

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO UTILIZANDO COORDENADAS GENERALIZADAS E INTERPOLAÇÃO TVD

MOTA, M. A. A. e MALISKA, C. R.

Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal de Santa Catarina  
C.P. 476 - Florianópolis, SC - 88049-900 - Brasil  
E-mail : emc3maa@sinmec.ufsc.br

### RESUMO

*Este trabalho estuda o esquema TVD de Rubin e Blunt para sistemas de coordenadas generalizadas. Neste caso o TVD é aplicado aos termos de fluxo das equações de conservação. Nos casos apresentados esta metodologia é aplicada no cálculo das permeabilidades relativas nas faces do volume de controle. O modelo utilizado é o "black-oil" bifásico (água e óleo) com formulação IMPES, sendo suas equações resolvidas via volumes finitos. Os resultados numéricos apresentados demonstram a eficiência do esquema TVD em coordenadas generalizadas na redução da dispersão numérica.*

### INTRODUÇÃO

Em simulação de reservatórios os modelos normalmente avaliam as propriedades nas faces do volume de controle através de esquemas de 1ª ordem, sendo o mais utilizado deles o esquema de um ponto a montante. Vários autores, dentre eles Todd et al (1972), Y Ito (1982) e Taggart e Pinczewski (1987), demonstraram que o uso destes esquemas introduzem níveis inaceitáveis de dispersão numérica.

Em processos de recuperação secundária, onde se tem uma frente formada na interface dos fluidos deslocados e injetados, a dispersão numérica prevê a irrupção prematura do fluido deslocante e, em certos casos, a irrupção é antecipada em quase um ano. A dispersão numérica pode ser eliminada através do refinamento da malha, entretanto, um aumento do número de pontos com o intuito de reduzir este efeito é computacionalmente proibitivo.

Vários esquemas de ordem superior incluindo o esquema tipo Godunov (1960) e FCT (Flux Corrected Transport) (Zalesak, 1979) foram sugeridos para diminuir a dispersão numérica em equações hiperbólicas. Estes esquemas exigem que a porção parabólica e hiperbólica das equações "black-oil" estejam separadas e sejam resolvidas seqüencialmente. Isto normalmente requer um grande esforço para introduzir estes esquemas nos códigos com formulação implícita e IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation).

Como forma de se produzir soluções com pouca dispersão numérica, sem no entanto provocar as oscilações espúrias comumente observadas em esquemas de segunda ordem, Harten et al (1983) introduziram o conceito de métodos TVD ("Total Variation Diminishing") para equações hiperbólicas em coordenadas cartesianas. Estes métodos basicamente introduzem um termo de fluxo anti-difusivo ao esquema de um ponto a montante. Um limitador restringe este fluxo de tal forma que o esquema seja de segunda ordem em regiões suaves e de primeira ordem em regiões de descontinuidade. Harten et al e Sweby (1984) demonstraram os critérios que devem ser obedecidos pelo limitador para que se tenha um esquema TVD.

Rubin e Blunt (1990) introduziram um esquema TVD nos fluxos baseados em gradientes de pressão das equações do modelo "black-oil" em coordenadas cartesianas. O método proposto é derivado do TVD com limitador de fluxo de Sweby, só que neste caso reduz-se a resolução do termo temporal para primeira ordem e mantém-se o esquema de segunda ordem no espaço. Nos resultados apresentados por Rubin e Blunt, o esquema TVD utilizando malha 30x30 produziu resultados superiores, com tempo

de CPU quatro vezes inferior, quando comparados aos resultados obtidos com esquema upwind e malha 80x80. Embora os resultados apresentados por Rubin e Blunt tenham sido excelentes, os casos resolvidos por eles foram simples e particulares.

Pinto (1991) fez a extensão do esquema TVD para malhas cartesianas não-uniformes e utilizou o TVD no cálculo das permeabilidades relativas nas faces. Analisando o desempenho do método TVD em três formulações (IMPES, semi-implícita e implícita) ficou demonstrado que existe pouca diferença em aplicar o TVD na avaliação das permeabilidades relativas nas faces ou nos termos de fluxo. Pinto também demonstrou que a utilização do esquema TVD praticamente elimina o efeito de orientação de malha.

Os métodos TVD têm apresentado grande eficiência na redução da dispersão numérica. Entretanto, eles têm sido intensivamente testados para sistemas ortogonais, principalmente o cartesiano. Neste trabalho o esquema TVD de Rubin e Blunt é estendido para coordenadas generalizadas. Nos casos apresentados esta metodologia é aplicada no cálculo das permeabilidades relativas nas faces do volume de controle. O modelo utilizado é o "black-oil" bifásico (água e óleo) com formulação IMPES, sendo suas equações resolvidas via volumes finitos. Os resultados numéricos apresentados demonstram a eficiência do método TVD em coordenadas generalizadas na redução da dispersão numérica.

### EQUAÇÕES GOVERNANTES

Assumindo que o escoamento é bifásico (água e óleo) e imiscível, e desprezando-se o gradiente de profundidade, a pressão capilar e a compressibilidade da rocha, a equação do modelo "black-oil" é dada por,

$$\vec{\nabla} \cdot \left[ K \frac{k_p}{B_p \mu_p} \vec{\nabla} p \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_p}{B_p} \right] + q_p \quad (1)$$

onde o subíndice  $p$  indica a fase água ( $w$ ) ou óleo ( $o$ ).  $K$  é o tensor permeabilidade absoluta,  $k_p$  a permeabilidade relativa,  $\mu_p$  a viscosidade,  $\phi$  é a porosidade,  $S_p$  é a saturação,  $B_p$  é fator de volume de formação e  $q_p$  é o fluxo de massa do componente (nas condições padrão) por unidade de volume do reservatório.

As equações diferenciais contendo três incógnitas,  $p$ ,  $S_w$  e  $S_o$ . A equação de fechamento do problema é a equação de restrição volumétrica,

$$S_w + S_o = 1 \quad (2)$$

O modelamento matemático não está completo sem a especificação das condições de contorno. Em reservatórios que não apresentam aquíferos supõe-se que o contorno está selado, ou seja que se tem fluxo nulo no contorno. Já as condições de fluxo especificado no poço são usualmente representados por termos fonte/sorvedouro.

### METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

O uso de coordenadas curvilíneas se baseia na transformação de um domínio físico em um domínio transformado computacional. Este domínio transformado tem geometria retangular e é nele que são resolvidas numericamente as equações, pois deste modo se evitam as interpolações nos contornos do domínio físico. A equação de conservação da massa para a fase água quando transformada para o plano curvilíneo bidimensional  $(\xi, \eta)$  assume a seguinte forma,

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\phi S_w}{B_w} \right] + q_w = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \lambda_w J \left( \alpha \frac{\partial P}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \lambda_w J \left( \gamma \frac{\partial P}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3)$$

onde  $J$  é o jacobiano,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são as métricas da transformação e  $\lambda_w$  é a mobilidade da fase água dada por,

$$\lambda_w = K \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \quad (4)$$

Maiores detalhes sobre o uso de coordenadas curvilíneas podem ser vistos em Maliska (1992).

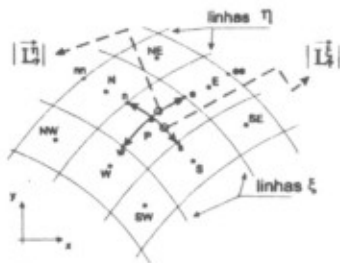


Figura 1 - Distâncias nas direções  $\xi$  e  $\eta$  - Plano transformado

A equação discretizada é obtida integrando-se a Eq. (3) no tempo e no volume de controle elementar, mostrado na Fig. 1, e aproximando-se linearmente os gradientes de pressão nas faces. Após alguns rearranjos a equação discretizada da saturação da fase água na forma explícita possui a seguinte forma,

$$S_P^w = -A_P^w P_P + \sum A_{VIZ}^w P_{VIZ} + F_P^w \quad (5)$$

onde o subíndice  $VIZ$  representa os pontos vizinhos ao ponto  $P$  (N, S, E, W, NE, SE, NW e SW),  $A^w$  são os coeficientes e  $F_P^w$  é o termo fonte. A equação discretizada para a fase óleo é obtida analogamente.

**Método IMPES** - Neste método a equação discretizada da pressão é obtida substituindo-se as equações discretizadas da saturação para a fase óleo e água na Eq. (2). Após alguma manipulação matemática a equação da pressão na forma implícita

é dada por,

$$A_P P_P = \sum A_{VIZ} P_{VIZ} + F_P \quad (6)$$

onde  $A$  são os coeficientes da pressão e  $F_P$  é o termo fonte. Devido às não-linearidades da Eq. (6) o uso de um esquema de linearização do termo fonte é de vital importância para se atingir a convergência. Esta discussão e uma descrição detalhada do método IMPES, juntamente com todos os coeficientes das equações da pressão e saturação, podem ser encontrados em Mota (1994).

Por questão de simplicidade nos próximos itens não serão utilizados índices para as fases. Entretanto, deve-se ter em mente que as equações apresentadas devem ser aplicadas para as fases água e óleo.

### ESQUEMA TVD EXPLÍCITO

Para que um esquema seja TVD, a variação total da função, neste caso a saturação, deve ser não-crescente, ou seja,

$$TV(S^{n+1}) \leq TV(S^n) \quad (7)$$

sendo a variação total definida como,

$$TV(S^n) = \sum_j |S_{j,1}^n - S_j^n| \quad (8)$$

onde  $n$  indica o nível de tempo e  $j$  o bloco.

O esquema TVD utilizado neste trabalho parte do esquema de Lax-Wendroff, multiplicando a contribuição de segunda ordem por um limitador. Desta forma este termo fica limitado a algumas regiões, prevenindo as oscilações típicas de esquemas de alta ordem.

Rubin e Blunt (1991) sugeriram que o esquema TVD seja aplicado ao termo de fluxo para as fases água e óleo. Para o fluxo no sentido positivo do eixo de coordenadas, pode-se aproximar o fluxo na face *este* da seguinte forma,

$$f_e = f_P + \Psi(r_P) A_e \quad (9)$$

onde  $f_P$  é o fluxo aproximado no ponto  $P$ ,  $A_e$  é o termo de segunda ordem,  $\Psi$  é o limitador de fluxo e  $r_P$  é a razão de termos sucessivos de segunda ordem, assim definidos,

$$f_P = -\lambda_P \frac{P_E - P_P}{\Delta x} \quad (10)$$

$$A_e = \frac{\Delta x}{2} \frac{f_E - f_P}{\Delta x} \quad (11)$$

$$r_P = \frac{A_w}{A_e} \quad (12)$$

O limitador de Van Leer (1974), que foi adotado por Rubin e Blunt e será também utilizado neste trabalho, é dado por,

$$\Psi(r) = \frac{|r| + r}{1 + |r|} \quad (13)$$

**TVD em Coordenadas Generalizadas** - Rescrevendo a equação de fluxo (Eq. 9) em coordenadas generalizadas para a direção  $\xi$  e sentido positivo,

$$f_e = f_P + \Psi(r_P) A_e \quad (14)$$

onde,

$$A_e = \frac{\vec{L}_p^{\xi}}{2} \cdot \vec{\nabla} f_e \quad (15)$$

O fluxo de massa na direção  $\xi$ , para um ponto qualquer é dado por,

$$f = - \left[ \lambda J \left( \alpha \frac{\partial P}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) \right] \quad (16)$$

A Fig. 1 ilustra a distância entre as faces  $w$  e  $e$ ,  $|\vec{L}_p^{\xi}|$ , e entre as faces  $s$  e  $n$ ,  $|\vec{L}_p^{\eta}|$ .

Em coordenadas generalizadas o vetor comprimento entre as faces  $w$  e  $e$ , e o gradiente do fluxo são dados por,

$$\vec{L}_p^{\xi} = \Delta \xi x_{\xi_r} \hat{i} + \Delta \xi y_{\xi_r} \hat{j} \quad (17)$$

$$\vec{\nabla} f = J [(f_{\xi} y_{\eta} - f_{\eta} y_{\xi}) \hat{i} + (f_{\eta} x_{\xi} - f_{\xi} x_{\eta}) \hat{j}] \quad (18)$$

Fazendo-se o produto escalar da Eq. (15),

$$A_e = \frac{1}{2} (D^{\xi} f_{\xi} + C^{\eta} f_{\eta})|_e \quad (19)$$

onde,

$$D_e^{\xi} = J_e (x_{\xi_r} y_{\eta_e} - y_{\xi_r} x_{\eta_e}) \quad (20)$$

$$C_e^{\eta} = J_e (y_{\xi_r} x_{\xi_e} - x_{\xi_r} y_{\xi_e}) \quad (21)$$

A razão de fluxo e o limitador são calculados da mesma forma que o caso cartesiano, porém neste caso o termo de segunda ordem é calculado através da Eq. (19).

Analogamente na direção  $\eta$  e sentido positivo, o fluxo na face norte é dado por,

$$f_n = f_p + \Psi(r_p) A_n \quad (22)$$

onde o fluxo na direção  $\eta$  é dado por,

$$f = - \left[ \lambda J \left( \gamma \frac{\partial P}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) \right] \quad (23)$$

e a distância entre as faces  $s$  e  $n$ , e o gradiente de fluxo são dados por,

$$\vec{L}_p^{\eta} = \Delta \eta x_{\eta_r} \hat{i} + \Delta \eta y_{\eta_r} \hat{j} \quad (24)$$

$$\vec{\nabla} f = J [(f_{\xi} y_{\eta} - f_{\eta} y_{\xi}) \hat{i} + (f_{\eta} x_{\xi} - f_{\xi} x_{\eta}) \hat{j}] \quad (25)$$

Fazendo-se o produto escalar para a face norte,

$$A_n = \frac{1}{2} (D^{\eta} f_{\eta} + C^{\xi} f_{\xi})|_n \quad (26)$$

onde,

$$D_n^{\eta} = J_n (x_{\xi_n} y_{\eta_r} - y_{\xi_n} x_{\eta_r}) \quad (27)$$

$$C_n^{\xi} = J_n (y_{\xi_n} x_{\eta_r} - x_{\xi_n} y_{\eta_r}) \quad (28)$$

É conveniente observar que as expressões apresentadas para o cálculo do fluxo na face se tornam idênticas àquelas apresentadas para o caso cartesiano igualmente espaçado quando  $C = 0$  e  $D = 1$ .

A utilização do esquema TVD no cálculo das permeabilidades relativas nas interfaces do volume de controle foi proposta por Pinto (1991). Ele justifica a simplificação de

considerar a permeabilidade relativa como um fluxo, mostrando que existe um termo de caráter convectivo na equação de conservação dado por  $\frac{\partial k_r}{\partial x}$ . Deste modo, pode-se fazer uso do esquema TVD substituindo o fluxo  $f$ , pela permeabilidade relativa nas equações mostradas neste item.

## RESULTADOS

Para avaliar o desempenho dos esquemas de interpolação upwind e TVD em coordenadas generalizadas foi utilizado um problema com configuração geométrica e dados físicos propostos por Palagi (1992). Este problema consiste na injeção de água e produção de líquido (água + óleo) a uma taxa de  $2,648 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$  (60 STB/dia). A configuração de poços utilizada é de 1/4 de "five-spot" com 402,33 m (1320 ft) de lado e 6,09 m (20 ft) de profundidade. O reservatório é considerado homogêneo e isotrópico, e inicialmente está a uma pressão de 689,4 kPa (100 psi) e saturação de água nula. A porosidade da rocha é 0,2 e sua permeabilidade absoluta  $0,012337 \mu\text{m}^2$  (12,5 mD). As compressibilidades dos fluidos são iguais a  $1,4545 \times 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$  ( $1 \times 10^{-5} \text{ psi}^{-1}$ ). O problema descrito neste item é resolvido para  $M=1$  (razão de viscosidades óleo-água) e  $M=10$ , onde  $\mu_o = 1 \text{ mPa}\cdot\text{s}$  e  $\mu_w = 1/M \text{ mPa}\cdot\text{s}$ . As permeabilidades relativas utilizadas são,

$$\begin{aligned} k_{rw} &= S_w^2 \\ k_{ro} &= (1 - S_w)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

Neste caso não se utiliza modelo de poço, pois o poço está representado por dois contornos com raios iguais a 0,122 m (0,4 ft). A Fig. 2 ilustra uma malha em coordenadas generalizadas contendo 20 volumes na direção  $\xi$  e 20 na direção  $\eta$ . Esta malha e uma outra, mais refinada (30x40), foram utilizadas na comparação entre os métodos TVD e upwind.

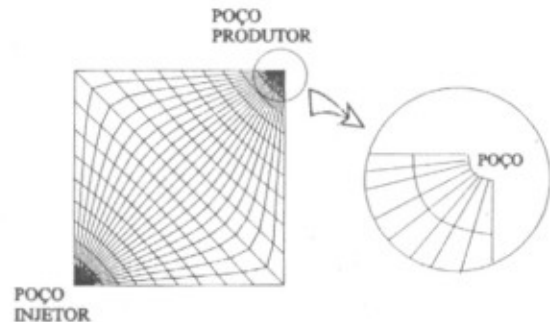


Figura 2 - Malha generalizada - 20 x 20 volumes

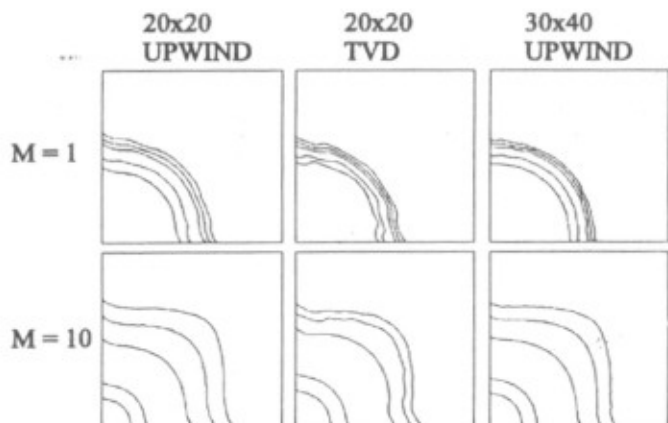


Figura 3 - Isocurvas de saturação em VPI= 0,2.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- GODUNOV, S. K., "A Finite Difference Method for the Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics", *Mat Sb* 47 (1959), Traduzido pelo Dep. de Comércio dos EUA, JPRS 7225, 1960.
- HARTEN, A., LAX, P. D. e VAN LEER, B., "On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws", *SIAM Review*, vol. 25, n° 1, Jan., 1983.
- ITO Y., "The Evaluation of Interblock Mobility Using a Modified Midpoint Weighting Schemes", *apresentado no 6º Simpósio em Simulação de Reservatório - SPE*, Fev. 1-3, Nova Orleans, 1982.
- MALISKA, C. R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional Coordenadas Generalizadas", *Monografia para o Concurso de Professor Titular na Área de Ciências Térmicas*, EMC-UFSC, Florianópolis, 1992.
- MOTA, M. A. A., "Simulação Numérica de Reservatórios de Petróleo utilizando Coordenadas Generalizadas e Interpolação TVD", *Dissertação de Mestrado*, EMC-UFSC, Florianópolis, 1994.
- PALAGI, C., "Generation and Application of Voronoi Grid Flow in Heterogeneous Reservoirs", *PhD Thesis*, Stanford University, Stanford, 1992.
- PINTO, A. C. C., "Esquemas de Alta Resolução Para Controle de Dispersão Numérica em Simulação de Reservatórios", *Dissertação de Mestrado*, UNICAMP, São Paulo, Nov., 1991.
- RUBIN, B. e BLUNT, M. J., "Higher-Order Implicit Flux Limiting Schemes for Black-Oil Simulation", *Proceedings of 11º SPE*, pp. 17-20, Califórnia, Fev., 1991.
- SWEBY, P. K., "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws", *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. 21, n° 5, Out., 1984.
- TAGGART, I. J. e PINCZEWSKI, W. V., "The Use of Higher-Order Differencing Techniques in Reservoir Simulation", *SPE Reservoir Engineering*, pp. 360-72, Ago., 1987.
- TODD, M. R., O'DELL, P. M., e HIRASAKI, G. T., "Methods for Increasing Accuracy in Numerical Reservoir Simulators", *Soc. Pet. Eng. J.*, pp. 515-30, Dez., 1972.
- VAN LEER, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, II - Monotonicity and Conservation Combined in a Second Order Scheme", *J. Comp. Physics*, 14, pp. 361-70, 1974.
- ZALESK, S., "Fully Multidimensional Flux Corrected Transport Algorithms for Fluids", *J. Comp. Physics*, Vol. 31, p. 355, 1979.

## ABSTRACT

This work extends the TVD scheme of Rubin and Blunt to a curvilinear coordinate system. The TVD is applied to the flux terms in the conservative equations. The approximation is applied for representing the relative permeability at the control volume interfaces. The IMPES black-oil equations are solved via finite volume method. The numerical results show the increase in accuracy resulting from the use of the curvilinear TVD.

A Fig. 3 traz os campos de saturação para  $VPI=0,2$ . Da esquerda para direita são mostradas as isolinhas 0,7; 0,6; 0,5; 0,4; e 0,3. Pode-se verificar através dos campos de saturação que nos casos utilizando TVD a largura da frente de saturação (dispersão numérica) é substancialmente menor que no caso com upwind e malha 20x20. Além disso, a frente do caso TVD apresenta dispersão levemente inferior nas regiões próximas à diagonal, causando um achatamento na sua forma. Na comparação entre os resultados com TVD e upwind com malha 30x40, vê-se que a largura da frente no caso TVD é ligeiramente inferior. Ou seja, a interpolação TVD, neste caso, produz um resultado superior utilizando um número três vezes menor de volumes.

As Figs. 4 e 5 mostram as curvas de corte de água versus volume poroso deslocável injetado, para os casos TVD e upwind, com  $M=1$  e 10. O corte de água é definido como a razão entre as vazões de água e líquido total produzidos (água+óleo).

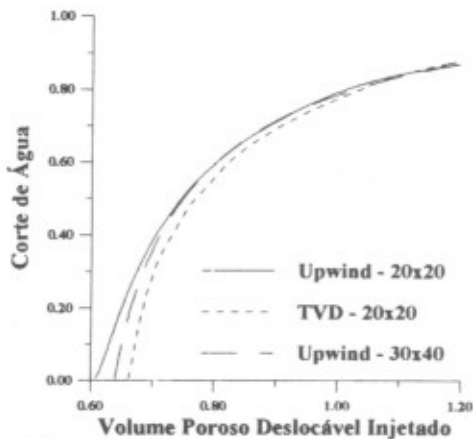


Figura 4 - Corte de Água x VPI - M=1

Através das curvas de corte de água pode-se verificar que há previsão de irrupção prematura nos casos com interpolação upwind. Esta irrupção prematura é causada pela maior dispersão numérica produzida pelo método de interpolação upwind.

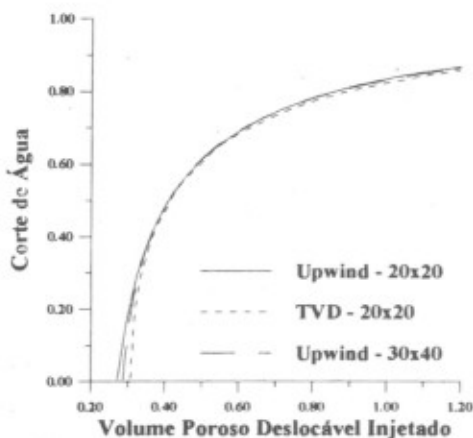


Figura 5 - Corte de Água x VPI - M=10

## CONCLUSÃO

Os resultados apresentados demonstram que esquema TVD reduz substancialmente a dispersão numérica. Os resultados obtidos via TVD são levemente superiores aos resultados obtidos com o esquema upwind e malha mais refinada. A transformação proposta produziu resultados semelhantes aos da literatura citada.