alguns algoritmos de solução (CORDAZZO, 2006).

Os algoritmos de solução mais tradicionais como: Gauss-Seidel, Gauss-Seidel com SOR e métodos diretos, normalmente apresentam esforço computacional proporcional a N^γ onde $\gamma \in [2, 0; 3, 0]$. Assim o custo computacional aumenta com o quadrado e até com o cubo do número de graus de liberdade N , isso pode ser visto no gráfico da Fig. 141. Portanto a ordem do algoritmo é uma importante característica a analisar frente ao método de discretização utilizado.

Nos próximos parágrafos, serão analisados cinco algoritmos de solução. São eles:

- Eliminação de Gauss – ELG (método direto);
- Gauss-Seidel – GS (método iterativo);
- Gauss-Seidel com sobre-relaxação – GS-SOR (método iterativo);
- Gauss-Seidel com sobre-relaxação e redução do resíduo – GS-SOR-RDR (método iterativo);
- Eliminação de Gauss com matriz Esparsa – ELGE (método direto).

Os três primeiros são comuns e os dois últimos são propostos neste trabalho como uma melhoria do GS-SOR e do ELG respectivamente.

Basicamente o GS-SOR-RDR consiste em antes de aplicar o GS-SOR, dividir cada linha do sistema pelo elemento da diagonal principal, K_{ii} , assim $K_{ii} = 1, 0 \forall i \in [1; 2 \times n_{nptg}]$ e as demais componentes, considerando que a diagonal principal é dominante, irão assumir valores absolutos K_{ij} onde $K_{ij} \in (0, 0; 1, 0) \forall i$ e $j \in [1; 2 \times n_{nptg}] : i \neq j$. Com isso consegue-se garantir que durante a execução do GS-SOR a divisão pelo termo da diagonal principal seja desnecessária (ver Eq. (74) para o caso em que $i = j$).

O ELGE é basicamente o método ELG porém aproveitando as características da matriz esparsa, além de eliminar grande quantidade de memória necessária para armazenamento das variáveis. Tanto este método como o GS-SOR-RDR não serão vistos em detalhes por fugirem ao propósito deste trabalho, ficando esta lacuna para um desenvolvimento e apresentação futura.

4.3.4.1 Levantamento do Custo Computacional para um Problema Teste

O levantamento do custo computacional foi feito para o problema teste ilustrado na Fig. 85. Foram utilizadas 5 malhas não estruturadas, elementos quadrilaterais com 39, 199, 871, 1913 e 3349 nós em cada malha. Para o ELGE, além das malhas citadas foi utilizada uma sexta malha com 13057 nós.

As figuras 142, 143 e 144 juntamente com a Tab. 20 apresentam os resultados obtidos para os cinco métodos de solução. Nestas pode-se observar:

- Para a técnica **ELG** o valor da taxa γ , é praticamente idêntico

(diferindo em 2×10^{-5} , ou seja, 0,0034 %) para o EbFVM e o FEM;

- Para a técnica **ELGE**, o valor de γ para o EbFVM, é um pouco menor que para o FEM implicando num menor custo computacional. Esta diferença é em torno de 0,5 %. Isso vem de encontro com os resultados obtidos para o menor tempo de CPU, obtido pelo EbFVM no problema analisado na secção 4.3.3, o qual também utilizou-se do ELGE. É importante lembrar que estes resultados são dependentes do problema teste analisado, também que estas variações obtidas com diferentes problemas são em geral pequenas;
- Para a técnica **GS** o FEM apresenta um γ menor que o EbFVM. Porém como no caso do ELGE esta diferença também não chega a ser significativamente importante, em torno de 3,3 %;
- Para a técnica **GS-SOR**, a diferença é um pouco maior mostrando um menor custo computacional para o FEM, porém esta diferença ainda é pequena e não significativa, em torno de 3,6 %;
- O **GS-SOR-RDR** é o que apresentou maior diferença no valor de γ , em torno de 5,1 %, que é um valor significativamente considerável favorecendo um menor custo computacional para o sistema gerado pelo FEM;
- Todos os valores de γ para os diversos algoritmos estão dentro da faixa esperada [2, 0 ; 3, 0].

Os valores de γ estão na Tab. 20, e podem ser observados visualmente na Fig. 144. Ainda na Tab. 20 são listadas as diferenças percentuais absolutas entre os valores de γ dos dois métodos. A percentagem é calculada em relação aos valores obtidos com o EbFVM.

Apesar de que nos métodos analisados a taxa γ ficou sempre entre [2, 0 ; 3, 0], *uma melhoria significativa poderia ser obtida utilizando-se o método multigrid* já citado na secção 4.1.4 e conforme a Fig. 141, este deverá apresentar um γ muito próximo de 1, 0. Portanto esta análise com *multigrid* é uma sugestão para trabalhos futuros.

Esta análise mostrou que *as diferenças no custo computacional para os diversos algoritmos de solução aplicados sobre o sistema obtido pelo EbFVM e pelo FEM não são significativas*, com exceção do GS-SOR-RDR onde o sistema obtido pelo FEM, apresenta uma taxa γ , 5,1% menor que para o EbFVM.

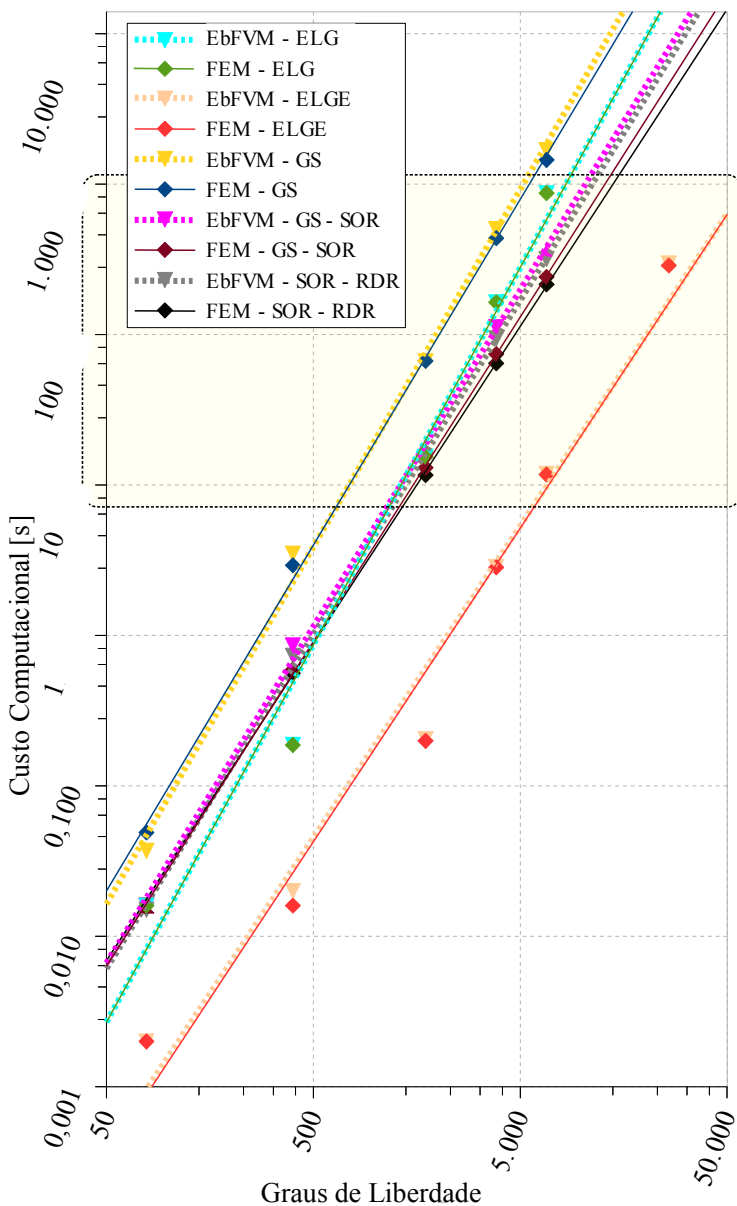


Figura 142: Desempenho dos algoritmos aplicados a sistema linear gerado pelo EbFVM e pelo FEM. Os valores deste gráfico constam na tabela A.6.

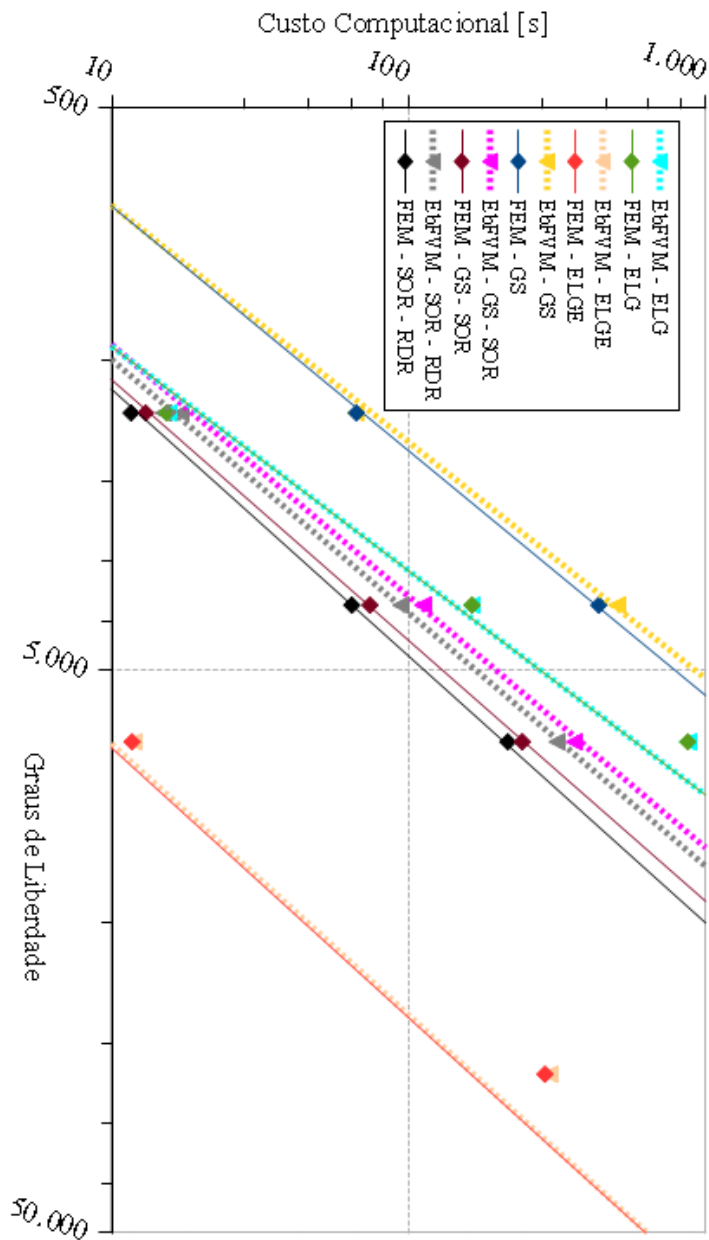


Figura 143: Ampliação da área destacada no gráfico da Fig. 142.

Tabela 20: Coeficientes obtidos para a Eq. (124) com diversos algoritmos de solução para o EbFVM e FEM.

Método	Algoritmo de Solução	a [$\times 10^{-7}$ s]	N^γ	Ajuste linear R^2	Diferença absoluta [%] em γ
EbFVM	ELG	1,48	$N^{2,51}$	0,981	0,0034
	GS	1,51	$N^{2,38}$	0,996	3,2554
	GS-SOR	10,6	$N^{2,24}$	0,999	3,5626
	GS-SOR-RDR	10,3	$N^{2,22}$	0,999	5,0934
	ELGE	1,14	$N^{2,07}$	0,977	0,5401
FEM	ELG	1,48	$N^{2,51}$	0,981	
	GS	24,9	$N^{2,30}$	0,999	
	GS-SOR	13,7	$N^{2,16}$	1,000	
	GS-SOR-RDR	1,81	$N^{2,11}$	1,000	
	ELGE	1,00	$N^{2,09}$	0,975	

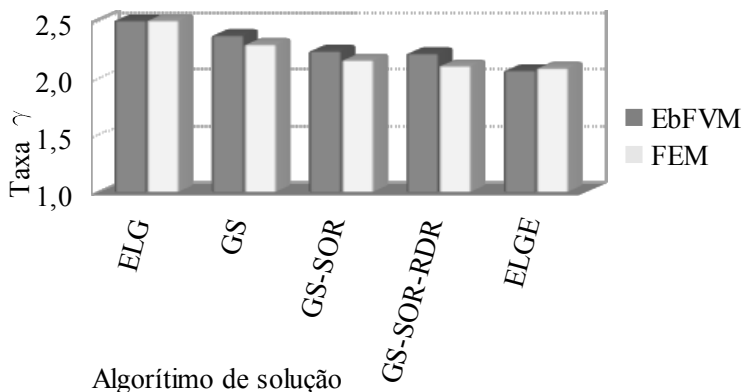


Figura 144: Comparação entre a taxa γ para os diversos algoritmos de solução.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho fez uma extensiva abordagem, onde foram incluídos diversos pontos até então não constantes nas referências consultadas. As referências, na maioria das vezes, sempre abordaram pontos isolados, dos quais a maioria referem-se a problemas teste. Portanto, este trabalho complementa sobre as diversas lacunas existentes, as quais dizem respeito a testes padrões utilizados extensivamente nos métodos baseados em elementos finitos, análise de erros e problemas testes adicionais, os quais envolveram além da análise de deslocamento uma análise inicial sobre os métodos de extração de tensões.

Dentre os tópicos abordados no trabalho, separou-se as principais contribuições, listadas a seguir:

- **Algoritmo** de montagem do sistema de equações: Este é idêntico ao algoritmo utilizado pelo FEM-Galerkin, com exceção do cômputo dos coeficientes. Este fato simplifica a implementação do EbFVM em códigos existentes para métodos baseados em elementos, além de deixar o EbFVM totalmente acessível a qualquer usuário de métodos numéricos baseados em elementos;
- **Patch Test**: O EbFVM mostrou-se *consistente e estável*, tanto no interior do domínio como na fronteira. Não apresentou influências devido a elementos distorcidos e passou no teste de simples elemento, o qual potencializa o problema de modos espúrios comumente encontrado no FEM-Galerkin ao se utilizar a integra-

ção reduzida;

- **Locking Volumétrico:** O locking volumétrico aqui analisado difere do problema clássico de locking. O locking volumétrico avalia apenas o comportamento dos resultados frente a valores críticos do coeficiente de Poisson ($\nu \rightarrow 0,5$). Assim a análise feita mostra apenas o comportamento numérico do método e este apresentou bom desempenho, pois somente começou a apresentar problemas significativos (oscilações) com coeficiente de Poisson elevado ($\nu \approx 0,49$), além disso estas oscilações são principalmente devido aos erros de processamento numérico. De qualquer forma, o travamento ocorre, pois quando $\nu \rightarrow 0,5$ a dilatação volumétrica tende a zero, ocorrendo então o travamento do meio;
- **Coefficientes:** Os coeficientes obtidos pelo EbFVM, são muito próximos dos obtidos pelo FEM-Galerkin. Para o FEM-Galerkin, a influência dos nós vizinhos é maior que para o EbFVM e isso se deve ao domínio de integração das funções peso, o qual vai até junto de cada nó vizinho. Interessante lembrar ainda que: para malha cartesiana, os coeficientes gerados pelos termos cruzados são idênticos entre ambos os métodos;
- **Norma L2 do Erro e Erro na Norma da Energia:** Esta análise considerou apenas a técnica CDN na recuperação de tensões, que é uma técnica pobre para pontos na fronteira, mesmo assim, pode-se observar que os valores dos erros no interior do domínio, são bastante baixos, caracterizando um bom desempenho do método EbFVM. Um possível trabalho futuro poderia repetir os testes para outras técnicas de obtenção de tensões. Quanto aos nós sobre a fronteira, verificou-se que estes são responsáveis pelos elevados valores da norma L2 do erro e do erro na norma da energia, ambas escritas para a tensão. Isto coincide com as conclusões obtidas para a análise de erros nos deslocamentos com respeito ao tipo de CC imposta (deslocamento ou força), visto no problema *Cubic* (secção 4.2.3). Neste problema, o caso com todas CC de valor prescrito, foi o que apresentou erros na ordem dos erros de CPU e o caso com a grande parte de CC de força prescrita, foi o que apresentou maiores erros nos deslocamentos, evidenciando assim que os nós sobre a fronteira, são os maiores responsáveis por introduzirem erros na solução numérica. É claro que no caso dos erros avaliados sobre a tensão, além dos erros nos campos de deslocamentos, deve-se levar em consideração os erros causados pela técnica de extração de tensões, que para esta

análise foi a CDN. Esta técnica é caracterizada principalmente por ter uma aproximação fraca nos nós sobre a fronteira;

- **Convergência da solução do sistema Linear:** Apresentou um comportamento estável e uma resposta significativa na redução do tempo de solução em cerca de 90 %, quando da aplicação de sobre-relaxação;
- **Ordem do erro de Richardson:** Sendo este um bom indicador sobre a ordem dos erros envolvidos no método numérico, verificou-se que para o deslocamento a ordem é muito próxima de 2 na maior parte do domínio. Além disso, os maiores erros estão associados às fronteiras do problema, reafirmando as observações já feitas sobre os erros nos deslocamentos obtidos no problema *Cubic* (secção 4.2.3) e sobre os erros das normas aplicadas à tensão. Também verificou-se que a convergência é monotônica (estável);
- **Problema Cubic:** Este problema foi escolhido, devido à solução analítica conhecida e esta por sua vez ser de ordem cúbica, ou seja, duas ordens a mais que a ordem da aproximação linear utilizada. As maiores diferenças entre os resultados dos deslocamentos obtidos pelo EbFVM e os pelo FEM, residem na influência das CC de força prescrita (mesmo que esta seja nula). Em outras palavras, quando somente CC de deslocamento prescrito estão presentes, os resultados para o interior do domínio são idênticos entre ambos os métodos, apresentando diferenças na ordem dos erros de CPU;
- **Problema Placa com Orifício:** Este é um problema clássico de engenharia e o foco são as tensões máximas ao redor do orifício. As tensões foram comparadas com os valores analíticos e apesar da malha pobre, os valores obtidos apresentaram erro relativo 0,53 e -2,7% para as componentes σ_{xx} e σ_{yy} respectivamente. Para o FEM-Galerkin, os erros relativos foram 1,23 e -0,9% para as respectivas componentes. Ou seja, os erros nas tensões apresentados por ambos os métodos são muito próximos entre si;
- **Condicionamento:** O condicionamento, $cond(\mathbf{A})$, mede o quanto os resultados do sistema são sensíveis à pequenas variações no valor dos coeficientes. São considerados mal condicionados, os sistemas com condicionamento maiores ou iguais a 10^4 . Portanto, como para o EbFVM, no caso estudado (secção 4.3.2) $cond(\mathbf{A}) = 1,22$, pode-se dizer que o referido sistema é muitíssimo bem condicionado;
- **Tempo de CPU:** O tempo de montagem da matriz rigidez foi 33%

33% menor que o tempo necessário ao FEM-Galerkin com integração cheia. Isto se deve ao menor número de pontos de integração envolvidos. Quanto a taxa de aumento do custo computacional, esta foi dentro do esperado, ou seja, o método de Eliminação de Gauss (direto) apresentou uma taxa 2,51 e o método de Gauss-Seidel (iterativo) apresentou 2,38. Além destas, outras taxas, melhores que estas, para variações destes métodos de solução, foram conseguidas. Porém sempre no intervalo esperado, ou seja, $\gamma \in [2; 3]$. De uma maneira geral ambos os métodos (EbFVM e FEM-Galerkin), geram matrizes que levam a taxas praticamente iguais, com diferenças pouco significativas, porém com uma leve vantagem do FEM-Galerkin. Espera-se que com a aplicação do método *Multigrid*, essa taxa diminua consideravelmente e se aproxime de 1,0.

O EbFVM, levando em consideração as referências consultadas, não havia sido verificado sob a perspectiva da maior parte dos diversos testes apresentados neste trabalho. *Estes testes, juntamente com a revisão bibliográfica, definitivamente evidenciam a potencialidade do EbFVM em problemas de multi-física. Sua aplicação nesta área é inevitável e trás diversos aspectos positivos na formulação numérica e implementação computacional.* Adicionalmente, este trabalho sugeriu ao menos nove tópicos relacionados a trabalhos futuros, listados em sua maior parte no Capítulo 4.

Referências

- BAILEY, C. e CROSS, M.. A Finite Volume Procedure to Solve Elastic Solid Mechanics Problems in Three Dimensions on an Unstructured Mesh. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, p. 1757-1776, 1995.
- BAILEY, C., TAYLOR, G., BOUNDS, S. M., MORAN, G. e CROSS, M.. PHYSICA: A Multiphysics Computational Framework and its Application to Casting Simulations. **Computational Fluid Dynamics in Mineral & Metal Processing and Power Generation**, London - UK, p. 419-425, 1997.
- BARTH, Timothy e OHLBERGER, Mario. **Encyclopedia of Computational Mechanics**. John Wiley & Sons Ltd, 2004.
- BEER, F. P. e JOHSTON Jr, E. Russell. **Resistência dos Materiais**, 2. ed. São Paulo-SP: McGraw-Hill, 1989. 654 p.
- BONET, Javier e WOOD, Richard D.. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. Cambridge University Press, 1999.
- CHANDRUPATLA, Titupathi R. e BELEGUNDU, Ashoh D..

Introduction To Finite Elements In Engineering. New Jersey: Printice-Hall Inc., 1991, p. 414.

CRAW, Ian. **Advanced Calculus and Analysis MA1002.** University of Aberdeen, Department of Mathematical Sciences, 2000.

CORDAZZO, Jonas. **Simulação de Reservatórios de Petróleo Utilizando o Método EbFVM e Multigrid Algébrico.** 2006. p. 250. Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC-Brasil.

CHEN, W.F., MIZUNO, E., **Nonlinear Analysis in Soil Mechanics Theory and Implementation,** Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, Elsevier, 1990.

DEMIRZIC, I., HORMAN, I. e MARTINOVIC, D.. Finite Volume Analysis of Stress and Deformation in Hygro-Thermo-Elastic Ortotropic Body. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,** v. 190, p. 1221-1232, 2000.

DONNELL, L. H., **Beams, Plates and Shells.** New York: McGraw-Hill, 1976. 453 p.

FAINBERG, J. e LEISTER, H. J. Finite Volume Multigrid Solver for Thermo-Elastic Stress Analysis in Anisotropic Materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,** Erlangen - Germany, v. 137, p. 167-174, 1996.

FALLAH, N. A., BAILEY, C., CROSS, M., TAYLOR, G.A.. Comparison of Finite Element and Finite Volume Methods Application in Geometrically Nonlinear Stress Analysis. **Applied Mathematical Modelling,** v. 24, p. 439-455, 2000.

FERZIGER, Joel H. e PERIĆ, Milovan. **Computational Methods for Fluid Dynamics,** 2. ed. Berlin: Springer, 1999, p. 389.

FILIPPINI, Gerson, VAZ Jr, Miguel, MUÑOZ-ROJAS, Pablo Andrés, BARBIERI, Renato. Uma Aproximação em Volumes Finitos para Problemas de Elasticidade Plana. **Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM).** Belém-PA-Brasil. 2004a.

- FILIPPINI, Gerson, VAZ Jr, Miguel, MUÑOZ-ROJAS, Pablo Andrés, BARBIERI, Renato. Aspectos da Aplicação do Método de Volumes Finitos a Problemas de Elasticidade Plana. **XXV Iberian Latin American Congress on Computational Methods (XXV CILAMCE)**. Recife-PE-Brasil. 2004b.
- FILIPPINI, Gerson. **O Método de Volumes Finitos Aplicado A Elasticidade Plana em Material Isotrópico**. 2004c. p. 108. Dissertação de Mestrado em Ciência e Engenharia de Materiais - Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville-SC-Brasil.
- FILIPPINI, Gerson, VAZ Jr, Miguel, MUÑOZ-ROJAS, Pablo Andrés, BARBIERI, Renato. Uma Avaliação Comparativa da Influência da Razão de Aspecto no Cálculo das Tensões Obtidas Através dos Métodos de Elementos Finitos e Volumes Finitos. **Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (XXVI CILAMCE)**. Guarapari-ES-Brasil. out. 2005.
- FILIPPINI, G., MALISKA, C. R., VAZ jr, Miguel, MUÑOZ-ROJAS, Pablo Andrés. O Método de Volumes Finitos Baseado em Elementos Aplicado a Elasticidade Bidimensional em um Material Isotrópico. **Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (XXIX CILAMCE)**. Maceió-AL-Brasil. nov. 2008.
- FILIPPINI, G., MALISKA, C. R., VAZ Jr, Miguel, MUÑOZ-ROJAS, Pablo Andrés. Análise Preliminar do EbFVM em Problemas de Elasticidade 2D. **Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (XXX CILAMCE)**. Armação dos Búzios-RJ-Brasil. nov. 2009.
- FILIPPINI, G., MALISKA, C. R., VAZ Jr, Miguel. An Element-based Finite Volume Method For Solid Mechanics Problems. **V European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECCOMAS CFD 2010)**. Lisbon-Portugal. jun. 2010.
- FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 505 p.
- FRYER, Y. D., BAILEY, C., CROSS, M. e LAI, C.H.. A Control

Volume Procedure for Solving the Elastic Stress-strain Equations on an Unstructured Mesh. **Journal: Applied Mathematical Modelling**, v. 15, n. 11-12, p. 639 – 645, 1991.

HEINBOCKEL, J. H.. **Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics**. Canada: TRAFFORD, 2001. 424 p.

HINTON, E. e CAMPBELL, J. S.. Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 8, p. 461-480, 1974.

IDELSOHN, S. R. e OÑATE, E.. Finite Volumes and Finite Elements: Two “Good Friends”. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 3323-3341, 1994.

LAHRMANN, Andreas. An Element Formulation for the Classical Finite Difference and Finite Volume Method Applied to Arbitrarily Shaped Domains. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.35, p. 893-913, 1992.

LANG, Serge. **Álgebra Linear**. 3. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003. 405 p.

LIMACHE, Alejandro C. e IDELSOHN, Sergio R.. On the Development of Finite Volume Methods for Computational Solid Mechanics. **Mecânica Computacional**, v. 26, p. 827-843, oct. 2007.

MALISKA, Clovis R.. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro-RJ: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2004. 453 p.

MANEH, "MANEH - Manual do Usuário", UDESC – Joinville – SC – Brasil, 2009.

MCBRIDE, Diane, CROFT, Nick e CROSS, Mark. Combined Vertex-Based - Cell-Centered Finite Volume Method for Flows in Complex Geometries. **Third International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries**. CSIRO, Melbourne, Australia, 2003.

- OÑATE, E., CERVERA, M., ZIENKIEWICZ, O. C.. A Finite Volume Format for Structural Mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, p. 181-201, 1994.
- PATANKAR, Suhas V.. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. New York: McGraw-Hill Book Company, 1980. 197 p.
- PHYSICA: PHYSICA LTD, Site internet <http://physica.co.uk>, 2010, 17/02/2010.
- RUGGIERO, M. A. G. e LOPES, V. L. R.. **Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: McGraw-Hill, 1988.
- SOBRINHO, Antônio da Silva Castro. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2006. 403 p.
- SLONE, A. K., PERICLEOUS, K., BAILEY, C. e CROSS, M., Dynamic Fluid-Structure Interaction Using Finite Volume Unstructured Mesh Procedures. **Computer & Structures**, v. 80, p. 371-390, 2002.
- SLONE, A. K., G. A., BAILEY, C. e CROSS, M.. Dynamic Solid Mechanics Using Finite Volume Methods. **Applied Mathematical Modeling**, v. 27, p. 69-87, 2003.
- SNYDER, R. D., BYARS, E. F., **Engineering Mechanics: Statics and Strength of Materials**. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1973.
- TAYLOR, G. A., BAILEY, C. e CROSS, M.. Solutions of the Elastic/Visco-Plastic Constitutive Equations: A Finite Volume Approach. **Applied Mathematical Modeling**, New York, v. 19, p. 746-760, dez. 1995.
- TAYLOR, G. A., BAILEY, C. e CROSS, M.. Computational Solid Mechanics Using a Vertex-Based Finite Volume Method. **Finite Volumes for Complex Applications II: Problems and Perspectives**, p. 507-515, 1999.

- TAYLOR, Gareth A., HUGHES, Michael, STRUSEVICH, Nadia, PERICLEOUS, Koulis. Finite Volume Methods Applied to the Computational Modelling of Welding Phenomena. **Applied Mathematical Modelling**, v. 26, p. 309-320, 2002.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N.. **Theory of Elasticity**. 3. ed. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1970. 567 p.
- VAZ Jr, Miguel. **Mecânica do Contínuo**. Joinville: UDESC, 2002. 153 p.
- VAZ Jr, Miguel. Cálculo das tensões nodais – um método aproximado utilizando “patch”. Joinville: Departamento de Engenharia Mecânica - UDESC, 2008. 8 p.
- VAZ Jr, Miguel, MUÑOZ-ROJAS, Pablo Andrés e FILIPPINI, Gerson. On the Accuracy of Nodal Stress Computation in Plane Elasticity using Finite Volumes and Finite Elements. **Computers and Structures**, 2009.
- VOLLER, Vaughan R., **Basic Control Volume Finite Element methods for Fluids and Solids**. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009. 170 p.
- XIA, G. H., ZHAO, Y., YEO, J.H., Lv, X. A 3D Implicit Unstructured-Grid Finite Volume Method for Structural Dynamics. **Computational Mechanics**, v. 40, p. 299-312, 2007.
- WHEEL, M. A. A Finite-Volume Approach to the Stress Analysis of Pressurized Axisymmetric Structures. **International Journal Pressure Vessel & Piping**, Northern Ireland, v. 68, p. 311-317, 1996.
- WHEEL, M. A.. A Finite-Volume Method for Analysing the Bending Deformation of Thick and Thin Plates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 147, p. 199-208, 1997a.
- WHEEL, M. A.. Modelling Incompressible Materials Using a Mixed Structural Finite Volume Approach. **5th ACME Conference – Computational mechanics in UK**, Londres-UK, p. 32-35, 1997b.

- WHEEL, M. A.. Further Observations on Modeling Incompressible Materials Using a Finite Volume Approach. **6th ACME Conference – Computational mechanics in UK**, Exeter-UK, p. 43-46, 1998.
- WHEEL, M. A. e WENKE, P.. A Finite Volume Method for Solid Mechanics Incorporating Rotational Degrees of Freedom. **Computers & Structures**, v. 81, p. 321-329, 2003.
- WILLIAMS, A. J., CROFT, T. N. e CROSS, M.. Computational Modeling of Metal Extrusion and Forging Processes. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 125, p. 573-582, 2002.
- FANG, Qing, TSUCHIYA, Takuya e YAMAMOTO, Tetsuro. Finite Difference, Finite Element and Finite Volume Methods Applied to Two-Point Boundary Value Problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 139, p. 9-19, 2002.
- YAZDANI, A. A., GAKWAYA, A., DHATT, G.. A Posteriori Error Estimator Based on the Second Derivative of the Displacement Field for Two-Dimensional Elastic Problems. **Computers & Structures**, v. 62, p. 318-338, 1997.
- ZARRABI, K., BASU, A.. A Finite Volume Element Formulation for Solution of Elastic Axisymmetric Pressurized Components. **International Journal of Pressure Vessels and Piping**. v. 77, p. 479-484, 2000.
- ZHAO, Y. Lv, X., HUANG, X.Y., XIA, G.H., SU, X.H.. A Matrix-Free Implicit Unstructured Multigrid Finite Volume Method for Simulating Structural Dynamics and Fluid-Structure Interaction. **Journal of Computational Physics**. v. 225, p. 120-144, 2007.
- ZIENKIEWICZ, O. C., OÑATE, E.. Finite Volumes vs Finite Elements Is There Really a Choice? **International Center for Numerical Methods in Engineering**, CIMNE Barcelona, Publicação no 8, nov. 1990.
- ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. e ZHU, J. Z. . The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. New Yourk: Elsevier: 2006. 733 p.

Apêndices

Apêndice A: Tabelas de Dados

Tabela A.1: Erros relativos para deslocamento da LN.

40x4			80x8		
EbFVM [%]	FEM [%]	FVM [%]	EbFVM [%]	FEM [%]	FVM [%]
0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000	0,000000000000000
-34,03519375011440	-32,97950736405750	-36,5459099278473	-71,76354822696290	-72,37370593046570	-69,11620604172850
-13,40691866021700	-9,65333207659184	-22,3163642259656	-25,12640601455380	-24,43910614407860	-26,78534173925730
-9,19814917318253	-5,05930572470015	-19,1881012252357	-11,67960649844390	-10,59650459520350	-14,53119375224910
-7,91593845806762	-3,75128961907654	-18,1793379433956	-6,48478575916686	-5,29106748639449	-9,69363887396372
-7,39203775009612	-3,20779436517852	-17,7771088434943	-4,15895586873426	-2,94763682417661	-7,46656346964389
-7,14110595933602	-2,94742644010421	-17,5944390763480	-2,99786507365156	-1,792518110892794	-6,32640144819515
-7,00942966258563	-2,81098863600367	-17,5052634674750	-2,36483841191711	-1,16737411623936	-5,6952598419291
-6,93667169314100	-2,73600173046976	-17,4607035764843	-1,99522700980666	-0,80427019010646	-5,32296166657810
-6,89550405320086	-2,69389591884330	-17,4391791505065	-1,76828135948610	-0,58244289878858	-5,09253257415535
-6,87228429844092	-2,67042864804028	-17,4301951236018	-1,62404276288178	-0,44237146611457	-4,94479535086565
-6,85969835960177	-2,65797121922836	-17,4282666514257	-1,53041061414502	-0,35226041613603	-4,84777423454026
-6,8572258766950	-2,65779228324742	-17,4532947829546	-1,46906419852952	-0,29396487773485	-4,78316938000719
-6,85204342627237	-2,65158708994658	-17,4404241129482	-1,42898648660942	-0,25656996841776	-4,73997935921888
-6,85143656137697	-2,65419289173298	-17,4467279812973	-1,40326919242518	-0,2332332900777	-4,71131112885138
-6,8509935499935	-2,67111578508714	-17,4726507210094	-1,38743273413506	-0,2195265778304	-4,69269490146153
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,37849238045964	-0,2124905913702	-4,68114867946506
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,37441440314943	-0,21013378056866	-4,67463550898566
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,37378691285801	-0,2110652402934	-4,67173623190461
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,37561416008495	-0,21431030023258	-4,67144552946043
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,3791848334961	-0,219114797658149	-4,67303411478208
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,38398355450604	-0,22515984941008	-4,67599797520897
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,38963622126507	-0,23190256430066	-4,67993038017203
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,39586681644432	-0,23913817876424	-4,68455279123161
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,40247163575175	-0,24667231226452	-4,68965230129370
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,40929957643495	-0,25436186558260	-4,69506934783903
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,41623834037111	-0,26210146918643	-4,70068390775185
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,42320448662881	-0,26981370700586	-4,70640514737674
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,43013618328863	-0,27744200854259	-4,71216596263554
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,43698787534890	-0,28494543223037	-4,71791391965972
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,44372632811756	-0,29222840343116	-4,72361091752284
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,45032766830570	-0,29949839288835	-4,72922834029323
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,45677515558466	-0,30645697763015	-4,73474514713870
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,46305749373421	-0,31324775254262	-4,74014613861807
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,46916754350861	-0,31983754956612	-4,74542062884852
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,47510133681986	-0,32622466034079	-4,75056142300801
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,48085731846038	-0,33240955793490	-4,75566402621485
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,48643576071539	-0,33839434012603	-4,76042602878747
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,49183831009805	-0,34418230067013	-4,76514662682586
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,49706763557361	-0,34977759860682	-4,76972624714812
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,50212715511181	-0,355185020298724	-4,77416625311666
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,50702082295144	-0,36040969586330	-4,77846871345753
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,51175296409932	-0,36545712043313	-4,78263622033908
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,51632814570736	-0,37033286429963	-4,78667174611375
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,52075107731970	-0,37504257009290	-4,79057853051566
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,52502653378372	-0,37959186746606	-4,79435999192333
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,52915829598222	-0,38398623180699	-4,79801965766794
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,53315410560598	-0,38823139603534	-4,80156110953192
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,53701563099400	-0,39233242284424	-4,80498794114984
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,54074844170602	-0,39629458375995	-4,80830372517384
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,54435698997944	-0,40012289746653	-4,81151198795571
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,54784559761226	-0,40382220901580	-4,81461619037695
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,55121844711229	-0,40739718583170	-4,81761971353648
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,55447957619307	-0,41085231544942	-4,82052584832169
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,55763287488453	-0,41419190570409	-4,82337780628281
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,56068208467367	-0,41742008663493	-4,82605862364475
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,56363079921385	-0,42054081367061	-4,82869134055601
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,56648246622713	-0,42355787176644	-4,83123881746896
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,56924039030716	-0,42647488022402	-4,83370382600700
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,57190773637557	-0,42929529797391	-4,83608903143027
-6,85089025413629	-2,71455485455641	-17,5204991884324	-1,57448753359991	-0,43202242916785	-4,83839699402253

Tabela A.1 (continuação): Erros relativos para deslocamento da LN.

40x4			80x8		
EbFVM [%]	FEM [%]	FVM [%]	EbFVM [%]	FEM [%]	FVM [%]
			-1,57698267955761	-0,43465942891600	-4,84063017101923
-6,91157770811218	-2,71744750459347	-17,5271034573894	-1,57939594446196	-0,43720930899016	-4,84279091906015
			-1,58172997513792	-0,43967494323568	-4,84488149740517
-6,91411419571771	-2,72019186183484	-17,5301070860822	-1,58398729844243	-0,44205907217335	-4,84690407290328
			-1,58617032394520	-0,44436430595982	-4,84886072934371
-6,91650484438695	-2,72277736339419	-17,5329265951545	-1,58828134697177	-0,44659312482146	-4,85075348764232
			-1,59032255772431	-0,44874787799518	-4,85258435139590
-6,91875499916780	-2,72520941269163	-17,5355742421078	-1,59229607615233	-0,45083079166492	-4,85435540837573
			-1,59420406827603	-0,45284402820920	-4,85606904778034
-6,92087161594599	-2,72749454096983	-17,5380659407524	-1,59604908159982	-0,45478992506178	-4,85772839990956
			-1,59783489718914	-0,45667174720955	-4,85933816304252
-6,92287192922225	-2,72962616005080	-17,5404256054010	-1,59956844134788	-0,45849564390492	-4,86090600388724
			-1,60126348272083	-0,46027509083626	-4,86244453125061
-6,92482822971858	-2,73170378964425	-17,5426822625262	-1,60294628265871	-0,46203827375332	-4,86397294302996
			-1,60466009307168	-0,46383844594915	-4,86551446307981
-6,92690396723452	-2,73385070398978	-17,5447835021369	-1,60645419502512	-0,46573590725820	-4,86707681798551
			-1,60831828228123	-0,46779128845612	-4,86857605860577
-6,92927709022083	-2,73791232062497	-17,5459153693101	-1,60988230562017	-0,46945416840434	-4,86956737407379
			-1,60983813460908	-0,47085938971589	-4,86818194144960
-6,91803372079332	-2,72317018775072	-17,5397325136349	-1,59102089792050	-0,44776423114321	-4,85562197547581

Tabela A.2: Deslocamento da extremidade livre sobre a LN.

N. Nós	EbFVM	FEM
	[x 10 ⁻⁵ m]	[x 10 ⁻⁵ m]
205	1,77768825694946	1,85780216021432
729	1,87942405517524	1,90125807987894
1573	1,89984156538260	1,90977599347745
2737	1,90719486680471	1,91286395433573
4221	1,91066850470631	1,91434199842430
6025	1,91259095421700	1,91517334538543

Tabela A.3: CC para extremidades esquerda e direita do problema Cubic com malha 32x16.

y [m]	Esquerda		Direita	
	u(x;y) (x 10 ⁻⁵ m)	v(x;y) (x 10 ⁻⁴ m)	u(x;y) (x 10 ⁻⁷ m)	v(x;y) (x 10 ⁻⁷ m)
-2,00	10,00000000000000	-3,125	0,000000000000	-75,000000
-1,75	8,6517333984375	-3,125	-9,82666015625	-57,421875
-1,50	7,3427734375000	-3,125	-15,72265625000	-42,187500
-1,25	6,0675048828125	-3,125	-18,24951171875	-29,296875
-1,00	4,8203125000000	-3,125	-17,96875000000	-18,750000
-0,75	3,5955810546875	-3,125	-15,44189453125	-10,546875
-0,50	2,3876953125000	-3,125	-11,23046875000	-4,687500
-0,25	1,1910400390625	-3,125	-5,89599609375	-1,171875
0,00	0,0000000000000	-3,125	0,00000000000	0,000000
0,25	-1,1910400390625	-3,125	5,89599609375	-1,171875
0,50	-2,3876953125000	-3,125	11,23046875000	-4,687500
0,75	-3,5955810546875	-3,125	15,44189453125	-10,546875
1,00	-4,8203125000000	-3,125	17,96875000000	-18,750000
1,25	-6,0675048828125	-3,125	18,24951171875	-29,296875
1,50	-7,3427734375000	-3,125	15,72265625000	-42,187500
1,75	-8,6517333984375	-3,125	9,82666015625	-57,421875
2,00	-10,0000000000000	-3,125	0,00000000000	-75,000000

Tabela A.4: Tensão cisalhante sobre a LN para malha 60×6 elementos.

x [m]	EbFVM		MEF						MVF [MPa]
	CDN [MPa]	PNDL [MPa]	CDN [MPa]	Ex [MPa]	SL [MPa]	SL_ABX [MPa]	SG [MPa]	SPRE [MPa]	
0,0000	-44,27	5,12	-41,91	11,03	-41,87	11,01	5,12	-4,23	47,51
0,8333	-22,16	-25,81	-21,28	-24,26	-21,31	-24,27	-7,02	-42,36	-24,80
1,6667	-63,03	-65,89	-64,30	-66,24	-64,26	-66,24	-79,31	-62,54	-61,58
2,5000	-69,84	-71,80	-69,66	-71,25	-69,66	-71,25	-73,23	-72,82	-70,65
3,3333	-68,64	-69,80	-67,54	-68,31	-67,58	-68,31	-71,03	-74,92	-71,39
4,1667	-67,15	-68,17	-65,84	-66,60	-65,80	-66,60	-68,23	-73,51	-70,56
5,0000	-66,45	-67,45	-65,27	-66,01	-65,27	-66,01	-67,88	-72,55	-69,83
5,8333	-66,20	-67,20	-65,12	-65,87	-65,15	-65,87	-67,72	-72,21	-69,42
6,6667	-66,12	-67,12	-65,09	-65,85	-65,06	-65,84	-67,63	-72,12	-69,22
7,5000	-66,11	-67,11	-65,09	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,14
8,3333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,13	-65,85	-67,72	-72,11	-69,10
9,1667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,07	-65,85	-67,64	-72,11	-69,09
10,0000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
10,8333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,12	-65,85	-67,71	-72,11	-69,08
11,6667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,07	-65,85	-67,65	-72,11	-69,08
12,5000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
13,3333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,12	-65,85	-67,71	-72,11	-69,08
14,1667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,08	-65,85	-67,65	-72,11	-69,08
15,0000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
15,8333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,12	-65,85	-67,70	-72,11	-69,08
16,6667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,08	-65,85	-67,66	-72,11	-69,08
17,5000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
18,3333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,11	-65,85	-67,70	-72,11	-69,08
19,1667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,09	-65,85	-67,66	-72,11	-69,08
20,0000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
20,8333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,11	-65,85	-67,69	-72,11	-69,08
21,6667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,09	-65,85	-67,67	-72,11	-69,08
22,5000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
23,3333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
24,1667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
25,0000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08

Tabela A.4 (continuação): Tensão cisalhante sobre a LN para malha 60×6 elementos.

x [m]	EbFVM		MEF						MVF [MPa]
	CDN [MPa]	PNDL [MPa]	CDN [MPa]	Ex [MPa]	SL [MPa]	SL_ABX [MPa]	SG [MPa]	SPRE [MPa]	
25,8333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
26,6667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
27,5000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
28,3333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,09	-65,85	-67,67	-72,11	-69,08
29,1667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,11	-65,85	-67,69	-72,11	-69,08
30,0000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
30,8333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,09	-65,85	-67,66	-72,11	-69,08
31,6667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,11	-65,85	-67,70	-72,11	-69,08
32,5000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
33,3333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,08	-65,85	-67,66	-72,11	-69,08
34,1667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,12	-65,85	-67,70	-72,11	-69,08
35,0000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
35,8333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,08	-65,85	-67,65	-72,11	-69,08
36,6667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,12	-65,85	-67,71	-72,11	-69,08
37,5000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
38,3333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,07	-65,85	-67,65	-72,11	-69,08
39,1667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,12	-65,85	-67,71	-72,11	-69,08
40,0000	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,08
40,8333	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,07	-65,85	-67,64	-72,11	-69,09
41,6667	-66,10	-67,11	-65,10	-65,85	-65,13	-65,85	-67,72	-72,11	-69,10
42,5000	-66,11	-67,11	-65,09	-65,85	-65,10	-65,85	-67,68	-72,11	-69,14
43,3333	-66,12	-67,12	-65,09	-65,85	-65,06	-65,84	-67,63	-72,12	-69,22
44,1667	-66,20	-67,20	-65,12	-65,87	-65,15	-65,87	-67,72	-72,21	-69,42
45,0000	-66,45	-67,45	-65,27	-66,01	-65,27	-66,01	-67,88	-72,55	-69,83
45,8333	-67,15	-68,17	-65,84	-66,60	-65,80	-66,60	-68,23	-73,51	-70,56
46,6667	-68,64	-69,80	-67,54	-68,31	-67,58	-68,31	-71,03	-74,92	-71,39
47,5000	-69,84	-71,80	-69,66	-71,25	-69,66	-71,25	-73,23	-72,82	-70,65
48,3333	-63,03	-65,89	-64,30	-66,24	-64,26	-66,24	-79,31	-62,54	-61,58
49,1667	-22,16	-25,81	-21,28	-24,26	-21,31	-24,27	-7,02	-42,36	-24,80
50,0000	-44,27	5,12	-41,91	11,03	-41,87	11,01	5,12	-4,23	47,51

Tabela A.5: As componentes da matriz rigidez e vetor força utilizados no *Patch Test* A, B, C e Simples-elemento.

<i>u</i>			<i>v</i>		
<i>i</i>	<i>j</i> (*)	K_{ij} [N/m]	<i>i</i>	<i>j</i> (*)	K_{ij} [N/m]
1	1	1,000E+0	5	5	1,000E+0
1	9	0,000E+0	5	9	0,000E+0
2	1	-5,082E+2	6	1	-2,997E+1
2	2	7,418E+2	6	2	-2,273E+2
2	3	8,242E+1	6	3	6,244E+1
2	4	-3,159E+2	6	4	1,948E+2
2	5	-2,498E+0	6	5	-9,022E+1
2	6	-2,273E+2	6	6	5,226E+2
2	7	3,497E+1	6	7	-2,341E+2
2	8	1,948E+2	6	8	-1,982E+2
2	9	1,000E+0	6	9	1,000E+0
3	1	-4,121E+1	7	1	-1,623E+2
3	2	8,242E+1	7	2	3,497E+1
3	3	4,670E+2	7	3	1,299E+2
3	4	-5,082E+2	7	4	-2,498E+0
3	5	-1,623E+2	7	5	-1,021E+2
3	6	6,244E+1	7	6	-2,341E+2
3	7	1,299E+2	7	7	4,264E+2
3	8	-2,997E+1	7	8	-9,022E+1
3	9	4,000E+0	7	9	4,000E+0
4	4	1,000E+0	8	1	7,326E+1
4	9	0,000E+0	8	2	1,984E+2
			8	3	-3,358E+1
			8	4	-2,381E+2
			8	5	-3,262E+2
			8	6	-2,450E+2
			8	7	-4,350E+1
			8	8	6,147E+2
			8	9	-1,000E+0

(*)
Quando *j* for igual a 9, significa termo independente.

Obs: Os coeficientes acima estão preparados para o caso do Teste C onde existem forças prescritas, assim para os testes A ou B, basta estipular os deslocamentos prescritos nos termos fontes, atribuir à componente diagonal da linha o valor 1,0 e zerar os demais coeficientes da linha.

Tabela A.6: Custo computacional em segundos nos diversos algoritmos de solução para o EbFVM e FEM.

Nº Incógnitas	Custo computacional em segundos				
	EbFVM				
	ELG	ELGE	GS	GS-SOR(*)	GS-SOR-RDR(*)
78	0,016	0,002	0,037	0,016	0,015
398	0,187	0,020	3,497	0,858	0,733
1742	15,459	0,204	66,470	17,191	14,992
3826	163,457	2,847	502,116	111,755	94,411
6698	870,589	11,868	1684,113	362,596	317,367
26114	-	296,959	-	-	-
	FEM				
78	0,016	0,002	0,049	0,016	-
398	0,187	0,016	2,928	0,593	0,561
1742	15,350	0,199	66,780	13,042	11,653
3826	163,582	2,836	437,152	74,164	64,438
6698	871,244	11,733	1449,305	241,517	215,904
26114	-	288,110	-	-	-

(*) Coeficiente de sobre-relaxação $\omega = 1,74$.

Apêndice B: Aplicação de Galerkin à Elasticidade Plana

Aplicação de Galerkin à Elasticidade Plana

Nesta aplicação, o domínio é o **elemento**, representado aqui por X_k e a função peso são as próprias **funções utilizadas na parametrização** do elemento (Eq. (178)). Assim \mathbf{W} assume o valor da equação

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \phi_j & 0 & 0 \\ 0 & \phi_j & 0 \\ 0 & 0 & \phi_j \end{bmatrix} \quad \text{com } j = 1..n_{nptl}, \quad (125)$$

onde ϕ_j representa as funções de parametrização e n_{nptl} o número de nós locais.

Prosseguindo com a ortogonalização do resíduo e **tomando apenas o k -ésimo termo da somatória** da Eq. (46), algumas observações são pertinentes: O primeiro termo desta equação refere-se aos fluxos de força sobre as fronteiras do elemento e ao se montar o sistema global de equações discretas esses fluxos se cancelam entre si. O segundo termo representa efetivamente a parte que descreve a interação no interior do domínio, assim é a parte principal da dedução e o terceiro termo refere-se à ponderação das forças de corpo no interior do elemento. Chamando a soma do primeiro e terceiro termo de termo fonte \mathbf{b} pode-se escrever as equações

$$\int_{X_k} \text{div}(\mathbf{W})\boldsymbol{\sigma}^* dX_k = \mathbf{b} \quad (126)$$

$$\mathbf{b} = \int_{X_k} \mathbf{W} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dX_k + \int_{X_k\Gamma} \mathbf{W} \boldsymbol{\sigma}^* dX_k\Gamma \quad (127)$$

Para que os termos expandidos não sejam demasiadamente grandes e como a notação indicial facilita a implementação computacional, esta será utilizada. Também expressando o diferencial de volume, dX_k , como $e dx dy$, onde e é a espessura constante do domínio, adotando S_k como a superfície do elemento com espessura contante e L_k como a linha que percorre a fronteira do elemento no sentido anti-horário, pode-se reescrever as equações (126) e (127) conforme as equações

$$\int_{S_k} \int \phi_{l,j} \sigma_{ij}^* e dx dy = b_i \quad (128)$$

$$b_i = \int_{S_k} \phi_l f_i e dx dy + \oint_{L_k} \phi_l \sigma_{ij}^* e dL_{k_j} \quad (129)$$

onde os índices i e j variam de 1 a 3 e representam as componentes na direção Ox , Oy e Oz , k representa o k -ésimo elemento e $l = 1..n_{npl}$ representando a l -ésima função peso.

No entanto, estas equações ainda apresentam dificuldades quanto a integração em S_k e L_k , pois para um elemento convexo com formato qualquer. Isso advém da dificuldade em se representar os extremos de integrações, ou seja, as arestas do elemento não são paralelas com o sistema cartesiano. Para solucionar este problema, conforme já comentado na secção 3.2.3, as equações (128) e (129) são levadas para o espaço S^h , o que é efetivamente levado a termo fazendo-se a parametrização de S_k e L_k . Portanto considerando que o problema é 2D, a Eq. (182) fornece o equivalente parametrizado para a área diferencial, também alterando os limites de integração para o novo domínio parametrizado conforme a Fig. 149, obtém-se as equações

$$e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_{l'j} \sigma_{ij}^* \|J\| dr ds = b_i \quad (130)$$

$$b_i = e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_l f_i \|J\| dr ds + \oint_{L_k} \phi_l \sigma_{ij}^* e dL_{k_j} \quad (131)$$

Onde J é calculado pela Eq. (181). Para concluir a discretização, é necessário ainda expressar a tensão σ_{ij}^* em termos dos deslocamentos. Para isso utiliza-se a Eq. (25), assim a Eq. (130) assume a forma

$$eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_{l'j} \{ b \varepsilon_{mm}^* \delta_{ij} + [a + (1 - D)b] \varepsilon_{ij}^* \} \|J\| dr ds = b_i \quad (132)$$

onde A , a , b e D são constantes definidas pela Tab.1 e como aqui se está tratando de Estado Plano, $D = 2$, satisfazendo a condição de EPT ou EPD. Ainda, lembrando que por ser material isotrópico, a constante elástica A pode ser retirada de dentro da integral. Na sequência as deformações são substituídas pelas relações cinemáticas com os deslocamentos conforme a Eq. (5) gerando a equação

$$eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_{l'j} \left\{ b u_{m'm}^* \delta_{ij} + \frac{a+(1-D)b}{2} (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) \right\} \|J\| dr ds = b_i \quad (133)$$

Por fim os deslocamentos são aproximados através das funções

de deslocamento e para o caso do elemento isoparamétrico são idênticas as equações utilizadas na parametrização, Eq. (180). Dessa forma, pode-se expressar os deslocamentos aproximados por

$$u^{i*} = u_a^i \phi_a \quad \text{com } a = 1..n_{pts} \text{ e } i = 1..2 \quad (134)$$

onde o gradiente é dado por

$$u_{i,j}^{i*} = u_a^i \phi_{a',j} \quad , \quad (135)$$

onde u_a^i são os valores nodais dos deslocamentos nas direções principais do sistema de coordenadas globais, sendo o índice i indicador das *direções principais* e o índice a indicador do *nó local*, $\phi_{a',j}$ a derivada parcial da função de deslocamento em relação a direção principal j . Assim na Eq. (133), o gradiente de deslocamentos $u_{i,j}^{i*}$, deve ser substituído pela Eq. (135) o que leva a

$$eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_{V,j} \{ b u_a^m \phi_{a',m} \delta_{ij} + C (u_a^i \phi_{a',j} + u_a^j \phi_{a',i}) \} \|J\| dr ds = b_i \quad (136)$$

onde C é dado por

$$C = \frac{a+(1-D)b}{2} \quad . \quad (137)$$

A Eq. (136) é a menor unidade de relacionamento entre as constantes elásticas do material e os deslocamentos discretos. A integração ocorre ao longo do elemento e é sobre as variáveis parametrizadas r e s . Os valores que são dependentes destas variáveis são as funções de parametrização (embutidas no Jacobiano), as de deslocamento ($\phi_{a',i}$, $\phi_{a',j}$ e $\phi_{a',m}$) e a função peso ($\phi_{V,j}$). Antes de obter a matriz rigidez nodal é interessante relacionar os índices envolvidos. São eles:

- $i = 1, 2$ são direções principais, define a linha da matriz nodal, direção em que o equilíbrio da quantidade de movimento está sendo verificado. É um índice livre, portanto quando expandido abre novas linhas, ou seja, equações de equilíbrio em cada direção principal, que para o caso 2D são duas, Ox e Oy ;
- $j = 1, 2$ são direções principais, define a coluna da matriz nodal, ou seja, se a contribuição é de um deslocamento na direção principal Ox ou Oy , aos quais chamar-se-á mais adiante de des-

locamento u ou v respectivamente. Este índice é repetido (índice falso), pois $\phi_{l'j}$ **multiplica** cada um dos 3 termos dentro das chaves, que por sua vez também possuem índice j ;

- $m = 1, 2$ são direções principais. É um índice repetido (falso), e serve para implementar o **operador traço**;
- $l = 1..n_{ptsl}$, define o **nó local principal**, aquele a que se refere a equação de equilíbrio discreta. Este por sua vez é um índice livre e gera uma nova matriz nodal. Onde onde n_{ptsl} é o número de nós locais (ou seja, por elemento). Este índice será expandido apenas em tempo de execução computacional;
- $a = 1..n_{ptsl}$, define o **nó local secundário**. É o nó que gera influência sobre o nó principal l . a é um índice livre e gera uma nova matriz nodal. Este índice será expandido apenas em tempo de execução computacional.

O próximo passo é expandir o índice i , j e m a fim de obter a **Matriz Rigidez Nodal**. Assim para $m = 1..2$ e $i = 1$ tem-se a equação de equilíbrio na direção Ox

$$eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_{l'j} \{ b (u_a^1 \phi_{a'1} + u_a^2 \phi_{a'2}) \delta_{1j} + C (u_a^1 \phi_{a'j} + u_a^j \phi_{a'1}) \} \|J\| drds = b_1 \quad (138)$$

Aplicando a distributiva à partir de $\phi_{l'j}$ sobre os termos do integrando e expandindo-se o índice repetido j , tem-se a equação

$$eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \{ b (u_a^1 \phi_{a'1} + u_a^2 \phi_{a'2}) \delta_{11} \phi_{l'1} + C u_a^1 \phi_{a'1} \phi_{l'1} + C u_a^1 \phi_{a'2} \phi_{l'2} + C u_a^1 \phi_{a'1} \phi_{l'1} + C u_a^2 \phi_{a'1} \phi_{l'2} \} \|J\| drds = b_1 \quad (139)$$

restando apenas as expansões das relações nodais, ou seja, l como nó principal e a como nó secundário, que serão feitas durante a implementação computacional.

Nesta equação, nomeando u^1 e u^2 para u e v respectivamente, reagrupando os termos que possuem u e v , mudando a nomenclatura dos índices 1 e 2 para x e y e de a e l para i e j respectivamente, além disso o δ_{11} tem valor 1, obtém-se

$$eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \{[(b + 2C) \phi_{i'x} \phi_{j'y} + C \phi_{i'y} \phi_{j'x}] u_i + [b \phi_{i'y} \phi_{j'x} + C \phi_{i'x} \phi_{j'y}] v_i\} \|J\| drds = b_x \quad (140)$$

O mesmo pode ser feito para a direção Oy , obtendo-se

$$eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \{[b \phi_{i'x} \phi_{j'y} + C \phi_{i'y} \phi_{j'x}] u_i + [(b + 2C) \phi_{i'y} \phi_{j'x} + C \phi_{i'x} \phi_{j'y}] v_i\} \|J\| drds = b_y \quad (141)$$

Nas equações (140) e (141) tem-se:

- $j = 1..n_{plsl}$ define o nó local principal;
- $i = 1..n_{plsl}$ define o nó local secundário;
- e , é a espessura do estado plano;
- C é dado pela Eq. (137);
- A , a , b e D estão na Tab.1.

Os termos b_x e b_y por sua vez são obtidos a partir da Eq. (131). A qual tem a parcela de contribuição de forças de corpo (f_i) ponderadas com as funções peso ϕ_j e as que atuam na fronteira do elemento ($F_{i_{\Gamma e}}$) sendo que para estas últimas no momento da montagem do sistema global de equações, ocorre o cancelamento com termos idênticos de elementos que tem mesma fronteira. No termo fonte, ainda forças pontuais ($F_{i_{Pontual}}$ que atuam sobre nós) e forças distribuídas ($F_{i_{Distrib}}$) podem ser adicionadas. Dessa forma, as equações para b_x e b_y já com a nomenclatura alterada dos índices assumem respectivamente a forma das equações

$$b_x = e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_j f_x \|J\| drds + F_{x_{\Gamma e}} + F_{x_{Pontual}} + F_{x_{Distrib}} \quad (142)$$

$$b_y = e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_j f_y \|J\| drds + F_{y_{\Gamma e}} + F_{y_{Pontual}} + F_{y_{Distrib}} \quad (143)$$

Finalmente as equações (140), (141), (142) e (143) podem ser representadas pelo **Sistema Nodal**

$$\mathbf{K}^n \mathbf{u}^n = \mathbf{b}^n \quad (144)$$

Onde n refere-se a *Nodal* e \mathbf{u}^n , \mathbf{K}^n e \mathbf{b}^n são definidos respectivamente nas equações

$$\mathbf{u}^n = \left\{ \begin{array}{c} u_i \\ v_i \end{array} \right\} \quad (145)$$

$$\mathbf{K}^n = \left[\begin{array}{cc} K_{xu}^n & K_{xv}^n \\ K_{yu}^n & K_{yv}^n \end{array} \right] \quad (146)$$

$$\mathbf{b}^n = \left\{ \begin{array}{c} b_x \\ b_y \end{array} \right\} \quad (147)$$

onde os termos de \mathbf{K}^n e \mathbf{b}^n (suprimindo-se $F_{i_{\Gamma e}}$ neste último) são dados pelas equações

$$\begin{aligned} K_{xu}^n &= eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [(b + 2C) \phi_{i'x} \phi_{j'x} + C \phi_{i'y} \phi_{j'y}] \|J\| \, drds \\ K_{xv}^n &= eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [C \phi_{i'x} \phi_{j'y} + b \phi_{i'y} \phi_{j'x}] \|J\| \, drds \\ K_{yv}^n &= eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [b \phi_{i'x} \phi_{j'y} + C \phi_{i'y} \phi_{j'x}] \|J\| \, drds \\ K_{yu}^n &= eA \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [C \phi_{i'x} \phi_{j'x} + (b + 2C) \phi_{i'y} \phi_{j'y}] \|J\| \, drds \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} b_x &= e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_j f_x \|J\| \, drds + F_{xPontual} + F_{xDistrib} \\ b_y &= e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_j f_y \|J\| \, drds + F_{yPontual} + F_{yDistrib} \end{aligned} \quad (149)$$

Apesar de não explícito no sistema nodal (Eq. (144)) é importante lembrar que este refere-se a um j -ésimo nó principal de um k -ésimo elemento. Por fim é interessante observar-se as similaridades entre os termos de \mathbf{K}^n onde $\phi_{i'x} \phi_{j'x}$, $\phi_{i'y} \phi_{j'y}$, $\phi_{i'x} \phi_{j'y}$, $\phi_{i'y} \phi_{j'x}$ e $(b + 2C)$ se repetem. Essa observação é útil quando deseja-se diminuir o tempo de processamento dos respectivos coeficientes.

Quanto a montagem do sistema global de equações, esta será abordada após a aplicação do EbFVM à elasticidade plana, pois tanto este, como o FEM-Galerkin compartilham do mesmo algoritmo.

Apêndice C: Cômputo de Tensões

Cômputo de Tensões

A análise de tensões é frequentemente requerida em aplicações na engenharia. Para o FEM-Galerkin utilizando elementos isoparamétricos, os pontos de integração apresentam a maior precisão no cômputo das tensões. Mas para o usuário, por questões de projeto e visualização, é interessante apresentar os valores nodais das tensões. Entretanto, é bem conhecido que as funções de interpolação não apresentam bom comportamento próximo às extremidades da região de interpolação fazendo com que as tensões aproximadas nestes pontos apresentem os piores valores. É, portanto, razoável se esperar que valores de tensões tomados no interior do elemento sejam mais precisos que no contorno do mesmo (HINTON e CAMPBELL, 1974, p. 461-462).

Em elementos finitos baseados em deslocamentos, o campo de tensão normalmente resulta descontínuo através das fronteiras inter-elementos. Isto é, para um mesmo nó pertencente a dois ou mais elementos, tem-se para cada elemento uma tensão diferente calculada sobre o nó. Para ajustar esta falta de continuidade das tensões na fronteira do elemento recorre-se aos chamados *esquemas de suavização*. Alguns dos esquemas normalmente utilizados são *Cômputo Direto sobre o Nó* (CDN), *Extrapolação* (Ex), *Suavização Local* (SL) e *Suavização Global* (SG). Apesar do enfoque dos esquemas de suavização, aqui utilizados, serem sobre a análise de tensões, estes podem ser utilizados para suavizar qualquer campo de variável derivado de valores obtidos pelo método no interior dos elementos.

O valor de determinada tensão σ , suavizada para o i -ésimo nó global será especificada por $\hat{\sigma}_i$. Onde o “^” indica a suavização. Além disso a especificação tensorial σ_{ij} será utilizada. Nas demais equações quando a tensão for indicada, sempre estará se referindo a apenas uma das componentes σ_{ij} , e.g., para EP σ_{xx} , σ_{yy} ou σ_{xy} . Portanto os índices que eventualmente sejam utilizados para a tensão referem-se a numeração de nós locais, globais ou pontos específicos.

Cômputo Direto no Nó (CDN)

As tensões $\sigma_{ij}(r, s)$, em qualquer ponto no interior de um elemento podem ser obtidas pela relação usual entre tensão e deslocamento. Essa relação é obtida substituindo a Eq. (5) na Eq. (25), obtendo-se assim

$$\sigma_{ij}(r, s) = A \{ b u_a^m \phi_{a'm} \delta_{ij} + C (u_a^i \phi_{a'j} + u_a^j \phi_{a'i}) \}, \quad (150)$$

onde C é calculado pela Eq. (137) e as demais constantes são definidas na Tab. 1. Os índices i, j e m , são as direções principais e variam conforme a dimensão do problema, o índice a refere-se à numeração local de nós do elemento, portanto para um elemento linear quadrilátero $a = 1..4$. Lembrando ainda que o deslocamento u^1 é o deslocamento na direção Ox do sistema cartesiano, ao qual chamar-se-á u , u^2 é o deslocamento na direção Oy do sistema cartesiano, ao qual chamar-se-á v . Portanto u_a e v_a , representam os valores discretos dos deslocamentos nos nós do elemento.

Por fim, o procedimento para determinar a tensão em determinado nó é:

- O nó é rastreado localizando-se todos os elementos que o contém;
- Em cada elemento localizado, substitui-se a n -upla (r, s) referente a posição do nó na Eq. (150), obtendo-se a tensão referente a cada elemento;
- Por fim, a tensão suavizada é obtida pela média dos valores nodais oriundos de cada elemento. Por exemplo, se determinado nó faz parte de 3 elementos, 3 valores de tensão serão obtidos, então uma média é computada sobre o nó em questão.

A equação

$$\hat{\sigma}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_e} \sigma_j}{n_e}, \quad (151)$$

apresenta o valor de $\hat{\sigma}_i$ para o i -ésimo nó que pertence a n_e elementos, σ_j é a tensão no nó calculada a partir do j -ésimo elemento.

Extrapolação (Ex)

É uma alternativa para os elementos Lagrangianos Lineares, que consiste no cômputo das tensões sobre os pontos de integração de Gauss, seguido da extrapolação para os nós. Isso é feito para cada elemento e a tensão suavizada $\hat{\sigma}_i$, sobre o i -ésimo nó, é obtida por uma média semelhante ao CDN.

Para ilustrar esta técnica um caso hipotético é descrito: Deseja-se

saber $\hat{\sigma}_i$ para o i -ésimo nó. Este nó faz parte da montagem de 3 elementos. Em cada elemento são determinadas as tensões σ_i^{Ex} em seus nós locais à partir da extrapolação das tensões calculadas sobre os pontos de Gauss, σ_{GP1} , σ_{GP2} , σ_{GP3} e σ_{GP4} , que por sua vez são calculadas à partir da Eq. (150) com as n -uplas correspondentes aos pontos de Gauss. A determinação das tensões σ_i^{Ex} , é feita com o auxílio da equação

$$\sigma^{Ex}(r; s) = G_1\sigma_{GP1} + G_2\sigma_{GP2} + G_3\sigma_{GP3} + G_4\sigma_{GP4}, \quad (152)$$

a qual já está ajustada de acordo com o sistema utilizado para extrapolação da Fig. 145. Por fim, a tensão suavizada $\hat{\sigma}_i$ é obtida pela média das tensões σ_i^{Ex} obtidas para o nó i em cada elemento. Esta média é mostrada na Eq. (151), onde para este caso $n_e = 3$ e σ_j refere-se a σ_j^{Ex} .

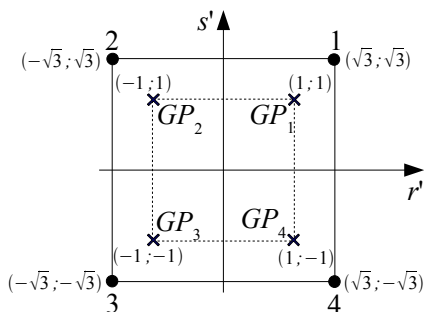


Figura 145: Sistema $r'O s'$ utilizado na extrapolação.

Na Eq. (152) G_i são as funções de extrapolação que assumem o valor 1 sobre o i -ésimo GP. Estas são idênticas as funções ϕ_i apresentadas na Eq. (178), considerando porém agora o sistema $r'O s'$. De forma a agilizar o processo de extrapolação, a Eq. (152) pode ser expandida como um sistema para fornecer os valores extrapolados sobre os nós. Assim obtém-se

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_1^{Ex} \\ \sigma_2^{Ex} \\ \sigma_3^{Ex} \\ \sigma_4^{Ex} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 1 - \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 1 - \sqrt{\frac{3}{4}} \\ 1 - \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 - \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 1 + \sqrt{\frac{3}{4}} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \sigma_{GP1} \\ \sigma_{GP2} \\ \sigma_{GP3} \\ \sigma_{GP4} \end{matrix} \right\} \quad (153)$$

Onde cada linha de termos da matriz, são um conjunto de funções G_i aplicadas sobre as n -uplas $(r'; s')$ de cada um dos nós conforme a Tab. 21. Por exemplo, G_i aplicadas as coordenadas do nó 1 geram a 1ª linha.

Tabela 21: Coordenadas nodais no sistema $r'O s'$.

Nó	r'	s'
1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
3	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
4	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

Suavização Local (SL)

Para um elemento, tendo-se a tensão não suavizada σ , o procedimento para avaliar a tensão suavizada $\hat{\sigma}$ sobre o i -ésimo nó utilizando as *funções de suavização* G_i , é a minimização do funcional dado por

$$\chi = \iint_{X_k} (e^{sl})^2 \|J\| dr ds \quad (154)$$

onde e^{sl} representa a diferença entre as tensões não suavizadas e as suavizadas conforme a equação

$$e^{sl} = \sigma - \sigma^{sl} \quad (155)$$

e σ^{sl} representa a tensão suavizada para o elemento que pode ser aproximada conforme

$$\sigma^{sl}(r; s) = G_i \sigma_i^{sl} \quad \text{com } i = 1..n_{nptl} \quad (156)$$

O funcional representa a aproximação pelo método dos mínimos quadrados (HINTON e CAMPBELL, 1974). Isso é feito **para cada k -ésimo elemento** (X_k) que o nó pertence, posteriormente a média dos valores, que cada elemento fornece para o i -ésimo nó, é feita utilizando-se a Eq. (151), onde σ_j são os valores σ_j^{sl} a serem localizados a seguir.

Na Eq. (156), n_{npl} é o número de nós do elemento, as funções de interpolação G_i são as mesmas funções de forma utilizadas na parametrização do elemento, porém não necessariamente devem ser iguais. σ_i^{sl} são os valores procurados da tensão suavizada para os nós do elemento. Na Eq. (154), o Jacobiano está presente devido a transformação dos diferenciais que originalmente são $dx dy$.

O mínimo é encontrado fazendo-se $\frac{\partial \chi}{\partial \sigma^{sl}} = 0$, o que fornece

$$\iint_{X_k} G_i \sigma_i^{sl} G_j \|J\| dr ds - \iint_{X_k} \sigma(r; s) G_j \|J\| dr ds = 0 \quad (157)$$

esta por sua vez integrada numericamente, gera a expressão **para o elemento** na forma da equação

$$\mathbf{S}^e \sigma^{sl} = \mathbf{f}^e \quad (158)$$

Para elementos em forma retangular e em paralelogramo, o valor do Jacobiano é constante, então a Eq. (158) passa a ser conforme

$$\begin{bmatrix} \iint G_1 G_1 dr ds & \cdots & \iint G_1 G_n dr ds \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \iint G_n G_1 dr ds & \cdots & \iint G_n G_n dr ds \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1^{sl} \\ \vdots \\ \sigma_n^{sl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \iint G_1 \sigma dr ds \\ \vdots \\ \iint G_n \sigma dr ds \end{Bmatrix} \quad (159)$$

esta por sua vez na forma matricial apenas para melhorar o entendimento.

Se G_i são funções lineares e uma regra de integração de Gauss 2×2 é adotada na avaliação da matriz de suavização \mathbf{S}^e e do vetor \mathbf{f}^e na Eq. (158), então pode-se mostrar que as tensões suavizadas nos nós são dadas pela Eq. (153), considerando no lugar de σ_i^{Ex} o valor de σ_i^{sl} . Caso contrário, se G_i não forem funções lineares, então deve-se determinar numericamente a Eq. (157), não sendo possível utilizar as equações (153) e (159).

Suavização Global (SG)

Este procedimento de suavização utiliza o método dos mínimos quadrados aplicado a todo o domínio do problema Ω_{FE} (HINTON e CAMPBELL, 1974). Inicialmente o que se deseja calcular são as tensões suavizadas nodais, avaliadas no elemento pela função suavizada $\sigma^{sl}(r; s)$ utilizada na SL reescrita aqui.

$$\sigma^{sl}(r; s) = G_i \sigma_i^{sl} \quad \text{com } i = 1..n_{nptl} \quad (156 \text{ repetida})$$

Onde G_i são as funções de interpolação para o i -ésimo nó do elemento. σ_i^{sl} são as tensões suavizadas sobre cada i -ésimo nó. A diferença entre as tensões suavizadas e não suavizadas em qualquer ponto no interior do elemento é dado pela Eq. (155). O funcional apresentado na Eq. (154), é para um elemento X_k e para estender este ao domínio, é suficiente lembrar que $\Omega_{FE} = \sum_{k=1}^{n_{elem}} X_k$, então pode-se escrever o funcional

$$\chi = \sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[\iint_{X_k} (e^{sl})^2 \|J\| drds \right]. \quad (160)$$

Minimizando este funcional em relação às tensões suavizadas nodais, $\frac{\partial \chi}{\partial \sigma^{sl}} = 0$, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[\iint_{X_k} G_i \hat{\sigma}_{i^*} G_j \|J\| drds - \iint_{X_k} \sigma(r; s) G_j \|J\| drds \right] = 0 \quad (161)$$

a qual integrando numericamente gera para cada elemento uma expressão na forma da Eq. (158), as quais devem ser acumuladas para formar o seguinte sistema global

$$\mathbf{S} \hat{\sigma} = \mathbf{f}, \quad (162)$$

o qual resolvido, fornece as tensões suavizadas $\hat{\sigma}$.

Este processo de montagem do sistema global é semelhante ao processo de montagem utilizado no FEM. Na Eq. (161), o (*) é apenas um alerta de que $\hat{\sigma}_{i^*}$ é a tensão suavizada global, apesar de estar com a indicação do índice local i , necessário à coerência com G_i .

“Superconvergent Patch Recovery” (SPR)

Técnica proposta por Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2006, p. 467), onde em um agrupamento de elementos, os pontos superconvergentes, GP, são utilizados na obtenção das tensões suavizadas $\hat{\sigma}_i$. Lembrando que σ_{GP_i} é determinado sobre os pontos de Gauss utilizando-se a Eq. (150) e que $\hat{\sigma}_i$ é uma das componentes do tensor tensão suavizada sobre

o i -ésimo nó.

Sobre os pontos super-convergentes, os valores das tensões σ_{GP_i} são precisos até a ordem $p + 1$, ou seja, uma ordem mais elevada que a tensão obtida em outros pontos. De qualquer modo pode-se obter facilmente uma aproximação $\hat{\sigma}_i$ obtida por um polinômio de ordem p , ou seja, mesma ordem obtida com as funções de interpolação para o deslocamento. O polinômio será super-convergente em todo domínio do agrupamento de elementos, quando este é determinado para se ajustar aos pontos super-convergentes pelo método dos mínimos quadrados. Outro aspecto importante é que os coeficientes do polinômio, são exclusivos para cada componente do tensor σ_{ij} .

Deste modo a solução recuperada para uma das componentes pode ser escrita conforme

$$\hat{\sigma}_i = \mathbf{p}(x; y) \cdot \mathbf{a} \tag{163}$$

onde $\mathbf{p}(x; y)$ são os termos do polinômio e \mathbf{a} os respectivos coeficientes.

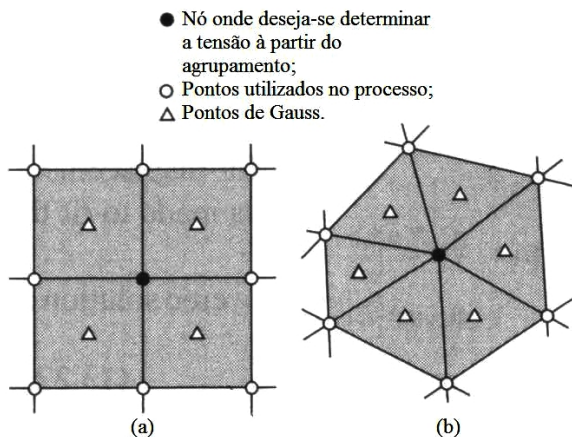


Figura 146: Agrupamentos com elemento (a) quadrilátero linear e (b) triangular linear (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2006, p. 467).

A Fig. 146 mostra a montagem de um “*patch*”⁵² de elementos ao redor do nó onde deseja-se determinar a tensão suavizada. Os agrupamentos podem ser com elementos quadriláteros ou triangulares. Apesar da figura mostrar apenas elementos lineares, o método pode ser estendi-

52 Aqui, o termo “*patch*” é melhor entendido como “*agrupamento*”.

do para os elementos de maior ordem.

Cada nó possui seu próprio agrupamento e os nós da fronteira são computados através dos agrupamentos que os contém. Quando mais de um agrupamento atinge um nó de fronteira, então a média das tensões deve ser determinada.

Os termos de $\mathbf{p}(x; y)$ e de \mathbf{a} estão respectivamente nas equações

$$\mathbf{p}(x; y) = [1, \bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{y}^p]^T \quad (164)$$

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_m]^T \quad (165)$$

onde os coeficientes a_i , deverão ser determinados e os valores de \bar{x} e \bar{y} calculados por $\bar{x} = x - x_c$ e $\bar{y} = y - y_c$ respectivamente onde a n -upla $(x_c; y_c)$ representa as coordenadas do nó sobre o qual foi feito o agrupamento.

O funcional a ser minimizado para obtenção dos coeficientes a_i , utilizando-se uma amostragem com n **pontos super-convergentes**, é mostrado na equação

$$\chi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\sigma_{GP}(x_j; y_j) - \mathbf{p}(x_j; y_j) \cdot \mathbf{a}]^2 \quad (166)$$

Minimizando o funcional da Eq. (166) com respeito a cada coeficiente a_i de \mathbf{a} , ou seja, $\frac{\partial \chi}{\partial a_i} = 0$, obtém-se o seguinte sistema

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (167)$$

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}(x_j; y_j) \mathbf{p}^T(x_j; y_j) \quad (168)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}(x_j; y_j) \sigma_{GP}(x_j; y_j) \quad (169)$$

Resolvendo o sistema para os coeficientes a_i pode-se determinar a tensão suavizada $\hat{\sigma}_i$ sobre o i -ésimo nó com a Eq. (163). Lembrando que cada conjunto de coeficientes a_i é válido para certo agrupamento de elementos e certa componente de tensor tensão, e.g., para o i -ésimo nó deseja-se saber a $\hat{\sigma}_{xy_i}$, à partir deste nó verifica-se que o mesmo faz parte de um agrupamento com 3 elementos quadrilaterais, cada elemento

fornece um ponto super-convergente, assim 3 tensões $\sigma_{xy_{GP}}$ serão utilizadas ($n = 3$), além disso os vetores \mathbf{p} e \mathbf{a} terão 3 termos e a matriz \mathbf{A} terá dimensões 3×3 .

Patch Nodal para Deslocamento Linear (PNDL)⁵³

Esta técnica é sugerida por Vaz Jr (2008). Em suma, a técnica seleciona uma célula numérica que é composta por todos os nós dos elementos que contenham o nó sobre o qual deseja-se determinar a tensão suavizada $\hat{\sigma}_i$. A Fig. 147 ilustra uma célula composta por 5 elementos ao redor de um nó i . Então define-se um polinômio de interpolação linear $p(x; y)$ para o deslocamento u e um para v . Uma vez calculado os coeficientes dos polinômios de interpolação através do método dos mínimos quadrados, as derivadas dos destes em relação a x e y podem ser obtidas e a partir destas as deformações são calculadas, por fim, utilizando-se a relação constitutiva, determina-se as tensões nodais.

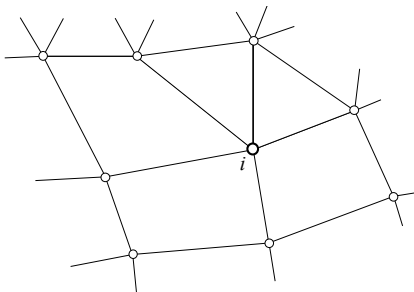


Figura 147: Célula numérica para um nó i .

O polinômio $p(x; y)$ é composto conforme a equação

$$p(x; y) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = a_1 + a_2x + a_3y \tag{170}$$

onde os termos de $\mathbf{p}(x; y)$ e de \mathbf{a} estão nas equações (164) e (165) respectivamente e possuem apenas os primeiros 3 termos.

Os coeficientes do campo $p(x; y)$ são localizados com o método dos mínimos quadrados, e para isso basta resolver o sistema mostrado na

53 O termo *Patch* é utilizado aqui para manter coerência com as outras nomenclaturas. O PNDL pode ser interpretado como um Agrupamento de Nós para o cômputo das tensões através de uma superfície Linear baseada nos Deslocamentos.

equação

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum y_i & \sum x_i y_i & \sum y_i^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum W_i \\ \sum W_i x_i \\ \sum W_i y_i \end{Bmatrix}. \quad (171)$$

No sistema as somatórias assumem valores $i = 1..n$ onde n é o número de pontos de amostras para u ou v . W_i são os valores de u ou v nos pontos de amostra. Assim são gerados dois sistemas, um para amostras de u e outro para amostras de v e quando resolvidos fornecem os polinômios à partir dos quais extrai-se as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$. O número de amostras mínimo para este problema é $n = 3$. Por fim, de posse dos valores das derivadas, as tensões suavizadas podem ser determinadas através da Eq. (25) onde $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$.

Esta técnica, apesar de exigir maior tempo computacional que a tradicional CDN, oferece melhor precisão e estabilidade com um custo computacional relativamente reduzido quando comparado com outras como a SG e SPR.

Apêndice D: Conceitos Básicos

Conceitos Básicos

Alguns conceitos básicos, incluindo a notação indicial se fazem necessários pois são utilizados em diversos pontos do desenvolvimento do trabalho.

Teorema da Divergência de Gauss no Espaço

No cálculo o *Teorema da Divergência de Gauss no Espaço* (LEITHOLD, 1994, p. 1119) é útil em situações onde *deseja-se alternar entre uma integração no interior do domínio para uma integração na fronteira* deste, ou *vice-versa*. A equação

$$\iint_A \mathbf{c} \circ \mathbf{n} da = \iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{c} d\Omega \quad (172)$$

apresenta o teorema para um campo *vetorial* ou *tensorial* uniforme \mathbf{c} , agindo em um certo volume Ω que é delimitado em sua fronteira por uma área A . Onde da é um diferencial de área, \mathbf{n} é o vetor unitário normal a da com sentido saindo da área e $d\Omega$ o diferencial de volume.

Parametrização de Reta

Existem certas situações em que determinada integral deve ser feita sobre uma reta (normalmente segmento de reta). Tomando como exemplo duas funções $g_1(r; s)$ e $g_2(r; s)$ ($\in rOs$) que devem ser integradas sobre um segmento de reta definido pelo vetor \mathbf{f}_m que tem origem no ponto A_{fm} e fim no ponto B_{fm} , ou seja, $\mathbf{f}_m = B_{fm} - A_{fm}$ e são integradas conforme o formato da integral apresentada na equação

$$I = \int_{A_{fm}}^{B_{fm}} g_1(r; s) dr + \int_{A_{fm}}^{B_{fm}} g_2(r; s) ds \quad (173)$$

Para que essa integral possa ser computada é **necessário** expressar as funções $g_1(r; s)$ e $g_2(r; s)$ em função de um parâmetro q e definir os extremos de integração A_{fm} e B_{fm} também em função deste parâmetro.

Adotando um dos pontos como sendo o início do segmento de reta e definindo para este ponto $q = 0$ e para o outro ponto, $q = \|\mathbf{f}_m\|$, ou seja, o final do segmento de reta. Lembrando ainda que a equação geral

de uma reta em função de um parâmetro q é dada pela equação

$$\begin{cases} r = r_{Afm} + \alpha_{fm}q \\ s = s_{Afm} + \beta_{fm}q \end{cases} \quad (174)$$

Onde r_{Afm} e s_{Afm} , são as coordenadas no sistema rOs do ponto do início do segmento de reta, no caso o ponto A_{fm} . Os coeficientes α_{fm} e β_{fm} são os cossenos diretores do vetor \mathbf{f}_m , dados pela equação

$$\begin{cases} \alpha_{fm} = \frac{r_{Bfm} - r_{Afm}}{\|\mathbf{f}_m\|} \\ \beta_{fm} = \frac{s_{Bfm} - s_{Afm}}{\|\mathbf{f}_m\|} \end{cases} \quad (175)$$

Os diferenciais dr e ds são obtidos a partir da diferenciação da Eq. (174) e mostrados na equação

$$\begin{cases} dr = \alpha_{fm}dq \\ ds = \beta_{fm}dq \end{cases} \quad (176)$$

Agora com as equações (174), (175) e (176) pode-se escrever a Eq. (173) no formato mostrado pela equação

$$I = \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} h_1(q)\alpha_{fm}dq + \int_0^{\|\mathbf{f}_m\|} h_2(q)\beta_{fm}dq \quad (177)$$

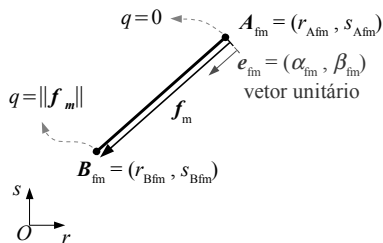


Figura 148: Parametrização da face de integração.

Onde $h_1(q)$ e $h_2(q)$, são as funções $g_1(r; s)$ e $g_2(r; s)$ em função do parâmetro q . Para maior clareza a Fig. 148 apresenta o segmento de reta e outros elementos utilizados nas equações desta secção.

Todo procedimento de parametrização apresentado é genérico, porém o formato da integral dada pela Eq. (173) foi escolhido convenientemente conforme será visto em uma secção posterior onde esta integral será utilizada.

convenientemente conforme será visto em uma secção posterior onde esta integral será utilizada.

Parametrização de um Quadrilátero Convexo

Neste trabalho, elementos quadriláteros convexos serão utilizados. Assim a parametrização comumente utilizada para problemas 2D é a mostrada na Fig. 149. Na parametrização apresentada, a correspondência entre os nós globais N_f, N_e, N_c e N_g e os nós locais N_1, N_2, N_3 e N_4 uma vez definida no início de determinado problema deve ser mantida para devida coerência de mapeamento. O sentido e sequência de numeração dos nós é fixo, pois isso irá definir os extremos de integração.

Assim definido o sentido *anti-horário*, supondo que determinado elemento X_k seja mapeado utilizando-se a sequência: $N_1 \equiv N_f, N_2 \equiv N_e, N_3 \equiv N_c$ e $N_4 \equiv N_g$ esta correspondência, bem como a sequência, deve ser mantida. Estas informações sobre os nós que compõe o elemento, e suas correspondências são armazenadas em uma tabela chamada *matriz de conectividade*.

Define-se neste ponto as *funções de forma*, que serão utilizadas para descrever (mapear) a geometria do elemento e definir as *funções de deslocamento* que serão utilizadas para escrever a solução u da *equação do movimento de Cauchy*, Eq. (30).

Como neste trabalho serão utilizadas funções de forma que são idênticas as funções de deslocamento diz-se que o elemento é *isoparamétrico*. Estas funções são, de uma maneira geral, chamadas *funções de interpolação* e neste trabalho serão utilizadas apenas funções lineares, portanto para a parametrização apresentada na Fig. 149, estas funções são definidas pela Eq. (178).

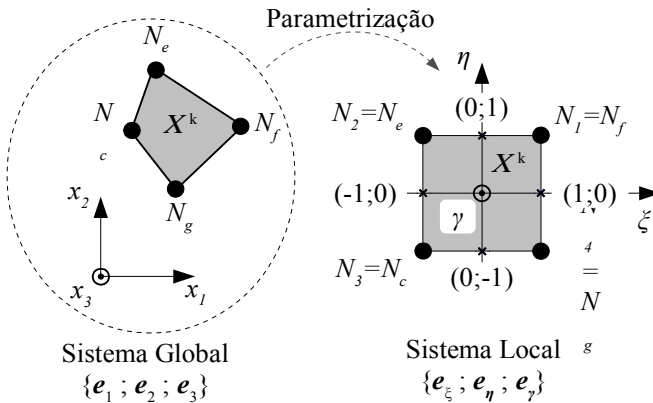


Figura 149: Parametrização retângulo 2D.

$$\begin{cases} \phi_1(r, s) = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\ \phi_2(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \\ \phi_3(r, s) = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\ \phi_4(r, s) = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \end{cases} \quad (178)$$

Onde o domínio destas funções é o elemento X_k , ou seja, $r = \{r \in \mathbb{R} : -1 \leq r \leq 1\}$ e $s = \{s \in \mathbb{R} : -1 \leq s \leq 1\}$ e a imagem é $\phi_i = \{\phi_i \in \mathbb{R} : 0 \leq \phi_i \leq 1\}$ com $i = 1..4$. Assim pode-se representar graficamente as funções ϕ_i conforme a Fig. 150.

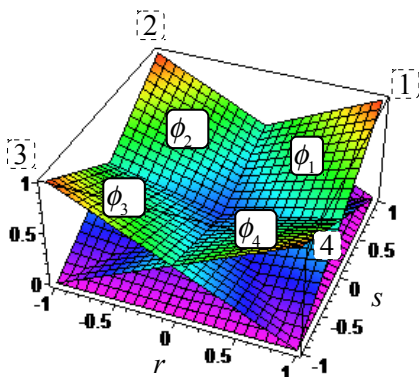


Figura 150: Funções de interpolação.

(180).

$$\begin{cases} x(r; s) = \phi_i x_i \\ y(r; s) = \phi_i y_i \end{cases} \text{ com } i = 1..4 \quad (179)$$

$$M(r; s) = \phi_i M_i \text{ com } i = 1..4 \quad (180)$$

Onde i representa o i -ésimo nó local, M_i representa o valor do parâmetro M em cada nó. A Eq. (179) é portanto apenas uma aplicação da Eq. (180) tendo x e y como parâmetros a serem mapeados. Lembrando que a igualdade da Eq. (180) somente é verdadeira se a distribuição do parâmetro for linear, do contrário, os valores obtidos para $M(r; s)$ são aproximados, o que normalmente é indicado como $M^*(r; s)$.

Quanto ao mapeamento, existe uma relação entre as coordenadas locais e globais, a qual é chamada *Jacobiano da Transformação*, J , e por fu-

O mapeamento das coordenadas globais para as coordenadas locais é feito utilizando-se as funções de interpolação ponderadas sobre os nós do elemento. Assim pode-se escrever a Eq. (179). Onde $i = 1..4$ refere-se ao i -ésimo nó local. Assim a n -upla $(x_i; y_i)$ representa as coordenadas do i -ésimo nó local.

O mesmo pode ser feito para qualquer parâmetro M distribuído ao longo do elemento conforme mostrado na Eq.

gir do propósito do presente trabalho, este será apenas descrito como uma razão geométrica infinitesimal entre os dois sistemas de coordenadas.

O Jacobiano é útil na transformação de diferenciais de área e volume e é dado por

$$J = J \left(\begin{matrix} x,y,z \\ r,s,t \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} \quad (181)$$

As transformações dos diferenciais de área, volume e comprimento são obtidas respectivamente por

$$dA = dx dy = \|J\| dr ds \quad (182)$$

$$dV = dx dy dz = \|J\| dr ds dt \quad (183)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial t} dt \quad (184)$$

O Jacobiano pode ainda ser expandido conforme

$$J \left(\begin{matrix} x,y,z \\ r,s,t \end{matrix} \right) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (185)$$

No caso de problemas 2D pode-se simplificar o Jacobiano e as transformações. Para isso observar que se o domínio tem uma espessura constante, e , na direção \mathbf{k} e fazendo o vetor unitário \mathbf{e}_t , igual a \mathbf{k} , tem-se: $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial s} = 0$ e $\frac{\partial z}{\partial t} = 1$. O que implica em ter-se os formatos mais simplificados para as equações (181), (183), (184) e (185) conforme mostrado nas seguintes equações

$$J = J \left(\begin{matrix} x,y,z \\ r,s,t \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (186)$$

$$dV = e dx dy = \|J\| e dr ds \quad (187)$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial s} ds \quad (188)$$

$$J \left(\begin{matrix} x,y,z \\ r,s,t \end{matrix} \right) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial s} \quad (189)$$

Ainda com respeito as funções de interpolação, é necessário determinar as derivadas destas em relação ao sistema global (xOy). Isso é feito à partir da Eq. (178), aplicando a esta a Regra da Cadeia (do cálculo), obtendo assim para o problema 2D

$$\left\{ \begin{matrix} \phi_{i'x} \\ \phi_{i'y} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{J} \left\{ \begin{matrix} \phi_{i'r} \phi_{j's} y_j - \phi_{i's} \phi_{j'r} y_j \\ -\phi_{i'r} \phi_{j's} x_j + \phi_{i's} \phi_{j'r} x_j \end{matrix} \right\} \quad (190)$$

onde equação, $\phi_{a'b}$, é a derivada de ϕ_a na direção coordenada b .

Integração Numérica de Gauss-Legendre

A integração numérica de Gauss-Legendre será utilizada para computar as componentes da matriz rigidez entre outras aplicações. Primeiramente será ilustrada a integração numérica para o caso 1D. Assim considerando a integral definida por

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr \quad (191)$$

A aproximação da integral I utilizando *quadratura de Gauss-Legendre* é obtida pela integral numérica dada por

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr \approx w_1 f(r_1) + w_2 f(r_2) + \dots + w_n f(r_n) \quad (192)$$

onde é considerada uma aproximação para n pontos tomados da função $f(r)$, $(r_1, f(r_1))$, $(r_2, f(r_2))$, ... e $(r_n, f(r_n))$.

Onde w_1, w_2, \dots, w_n são os pesos e r_1, r_2, \dots, r_n são os pontos tomados da função, também chamados de *Pontos de Gauss-Legendre* ou abreviadamente *Pontos de Gauss* (GP). A Eq. (192) fornece uma resposta exata para uma função polinomial $f(r)$ de qualquer grau desde que o número de pontos seja suficiente, ou ainda, a quadratura de Gauss irá fornecer uma resposta exata se f é um polinômio de ordem $(2n - 1)$ ou menor. Os pesos e pontos a serem escolhidos são mostrados na Tab. 22.

Tabela 22: Pontos de Gauss e pesos.

$$I = \int_{-1}^1 f(r)dr \approx \sum_{i=1}^n w_i f(r_i)$$

Número de pontos (n)	Posição (r_i)	Peso (w_i)
1	0.0	2
2	$\pm 0.577\ 350\ 269\ 2$	1
3	$\pm 0.774\ 596\ 669\ 2$	0.555 555 555 6
	0.0	0.888 888 888 9
4	$\pm 0.861\ 136\ 311\ 6$	0.347 854 845 1
	$\pm 0.339\ 981\ 043\ 6$	0.652 145 154 9
5	$\pm 0.906\ 179\ 845\ 9$	0.236 926 885 1
	$\pm 0.538\ 469\ 310\ 1$	0.478 628 670 5
	0.0	0.568 888 888 9

Apesar do intervalo de integração ser $[-1; 1]$, a integração pode ser feita em outros intervalos, desde que *as posições r_i sejam redistribuídas na mesma proporção neste novo intervalo*. No entanto, os pesos não sofrem alterações.

A integração numérica para o caso 2D é uma extensão do caso 1D e utiliza-se dos mesmos pesos e posições dos GP. A equação

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s)drds \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(r_i, s_j) \tag{193}$$

mostra a integral a ser determinada e a forma de cálculo desta pelo método de quadratura de Gauss. Esta secção foi fundamentada em Chandrupatla (1991, p. 201-204).

Operador Auto-Adjunto

Tomando-se um operador $A : V \rightarrow V$, onde V é um espaço vetorial dos números complexos, assim $V = \mathbb{C}^n$ (lembrar que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$). Também considerando que este espaço é dotado de um produto hermitiano fixo do tipo $\langle X, Y \rangle = X^T \bar{Y}$ (onde \bar{Y} é a conjugação complexa de Y , que para o caso particular dos termos de Y pertencerem à \mathbb{R} - que é o caso

deste trabalho - temos $\overline{Y} = Y$) e que X e Y são vetores-coluna de \mathbb{C}^n . Isto esclarecido, de forma breve (omitindo as provas matemáticas) pode-se afirmar que na igualdade mostrada na Eq. (194), onde v e $w \in V$, o operador A^* é único e chamado de adjunto de A .

$$\langle Av, w \rangle = \langle v, A^*w \rangle \quad (194)$$

Também pode-se determinar A^* como $A^* = \overline{A^T}$, onde $\overline{A^T}$ é o transposto da conjugação complexa de A . No caso em que os vetores não possuem termos complexos, pode-se escrever: $A^* = A^T$. Por fim, se $A^* = A$, ou seja, o adjunto de A é ele mesmo, então diz-se que A é um *Operador Auto-adjunto*. O termo *conjugação complexa* é definido da seguinte forma: seja um número complexo $z = a + bi$, seu conjugado complexo é $\overline{z} = a - bi$.

Para ilustrar o operador auto-adjunto utilizando agora duas funções f e g , primeiramente resgata-se o conceito de produto interno para estas em um domínio $\Omega = \mathbb{R}^n$ conforme a Eq. (195).

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g \, d\Omega \quad (195)$$

Onde f e g são contínuas e possuem derivadas (também contínuas) no domínio Ω . Assim para um operador (A) ser auto-adjunto, ele deve satisfazer a Eq. (194) e a igualdade $A^* = A$, em resumo, aplicando esse conceito ao produto interno das duas funções, um operador A é auto-adjunto se satisfazer as igualdades nas equações

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle \quad (196)$$

$$\int_{\Omega} (Af) g \, d\Omega = \int_{\Omega} f (Ag) \, d\Omega \quad (197)$$

No campo da mecânica estrutural elástica temos o sistema linear de equações diferenciais que é representada na Eq. (81) utilizando a notação de operador diferencial L .

$$L\sigma + f = 0 \quad (81 \text{ repetida})$$

Na Eq. (81), para fins de clareza, foca-se a atenção apenas sobre o primeiro termo da esquerda da igualdade ($L\sigma$). E fazendo-se a projeção (produto escalar) de $L\sigma$ sobre uma função ψ (e.g. uma função peso)

num domínio Ω (por exemplo o elemento finito) tem-se a equação (ZIENKIEWICZ, TAYLOR e ZHU, 2006, p. 81)

$$\int_{\Omega} \psi^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{L}\psi) d\Omega + \text{b.t.} \quad (198)$$

Onde “b.t.⁵⁴” representam os termos na fronteira e neste contexto (que visa apenas o entendimento de operador auto-adjunto) será desprezado. Portanto, ao se observar a Eq. (198) por semelhança tem-se a mesma condição apresentada na Eq. (197). Isto caracteriza de forma definitiva que o operador \mathbf{L} é um operador auto-adjunto. Induz-se portanto: A aproximação proposta por Elementos Finitos, utilizando o processo de Galerkin, fornece os melhores resultados possíveis para o termo $\mathbf{L}\boldsymbol{\sigma}$ nos problemas de mecânica estrutural elástica. Parte das observações desta secção foram fundamentadas em Lang (2003, p. 261-263).

Revisão de Notação Indicial

Durante as deduções das equações discretizadas para os métodos numéricos o número de termos e direções aumentam exponencialmente. Para compactar as representações destas equações utilizar-se-á a *Notação Indicial* apresentada nesta secção. A notação indicial manipula com facilidade *sistemas de equações, combinações lineares e somatórios*.

Na notação indicial, os vetores e tensores são expressos em termos de índices como mostrado para um vetor e um tensor respectivamente nas equações

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \equiv v_i \quad \text{com } i = 1..3 \quad (199)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \sigma_{ij} \quad \text{com } i = 1..3 \text{ e } j = 1..3 \quad (200)$$

Assim v_i e σ_{ij} representam o vetor e o tensor respectivamente, onde i e j assumem valores 1, 2 ou 3.

Os tópicos que se seguem abordam apenas os conceitos mais gerais utilizados neste trabalho, ficando omitidas diversas propriedades matemáticas.

54 Comumente referenciado em inglês como: “boundary terms - b.t.”

Índice Repetido e Índice Livre

Tomando como exemplo o somatório $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = p$ pode-se expressar este na forma compacta conforme

$$a_i x_i = p \quad i=1,2,3 \quad (201)$$

Assim a repetição de um índice num termo representará um somatório com respeito a esse índice no seu intervalo de variação. O índice i neste caso é chamado *índice repetido*.

A expansão do índice repetido dá-se na forma de um somatório, por outro lado a expansão de um *índice livre* dá-se na forma de novas equações, assim a expansão de $a_i x_i = c_j$ com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$, é dada pela equação

$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c_1 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = c_2 \end{cases} \quad (202)$$

Delta de Kronecker

O símbolo δ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) é denominado *Delta de Kronecker* e seu valor é definido conforme o valor dos índices i e j

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (203)$$

Ou ainda, expandindo o δ_{ij} que tem dois índices livres, temos a matriz identidade I de ordem 3 representada por

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad (204)$$

Tensor Alternante

A permutação aparece nos determinantes, no produto vetorial e em outras situações menos comuns. Na notação indicial ela é representada pelo tensor de terceira ordem ε_{ijk} , comumente chamado de *tensor al-*

ternante. O valor assumido por ele depende do valor dos índices e é definido na seguinte equação

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{se dois de seus índices forem iguais} \\ 1, & \text{se } \{i,j,k\} \text{ for uma permutação par de } 1,2,3 \\ -1, & \text{se } \{i,j,k\} \text{ for uma permutação ímpar de } 1,2,3 \end{cases} \quad (205)$$

Outra forma alternativa para representá-lo é ε_{ijk} .

As permutações pares são: 1 - 2 - 3, 2 - 3 - 1 e 3 - 1 - 2. As permutações ímpares são: 1 - 3 - 2, 3 - 2 - 1 e 2 - 1 - 3. Um exemplo do uso do tensor alternante em um produto vetorial na é dado por

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (206)$$

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad (207)$$

onde a segunda equação é idêntica a primeira, porém apresentada em notação indicial.

Notação de Diferenciação

As operações de derivação também podem ser representadas via notação indicial. Os exemplos na equação seguinte ilustram este uso.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx_i} &= u_{,i} \\ \frac{\partial u}{\partial x_i} &= u_{,i} \\ \frac{\partial u}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} &= u_{,j} a_{j',i} \end{aligned} \quad (208)$$

Operador Traço

O operador traço de um tensor de segunda ordem é um escalar invariante, tendo um mesmo valor em todos os sistemas de coordenadas. O operador traço aplicado sobre um tensor \mathbf{T} de 2ª ordem em coordenadas retangulares é dado por

$$T_R[\mathbf{T}] = T_{kk} \quad (209)$$

E conforme a regra do índice repetido o operador representa a soma das componentes da diagonal principal conforme

$$T_R[\mathbf{T}] = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (210)$$

Os tópicos apresentados nesta secção sobre notação indicial abordaram apenas os pontos mais comuns sobre o assunto.

Condicionamento de um Sistema Linear

O *condicionamento* é um parâmetro utilizado para verificar o quanto as pequenas variações nos valores dos coeficientes e/ou erros de truncamento podem induzir a localização de uma solução errônea, mesmo com um baixo resíduo calculado durante as iterações. A Fig. Erro: Origem da referência não encontradaa mostra um caso típico de sistema mal condicionado, onde a solução, é a intercessão das retas. Nestas, mesmo pequenas perturbações nos coeficientes, podem originar soluções totalmente distintas, e em alguns casos ter infinitas soluções ou nenhuma solução. Por outro lado a Fig. Erro: Origem da referência não encontrada b mostra um caso de sistema bem condicionado, onde mesmo com pequenas variações nos valores dos coeficientes a solução é obtida de forma estável.

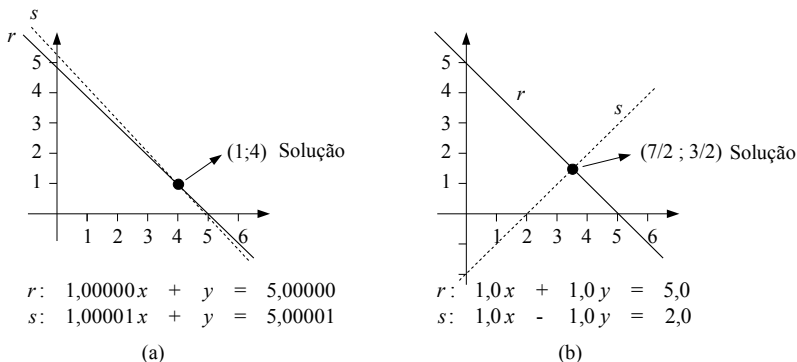


Figura 151: Exemplo de equações que originam um sistema: (a) mal-condicionado e (b) bem condicionado.

Nos exemplos citados o condicionamento é relativamente fácil de ser verificado, porém em sistemas maiores, esta informação deve ser verificada com o parâmetro algébrico $cond(\mathbf{A})$, o qual lê-se: *Condicionamento da matriz A*. A matriz \mathbf{A} para o sistema representa a matriz de coeficientes. O mal-condicionamento, não é uma característica desejá-

vel, pelo contrário *espera-se que um sistema seja bem-condicionado*. O parâmetro $cond(\mathbf{A})$ é calculado por

$$cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (211)$$

Onde $\|\mathbf{A}\|$ e $\|\mathbf{A}^{-1}\|$ são a norma de \mathbf{A} e de sua inversa respectivamente. Esta norma pode ser linha, coluna ou euclidiana. Por fim, se diz que se $cond(\mathbf{A})$ for grande, o problema de se resolver o sistema é mal condicionado. $cond(\mathbf{A})$ é considerado grande quando atingir o valor 10^4 ou maior. Outras informações sobre o assunto desta seção, incluindo as normas, podem ser consultadas em Franco (2006, pg. 152-154).

Convergência Monotônica

Uma definição é dada por Craw (2000) onde diz:

*“A sequence which is either always increasing or always decreasing is called a mono-tone sequence. Note that an arbitrary sequence is not monotone (it will usually sometimes increase, and sometimes decrease).”*⁵⁵ (CRAW, 2000)

A definição precisa sobre o limite de uma sequência é: A sequência $\{a_n\}$ converge para o limite L se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um número N inteiro positivo tal que $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$ para todo $n \geq N$. Isso é ilustrado na Fig. 152.

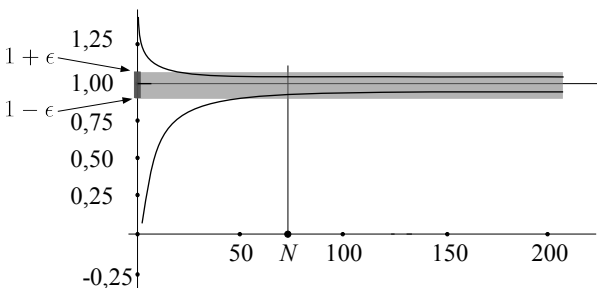


Figura 152: Convergência monotônica.

55 Nossa tradução: “Uma sequência que está sempre aumentando ou diminuindo é chamada de sequência monotônica. Note que uma sequência arbitrária não é monotônica (ela irá algumas vezes aumentar e outras diminuir).”

Quanto a característica de ser monotônica, diz-se que uma sequência $\{a_n\}$ é:

- **estritamente decrescente** se $a_{n+1} < a_n$ para todo n ;
- **estritamente crescente** se $a_{n+1} > a_n$ para todo n ;
- **crescente** se $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n ;
- **decrescente** se $a_{n+1} \geq a_n$ para todo n .

Por fim $\{a_n\}$ será **monotônica** caso for **crescente** ou **decrescente**.