

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

TAISA BEATRIZ PACHECO

**COMPARAÇÃO ENTRE AS FORMULAÇÕES IMPES, SEQUENCIAL E
TOTALMENTE IMPLÍCITA NA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO
BIFÁSICO EM RESERVATÓRIOS APLICANDO O MÉTODO DOS
VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS**

Florianópolis
2016

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

TAISA BEATRIZ PACHECO

**COMPARAÇÃO ENTRE AS FORMULAÇÕES IMPES, SEQUENCIAL E
TOTALMENTE IMPLÍCITA NA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO
BIFÁSICO EM RESERVATÓRIOS APLICANDO O MÉTODO DOS
VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS**

Trabalho apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. António Fábio Carvalho da Silva, Dr. Eng.

Florianópolis
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Pacheco, Taisa Beatriz

Comparação entre as formulações IMPES, sequencial e totalmente implícita na simulação de escoamento bifásico em reservatórios aplicando o método dos volumes finitos baseado em elementos / Taisa Beatriz Pacheco ; orientador, António Fábio Carvalho da Silva - Florianópolis, SC, 2016. 120 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia Mecânica. 2. Simulação numérica de reservatórios de petróleo. 3. Escoamento bifásico. 4. EbFVM. 5. Método de Newton-Raphson. I. da Silva, António Fábio Carvalho. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

TAISA BEATRIZ PACHECO

COMPARAÇÃO ENTRE AS FORMULAÇÕES IMPES, SEQUENCIAL E TOTALMENTE IMPLÍCITA NA SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM RESERVATÓRIOS APLICANDO O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS

Este Trabalho de Curso foi julgado adequado para a obtenção do título de Engenheiro Mecânico e aprovado em sua forma final pela Comissão examinadora e pelo Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Prof. Carlos E. Niño Bohórquez, Dr.Eng.
Coordenador do Curso

Prof. Jonny Carlos da Silva, Dr. Eng.
Professor da Disciplina

Comissão Examinadora:

Prof. António Fábio C. da Silva, Dr. Eng.
Orientador

Prof. Clovis R. Maliska, Ph.D.

Prof. Sérgio Peters, Dr. Eng.

Florianópolis
2016

Ao meu companheiro Ederson,
aos meus pais Sérgio e Tânia
e à minha irmã Carina.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu companheiro Ederson por todo carinho e por todos os ensinamentos – tanto no âmbito pessoal, quanto no profissional – sem os quais este trabalho não seria possível. Agradeço profundamente aos meus pais Sérgio e Tânia, por todo incentivo à educação e por estarem sempre presentes não obstante a distância. Também à minha irmã Carina, a qual sempre foi um exemplo pra mim e ao Rodrigo, o qual considero um irmão.

Agradeço especialmente ao professor António Fábio Carvalho da Silva, não apenas por realizar seus papéis de professor e orientador com primazia, mas também por acreditar em mim no momento mais difícil, permitindo-me confiar em meu próprio potencial.

Ao professor Clovis Maliska pela oportunidade de trabalhar no laboratório SINMEC. Aos amigos e colegas de trabalho Giovani e Gustavo, sempre presentes. Ao Fernando pela atenção e prestatividade. À Tatiane e ao Axel pelo auxílio quanto às atividades cotidianas do laboratório. Sobretudo à Tatiane, por sua amizade e por todas as risadas. A todos os integrantes do SINMEC ainda não citados: Emílio, Conrado, Hermínio, Josiane, Rafael, Victor Wagner, Maria, Riciêri, Victor Antonio, Fernando Eckstein, Gabriel, Gustavo Trentini, Henrique, Jurandir, Lara, Lucas, Róger e Ruan. Também a todos os amigos da universidade que não foram citados.

À Universidade Federal de Santa Catarina e ao Departamento de Engenharia Mecânica, pela excelência do curso oferecido. Sobretudo, ao Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor – SINMEC – e ao Programa de Recursos Humanos da ANP pela estrutura disponibilizada, pelo apoio financeiro e pelo excelente ambiente de trabalho.

*“If you change the way you look at things,
the things you look at change.”*

Wayne Dyer

RESUMO

Este trabalho apresenta resultados comparativos das formulações IMPES (*IMplicit Pressure, Explicit Saturation*), sequencial e totalmente implícita ou FIM (*Fully Implicit Method*) na simulação numérica de escoamento bifásico, isotérmico, imiscível e incompressível em reservatórios de petróleo utilizando malhas não-estruturadas e o método dos volumes finitos baseado em elementos (EbFVM). A implementação do simulador foi realizada por meio de programação orientada a objetos aplicando a linguagem C^{++} . A metodologia IMPES resolve de forma implícita a pressão e explícita, a saturação. Sua estabilidade está, pois, condicionada a uma restrição de passo de tempo, tendo em vista a aproximação explícita do cálculo do campo de saturação. Em decorrência de sua simplicidade, essa abordagem permite reduzir tanto o esforço computacional quanto a dificuldade relacionada à etapa de implementação. Já a formulação sequencial consiste em um IMPES modificado com o intuito de atingir uma maior estabilidade. Por fim, no método totalmente implícito tem-se a solução simultânea das equações de conservação por meio do método de *Newton-Raphson*. Essa formulação acarreta um sistema de equações maior e atrelado a diversas não-linearidades. Não obstante as dificuldades numéricas e de implementação computacional desse esquema, trata-se de um método mais estável. Ademais, foi implementada uma estratégia de passo de tempo variável a fim de reduzir o tempo computacional despendido na obtenção das soluções numéricas, a qual altera o passo de tempo de acordo com a variação do campo de saturação ao longo do transiente. Os resultados apresentam a comparação dos métodos IMPES sequencial e FIM em termos de estabilidade, custo computacional e precisão dos resultados.

Palavras-chave: simulação de reservatórios, escoamento bifásico, EbFVM, malhas não-estruturadas, IMPES, método sequencial, método totalmente implícito, método de *Newton*.

ABSTRACT

This study presents comparative results of IMPES (IMplicit Pressure, Explicit Saturation), sequential, and fully implicit solution schemes for isothermal, immiscible, incompressible two-phase flow reservoir simulation using unstructured grids and the Element-based Finite Volume Method (EbFVM). The implementation of the simulator was done through object-oriented programming (OOP) in C++. The IMPES method solves pressure implicitly and saturation explicitly, as the acronym suggests. As a result of this explicit calculation its stability is subjected to a restriction of the time step. Nevertheless this approach reduces the computational effort and facilitates implementation. The sequential method is a modified IMPES with the aim of improving the stability of explicit formulations. The Fully Implicit Method (FIM) or simultaneous approach solves the system of equations that models the problem simultaneously employing the Newton-Raphson method. This formulation implies larger system of equations with many nonlinearities and thus higher computational cost. Regardless the difficulties related to the numerical scheme and its implementation it is a more stable method. Furthermore, it is also presented a variable time step strategy in order to accelerate the performance of the methods. This strategy consists basically in modifying the time step according to the current solution. In this paper, IMPES, sequential and fully implicit methods are compared in terms of stability, computational time and accuracy of its results.

Keywords: Reservoir simulations, two-phase flow, EbFVM, unstructured grids, IMPES, sequential method, fully implicit method, *Newton* method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1.1	Etapas da simulação de reservatórios	23
1.2	Esquema ilustrativo de um reservatório sujeito à recuperação secundária .	24
2.1	Volume de controle em um meio poroso	31
3.1	Potencial geométrico da malha não-estruturada	37
3.2	Principais entidades de um elemento triangular	39
3.3	Construção do volume de controle	39
3.4	Mapeamento para um espaço transformado	40
3.5	Estêncil associado ao nó \mathcal{P}	43
3.6	Método de Newton para funções de uma variável	47
4.1	Classes responsáveis pela simulação pelo método IMPES	51
4.2	Exemplo de estrutura da matriz do sistema linear da pressão	52
4.3	Classes responsáveis pela simulação pelo método FIM	54
4.4	Esquema de interpolação <i>upwind</i> em elemento triangular	57
4.5	Volume de controle adjacente ao contorno	60
4.6	Exemplo de estrutura da matriz jacobiana	62
4.7	Exemplo de etapa de montagem da matriz jacobiana	67
4.8	Fluxograma da estratégia de modificação do passo de tempo	72
5.1	Configuração do problema de deslocamento unidimensional	74
5.2	Curvas de permeabilidade e fluxo fracionário	76
5.3	Malhas não-estruturadas utilizadas na solução do problema de Buckley-Leverett	78
5.4	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com passo de tempo fixo em uma malha de 430 nós	79
5.5	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com passo de tempo fixo em uma malha de 1961 nós	79

5.6	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com passo de tempo fixo em uma malha de 7392 nós	80
5.7	Tempo computacional para os três métodos com passo de tempo fixo . . .	80
5.8	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 430 nós	81
5.9	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 1961 nós	81
5.10	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 7392 nós	82
5.11	Tempo computacional para os três métodos com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo	82
5.12	Evolução do passo de tempo para a malha de 430 nós com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo	83
5.13	Evolução do passo de tempo para a malha de 1961 nós com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo	83
5.14	Evolução do passo de tempo para a malha de 7392 nós com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo	84
5.15	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 430 nós	84
5.16	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 1961 nós	85
5.17	Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 7392 nós	85
5.18	Tempo computacional para os três métodos com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo	86
5.19	Evolução do passo de tempo para a malha de 430 nós com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo	86
5.20	Evolução do passo de tempo para a malha de 1961 nós com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo	87

5.21	Evolução do passo de tempo para a malha de 7392 nós com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo	87
5.22	Campos de saturação e pressão para os instantes de tempo 0,2, 0,3 0,4 e 0,5 VPI	88
5.23	Configuração do problema de deslocamento bidimensional	90
5.24	Malhas não-estruturadas utilizadas na solução do problema <i>quarter five-spot</i>	91
5.25	Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo fixo e uma malha de 425 nós	93
5.26	Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo adaptativo e uma malha de 425 nós	94
5.27	Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo fixo e uma malha de 1483 nós	95
5.28	Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo adaptativo e uma malha de 1483 nós	96
5.29	Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo fixo e uma malha de 5985 nós	97
5.30	Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo adaptativo e uma malha de 5985 nós	98
5.31	Campos de pressão e saturação no instante de <i>breakthrough</i>	99
5.32	Campos de saturação para os instantes de tempo de 500, 1500, 3000 e 5000 dias	99
5.33	Tempos computacionais despendidos no caso de deslocamento bidimensional	101
5.34	Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com o método totalmente implícito	102
5.35	Configuração do problema tridimensional	104
5.36	Ilustração da malha cilíndrica ao redor dos poços	105
5.37	Resultados obtidos para o deslocamento tridimensional em malha híbrida com os três métodos para 3000 dias de simulação	107

5.38 Resultados obtidos para o deslocamento tridimensional em malha híbrida com o método totalmente implícito para 10000 dias de simulação	108
5.39 Campo de saturação para quatro instantes de tempo	109
5.40 Campo de pressão para quatro instantes de tempo	109
5.41 Campos finais de pressão e saturação	110

LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros correspondentes ao critérios mais rígido de passo de tempo adaptativo	71
4.2	Parâmetros correspondentes ao critérios menos rígido de passo de tempo adaptativo	71
5.1	Dados do problema de deslocamento bifásico bidimensional	91
5.2	Tempo computacional – passo de tempo fixo e malha de 425 nós	93
5.3	Tempo computacional – passo de tempo adaptativo e malha de 425 nós . .	94
5.4	Tempo computacional – passo de tempo fixo e malha de 1483 nós	95
5.5	Tempo computacional – passo de tempo adaptativo e malha de 1483 nós .	96
5.6	Tempo computacional – passo de tempo fixo e malha de 5985 nós	97
5.7	Tempo computacional – passo de tempo adaptativo e malha de 5985 nós .	98
5.8	Tempo computacional despendido com o método FIM	102
5.9	Dados do problema de deslocamento bifásico tridimensional	105
5.10	Tempo computacional despendido	107

LISTA DE LISTAGENS

4.1	Pseudocódigo da rotina que resolve o sistema linear da pressão	53
4.2	Pseudocódigo da rotina que resolve o sistema não linear	55
4.3	Pseudocódigo da rotina que computa os resíduos	56
4.4	Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo difusivo nos resíduos	56
4.5	Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo acumulativo nos resíduos	57
4.6	Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo fonte nos resíduos	59
4.7	Pseudocódigo da rotina que aplica as condições de contorno nos resíduos	60
4.8	Pseudocódigo da rotina que monta a matriz jacobiana	63
4.9	Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo difusivo na matriz jacobiana	65
4.10	Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo acumulativo na matriz jacobiana	68
4.11	Pseudocódigo da rotina que aplica as condições de contorno na matriz jacobiana	69
4.12	Pseudocódigo da rotina que aplica as condições de contorno na matriz jacobiana	70

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Romanos

(x, y)	Coordenadas globais	[m]
\mathbf{S}	Vetor área	[m ²]
ΔS_{\max}	Diferença máxima de saturação especificada no critério de passo de tempo variável	
ΔS_{\min}	Diferença mínima de saturação especificada no critério de passo de tempo variável	
Δt	Passo de tempo	[s]
$\Delta \mathbf{A}_f$	Vetor área associado à face f	[m ²]
\dot{m}_f	Fluxo de massa que atravessa uma face f do volume de controle	[kg/s]
\hat{S}	Saturação de água normalizada	
N_i	Função de forma associada ao i -ésimo vértice do elemento	
\mathbb{K}	Tensor permeabilidade absoluta do meio	[m ²]
$\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$	Conjunto dos elementos que compartilham o nó \mathcal{P}	
\mathcal{M}	Malha	
\mathcal{N}^e	Conjunto dos nós associados ao elemento e	
$\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$	Estêncil associado ao nó \mathcal{P}	
\mathbf{g}	Vetor gravidade	[m/s ²]
\mathbf{V}^p	Velocidade da fase p	[m/s]
ξ	Razão adimensional entre espaço e tempo	
e_i	i -ésimo elemento de uma malha	
F	Termo fonte	
F^p	Taxa de geração ou extinção de massa fase p por unidade de volume	[kg/(m ³ s)]
f^p	Taxa de geração ou extinção de volume da fase p por unidade de volume	[1/s]

F_f	Fluxo fracionário	
G	Função potencial gravitacional	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
J	Matriz jacobiana	
$J^{-1}D$	Operador gradiente discreto	
k_r^p	Permeabilidade relativa da fase p	
nv	Numero de vértices de um elemento	
P^p	Pressão da fase p	$[\text{Pa}]$
R^t	Resíduo associado à conservação da massa total	
R^w	Resíduo associado à conservação da massa da fase água	
Re	Número de Reynolds	
S^p	Saturação da fase p	
S_{max}^w	Saturação máxima de água	
S_{min}^w	Saturação mínima de água	
v^T	Velocidade total na direção x	$[\text{m}/\text{s}]$
X	Coordenada axial x normalizada	$[\text{m}]$
WI	<i>well index</i>	$[\text{m}^3]$

Abreviações

BT	<i>Breakthrough</i>
EbFVM	<i>Element-based Finite Volume Method</i>
EOR	<i>Enhanced Oil Recovery</i>
FIM	<i>Fully Implicit Method</i>
IMPES	<i>IMplicit Pressure, EXplicit Saturation</i>
VPI	Volume poroso injetado

Símbolos Gregos

(ξ, η)	Coordenadas locais	[m]
α_{ac}^w	Termo de acumulação associado à equação do resíduo R^w	[m ³ /s]
α_{aum}	Constante utilizada para aumentar o passo de tempo	
α_{dif}^t	Termo difusivo associado à equação do resíduo R^t	[m ³ /s]
α_{dif}^w	Termo difusivo associado à equação do resíduo R^w	[m ³ /s]
α_{fon}^t	Termo fonte associado à equação do resíduo R^t	[m ³ /s]
α_{fon}^w	Termo fonte associado à equação do resíduo R^w	[m ³ /s]
α_{red}	Constante utilizada para reduzir o passo de tempo	
Γ	Coefficiente difusivo	
λ^p	Mobilidade da fase p	[1/(Pa s)]
θ_f^p	Pseudofluxo da face p na face f	[m ³ /s]
μ_p	Viscosidade da fase p	[Pa s]
Ω	Domínio fechado	
$\overline{\psi}_{\mathcal{P}}$	Média do valor de ψ em \mathcal{P}	
$\partial\Omega$	Fronteira do volume de controle	
ϕ	Porosidade do meio	
Φ^p	Potencial da fase p	[Pa]
ψ	Função definida nos nós de uma malha	
Ψ_e	Vetor com os valores de ψ nos nós do elemento	
τ	Tempo adimensional	
ε	Tolerância especificada	

Sobrescritos e Subscritos

\mathcal{P} Nó da malha

e Elemento

f Face

o Óleo

p Fase p

r Relativo

t Total

w Água

ac Acumulativo

dif Difusivo

fon Fonte

max Máximo

min Mínimo

old Antigo

presc Prescrito

SUMÁRIO

1	Introdução	22
1.1	Simulação de reservatórios	22
1.1.1	Etapas da simulação de reservatórios	23
1.1.2	O fenômeno físico	23
1.2	O modelo bifásico imiscível	25
1.3	O Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos	25
1.4	Revisão bibliográfica	26
1.4.1	Método IMPES	26
1.4.2	Método sequencial	27
1.4.3	Método totalmente implícito	27
1.5	Objetivos e contribuições	27
1.6	Organização do trabalho	28
2	Modelo Matemático	30
2.1	A Lei de Darcy na forma de potenciais	30
2.2	Equações fundamentais do modelo	31
2.3	Propriedades físicas	33
2.3.1	Propriedades dos fluidos	33
2.3.2	Propriedades da rocha	34
2.3.3	Propriedades do conjunto rocha-fluido	35
3	Método Numérico	36
3.1	Método dos Volumes Finitos Baseado em Elementos	36
3.1.1	Entidades geométricas da malha	38
3.1.2	Abordagem numérica	39

3.1.3	Discretização de uma equação de conservação de uma variável genérica	42
3.2	Equações discretizadas	44
3.3	Formulações impes e sequencial	45
3.4	Formulação totalmente implícita	46
3.4.1	Método de <i>Newton</i>	46
4	Implementação Computacional	50
4.1	Métodos impes e sequencial	50
4.1.1	Estrutura geral do simulador	51
4.1.2	Cálculo implícito da pressão	51
4.1.3	Cálculo explícito da saturação	53
4.2	Método totalmente implícito	54
4.2.1	Estrutura geral do simulador	54
4.2.2	Cálculo dos resíduos	55
4.2.3	Construção da matriz jacobiana	61
4.3	Passo de tempo adaptativo	70
4.4	Especificação das tolerâncias	73
5	Resultados	74
5.1	Deslocamento unidimensional	74
5.1.1	Descrição do problema	74
5.1.2	Solução analítica	76
5.1.3	Resultados obtidos	77
5.2	Deslocamento bidimensional em configuração quarter five-spot	90
5.2.1	Descrição do problema	90
5.2.2	Resultados obtidos	91
5.3	Deslocamento tridimensional em malha híbrida	104

5.3.1	Descrição do problema	104
5.3.2	Resultados obtidos	106
6	Conclusão	111
6.1	Sumário	111
6.2	Conclusões	112
6.3	Sugestões para trabalhos futuros	114
	Referências	118

1 INTRODUÇÃO

1.1 SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS

Atribui-se o desígnio *reservatório de petróleo* a um meio poroso que contém hidrocarbonetos. Tendo em vista a concentração de investimentos no setor petrolífero e os grandes efeitos da produção de petróleo na economia global, ascendeu a necessidade de prever e otimizar a performance dos reservatórios. A decisão de implantar um complexo de exploração de petróleo envolve custos elevadíssimos e requer, por conseguinte, uma fundamentação sólida de que será vantajosa. Isso envolve um estudo prévio de viabilidade econômica e operacional.

A análise experimental completa do reservatório não é viável, porquanto ocasionaria além de altos investimentos, muitas dificuldades. Nesse contexto, a simulação de reservatórios desponta como uma potente ferramenta a fim de prognosticar a performance do reservatório e encontrar meios para otimizar a recuperação de certos hidrocarbonetos sob diferentes condições operacionais. Essa área envolve física, matemática, engenharia de reservatórios e programação computacional.

Ainda, a simulação de reservatórios é complexa devido, sobretudo, a dois fatores. O primeiro, é a falta de contato direto com o fenômeno físico o qual se deseja simular. Sendo assim, há dificuldades no processo de caracterização física e, por conseguinte, da seleção de modelos matemáticos adequados que o possam descrever com um grau satisfatório de acurácia. O segundo fator consiste na própria complexidade atrelada ao fenômeno físico, pois que envolve minúcias por vezes nem compreendidas ou extremamente enredado em outros fenômenos, de forma que a dependência mútua das variáveis acarreta uma simulação numérica complicada e custosa.

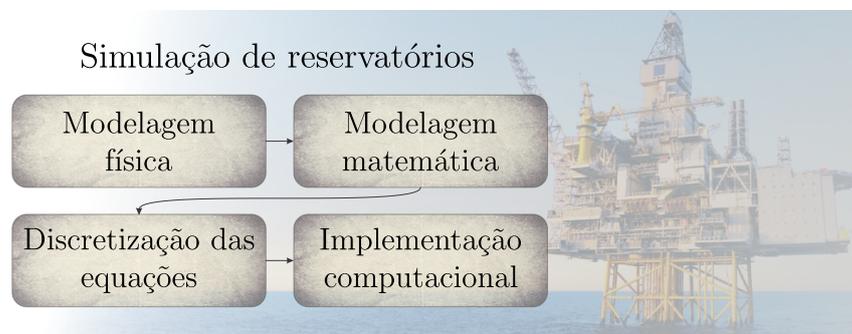
A fim de progredir na descrição dos fenômenos, a área de simulação de reservatórios tem caráter dinâmico, *i.e.*, trata-se de uma área constantemente aprimorada e ampliada. Dada a quantidade de novos modelos propostos destinados à simulação de efeitos progressivamente mais complexos, faz-se interessante dominar, primeiramente, aqueles mais básicos, os quais levam em conta os efeitos mais significativos ao fenômeno físico. Aziz & Settari (1979) sugerem que, antes de partir à implementação de qualquer modelo mais sofisticado, é fundamental adquirir a compreensão do modelo bifásico. O presente trabalho almeja explorar esse modelo a fim de analisar o desempenho de três esquemas de solução

distintos – IMPES, sequencial e totalmente implícito. O conhecimento do modelo mais adequado ao objetivo da simulação numérica é imprescindível à correta interpretação dos resultados obtidos, de forma que essa comparação se faz valiosa quanto à escolha do método a ser utilizado.

1.1.1 ETAPAS DA SIMULAÇÃO DE RESERVATÓRIOS

O processo de simulação de reservatórios envolve quatro etapas de modelagem fortemente atreladas, as quais estão esquematizadas na figura 1.1. Primeiramente, há de se desenvolver um modelo físico para o problema que incorpore os processos mais relevantes à caracterização do fenômeno. A seguir, o problema é modelado matematicamente através de um conjunto de equações diferenciais parciais acopladas e dependentes do tempo. É, então, desenvolvido um método numérico através do qual pode-se implementar computacionalmente a resolução do sistema de equações associados ao fenômeno físico (Chen, 1962).

Figura 1.1: Etapas da simulação de reservatórios



Fonte: do autor

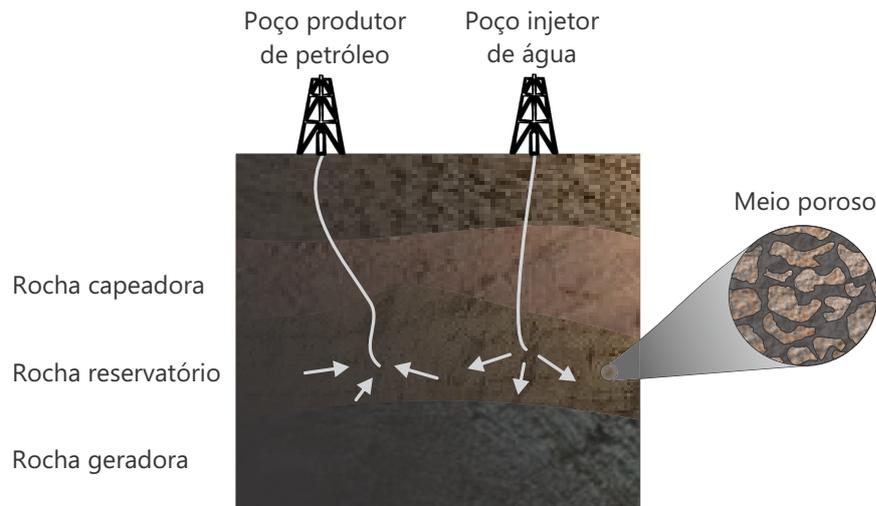
1.1.2 O FENÔMENO FÍSICO

O fenômeno físico de interesse na simulação de reservatórios consiste no escoamento multifásico multicomponentes em um meio poroso. Usualmente, coexistem três fases: água, óleo e gás (da Cunha, 1996). Além disso, essas fases podem conter mais de um componente e estão impregnadas em micro poros rochosos como o arenito (Ewing, 1983).

Reservatórios de petróleo são, de fato, rochas-reservatório e, portanto, são considerados como um meio poroso no qual o escoamento pode ser modelado a partir da equações

de Darcy (Bejan, 2004). O petróleo é produzido na rocha geradora e migra, sobretudo por capilaridade e forças de empuxo, para a rocha reservatório. Não se desloca para as camadas mais próximas à superfície em virtude da presença de uma rocha capeadora, a qual o envolve superiormente e apresenta baixa permeabilidade. Esses tipos de rochas estão ilustrados, esquematicamente, na figura 1.2.

Figura 1.2: Esquema ilustrativo de um reservatório sujeito à recuperação secundária



Fonte: do autor

Na maioria das vezes, o petróleo só pode ser retirado do meio poroso através da imposição de elevados gradientes de pressão oriundos de mecanismos físicos denominados de processos de recuperação (Cordazzo, 2006). Esses processos são divididos em três categorias, a saber (Dake, 2001):

- Recuperação primária: dá-se a perfuração dos poços e a produção sem nenhuma tentativa de elevar a produtividade por meio de injeção de fluidos;
- Recuperação secundária: adota-se uma estratégia de injeção de água ou gás no intuito de manter a pressão, parcialmente ou totalmente, e acelerar o deslocamento do óleo em direção aos poços produtores. A figura 1.2 ilustra esse processo;
- Recuperação avançada (EOR – *Enhanced Oil Recovery*): utiliza técnicas mais sofisticadas a fim de alterar as propriedades originais do óleo. As três principais variantes desse processo envolvem fenômenos químicos, de alteração de miscibilidade e térmicos.

1.2 O MODELO BIFÁSICO IMISCÍVEL

A simulação do processo de recuperação de hidrocarbonetos em reservatórios de petróleo requer a modelagem numérica de escoamentos multifásicos de múltiplos componentes. O modelo matemático pode levar em conta processos de transferência de calor e massa por advecção e difusão e, por vezes, reações químicas.

Tendo em vista a complexidade dos fenômenos físicos associados ao processo de extração, os modelos devem ser simplificados a fim de que sua solução seja viável. Entretanto, a simplificação deve ser realizada de forma que os resultados obtidos sejam aceitáveis, *i.e.*, as hipóteses devem prover aproximações consistentes.

O modelo utilizado no presente trabalho se destina à simulação de processos de deslocamento de duas fases fluidas imiscíveis. Um exemplo característico desse processo é a recuperação secundária de petróleo de reservatórios mediante a injeção de água. Trata-se da modelagem mais simples de escoamentos multifásicos. Em comparação ao escoamento monofásico, requer, pois, técnicas mais avançadas, dada a necessidade de lidar com um sistema acoplado de equações não lineares (Aziz, 1993).

Ademais, usualmente novas técnicas numéricas para modelos mais complexos são implementadas e avaliadas, inicialmente, com o modelo bifásico, o qual apresenta dificuldades semelhantes em relação às questões geométricas (Hurtado, 2005).

1.3 O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS

Os primeiros simuladores utilizados na área de óleo e gás empregavam, inicialmente, apenas malhas cartesianas ortogonais. As dificuldades associadas à geometria complexa dos reservatórios motivaram a introdução de malhas cartesianas não-ortogonais, conhecidas como malhas *corner-point*. Esse tipo de malha estruturada ainda é largamente aplicado em simuladores comerciais.

O Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) emprega malhas não estruturadas para uma representação ainda mais flexível e acurada do domínio. Isto é, permite solucionar o problema em geometrias mais complexas, de forma que representa o problema de forma mais fidedigna. Trata-se de um método versátil e consistente, que

satisfaz a característica fundamental dos Métodos dos Volumes Finitos – conservação da propriedade em níveis elementares (Maliska, 2004).

O EbFVM surgiu, inicialmente, para a solução das equações de Navier-Stokes em Bagli & Patankar (1983). Sua utilização na área de simulação de reservatórios de petróleo ocorreu posteriormente, muito embora ainda seja pouco utilizado em simuladores comerciais. Uma descrição detalhada e completa sobre o EbFVM pode ser encontrada em Hurtado (2011).

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As equações provenientes da modelagem matemática de escoamentos multifásicos compõem um sistema não linear acoplado. Dentre as metodologias utilizadas para resolver esse sistema, destacam-se os métodos IMPES e totalmente implícito (Chen, 1962). A seguir, far-se-á uma breve revisão bibliográfica de ambos os métodos.

1.4.1 MÉTODO IMPES

O método IMPES (*IMplicit Pressure EXplicit Saturation*) foi originalmente desenvolvido por Sheldon *et al.* (1959) e Stone & Garder (1961). A ideia fundamental dessa formulação clássica é dividir o sistema de equações acoplado em sistemas de equações distintos para pressão e saturação, os quais são resolvidos de forma implícita e explícita, respectivamente.

O cálculo explícito da saturação acarreta maior simplicidade quanto à implementação do método e menor custo computacional. Entretanto, sua estabilidade está atrelada à utilização de pequenos passos de tempo. (Chen, 1962) e Coats (1968) discutem a estabilidade dessa formulação.

Desenvolvimentos posteriores foram realizadas em Coats (1982), Watts (1985) e Young & Stephenson (1983) e outras metodologias baseadas no IMPES foram propostas em Buchwalter & Miller (1993), Coats *et al.* (1995) e Cao & Aziz (2002). Posteriormente, Chen & Li (2004) e Hurtado (2005) discutiram um IMPES modificado em que diferentes passos de tempo para pressão e saturação foram aplicados.

1.4.2 MÉTODO SEQUENCIAL

A fim de melhorar a estabilidade da formulação IMPES, MacDonald & Coats (1970) propuseram uma modificação na metodologia IMPES na qual após resolver a pressão implicitamente e a saturação explicitamente, os coeficientes da matriz correspondente ao sistema linear da pressão são atualizados e os campos de pressão e saturação são calculados até que seus valores se alterem menos que uma tolerância especificada.

1.4.3 MÉTODO TOTALMENTE IMPLÍCITO

O método totalmente implícito ou FIM (*Fully Implicit Method*) resolve pressão e saturação implicitamente e simultaneamente, de forma que ascende a necessidade de resolver um sistema não linear de equações. A formulação é incondicionalmente estável e apresenta boa solução para diversos problemas numéricos, conforme descrito em Aziz & Settari (1979), Farnstrom & Ertekin (1987), Peaceman (1977) e Watts (1985).

1.5 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES

Desde sua criação 1981, o SINMEC – Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor, do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina – tem como objetivo o desenvolvimento de metodologias numéricas utilizando, sobretudo, o método dos volumes finitos para resolver problemas que envolvem escoamento de fluidos. A principal linha de pesquisa do laboratório consiste no desenvolvimento de algoritmos empregando malhas não estruturadas com o método dos volumes finitos baseado em elementos (EbFVM). Uma das aplicações de engenharia precípuas nessa área de trabalho é a simulação numérica de escoamentos em reservatórios de petróleo.

Entre 2007 e 2010, o laboratório executou o projeto SIGER I, do qual resultou a biblioteca EFVLib, dedicada ao gerenciamento da topologia e geometria de malhas não estruturadas para a discretização de equações diferenciais parciais pelo método de volumes finitos baseado em elementos.

A principal contribuição deste trabalho consiste na implementação de um simulador bifásico totalmente implícito na biblioteca EFVLib, a qual, anteriormente, não dispunha

de um *solver* não linear. Almeja-se assim, não apenas introduzir uma nova metodologia na biblioteca, mas também analisar seu desempenho na simulação de reservatórios de petróleo. Ainda, tendo em vista o elevado custo computacional atrelado ao método totalmente implícito e ao emprego de malhas não-estruturadas, deseja-se implementar um esquema de passo de tempo adaptativo. Essa implementação tem como intuito verificar tanto a sensibilidade da solução numérica quanto a melhoria de desempenho.

Os objetivos deste trabalho são:

1. Incorporar à EFVlib um método para resolver um sistema não-linear de equações;
2. Desenvolver um simulador bifásico imiscível, isotérmico e incompressível para malhas não-estruturadas aplicando o método dos volumes finitos baseado em elementos;
3. Implementar um esquema de passo de tempo adaptativo e verificar sua influência nas soluções numéricas;
4. Comparar o simulador totalmente implícito implementado aos métodos IMPES e sequencial^a;

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo 2 é apresentada a formulação matemática do problema. São expostos e descritos os conceitos fundamentais à caracterização do modelo, o conjunto de equações diferenciais que modelam o fenômeno físico e o tratamento das propriedades físicas, dos fluidos, da rocha e da interação entre fluidos e rocha.

No capítulo 3 são realizadas as aproximações numéricas que permitem a obtenção da solução do problema por meio de rotinas computacionais. São apresentados o método dos volumes finitos baseado em elementos, as discretizações das equações conservativas e as formulações adotadas para resolver essas equações.

A seguir, no capítulo 4 tem-se a descrição da etapa de implementação computacional do modelo matemático e numérico descrito até então. É descrita a maneira com a qual o código em C^{++} é implementado a fim de resolver o problema proposto satisfazendo to-

^aO IMPES disponível na biblioteca – implementado em (Grein, 2015) – foi modificado para se ajustar às comparações realizadas neste trabalho.

dos os requerimentos já elucidados. Expõe-se também uma visão geral do código, a qual facilita o entendimento do tratamento de dados e de suas relações hierárquicas.

O capítulo 5 se destina à validação do simulador implementado e à apresentação dos resultados obtidos por meio das formulações propostas.

Por fim, no capítulo 6 estão dispostos um sumário, as conclusões e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 MODELO MATEMÁTICO

A obtenção da solução numérica de qualquer problema físico requer sua prévia modelagem matemática (Maliska, 2004). Nessa etapa, aspectos físicos e matemáticos são integrados a fim de que um fenômeno natural possa ser descrito com um certo grau de acurácia, por meio de equações diferenciais. Ressalta-se a importância das hipóteses realizadas ao longo da modelagem, pois que instituem o grau de proximidade entre a descrição e o fenômeno em si.

Ao longo deste capítulo, apresentar-se-á a modelagem matemática do deslocamento bifásico imiscível. Considerando-se, sobretudo, o escoamento no reservatório, será apresentado o conjunto de equações diferenciais que modelam o problema e as variáveis envolvidas em sua descrição.

Para isso, será apresentada a lei de Darcy na forma de potenciais. A seguir, será deduzida a equação de conservação da massa de um componente genérico em escoamento multifásico. Essa equação será, então, adequada às hipóteses e simplificações do modelo implementado. Por fim, descrever-se-á o tratamento das propriedades físicas do fluido e da rocha que apresentam dependência em relação às variáveis primárias do problema.

2.1 A LEI DE DARCY NA FORMA DE POTENCIAIS

Na mecânica dos fluidos em meios porosos, as equações de *Navier-Stokes* dão lugar às observações experimentais expressas matematicamente por meio da Lei de Darcy (Bejan, 2004). Essas observações foram relatadas em Darcy (1856), sugerindo que a velocidade média de um fluido newtoniano escoando em um dado meio poroso sob regime laminar é proporcional ao gradiente de pressão e inversamente proporcional à viscosidade do fluido.

Assumindo-se que o escoamento da fase p no reservatório se dê na presença do campo gravitacional e em regime de Stokes ($Re \leq 1$), *i.e.*, em baixas velocidades, de forma que as forças viscosas sejam dominantes, a Lei de Darcy para a determinação do campo de velocidades \mathbf{u}^p da fase p é dada por

$$\mathbf{u}^p = -\frac{k_r^p}{\mu^p} \mathbb{K} \cdot (\nabla P^p - \rho^p \mathbf{g}), \quad (2.1)$$

em que \mathbb{K} é o tensor permeabilidade absoluta do meio e μ^p , P^p e k_r^p são, respectivamente

a viscosidade, a pressão e a permeabilidade relativa associadas à fase p (Kaviany, 1995).

Para a formulação numérica, a qual será detalhada posteriormente, faz-se mais conveniente o emprego da Lei de Darcy na forma de potenciais. Para isso, define-se a função potencial da fase p como

$$\Phi^p \equiv P^p - \rho^p G, \quad (2.2)$$

em que G é a função potencial gravitacional, dada por

$$G = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}, \quad (2.3)$$

sendo \mathbf{x} o vetor posição e \mathbf{g} , o vetor aceleração da gravidade. Dado isso, o gradiente do potencial da fase p é

$$\nabla \Phi^p = \nabla P^p - \rho^p \mathbf{g}. \quad (2.4)$$

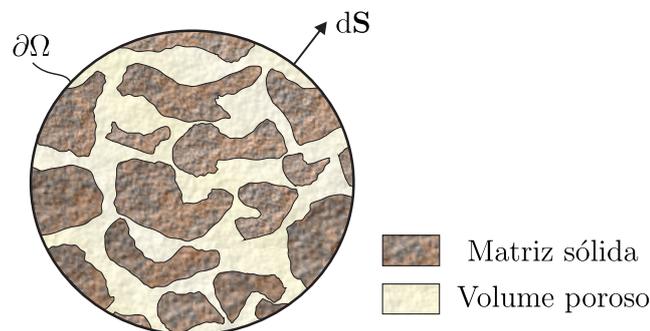
Substituindo a equação (2.4) na equação (2.1), tem-se a Lei de Darcy modificada, escrita na forma de potenciais:

$$\mathbf{u}^p = -\frac{k_r^p}{\mu^p} \mathbb{K} \cdot \nabla \Phi^p. \quad (2.5)$$

2.2 EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO MODELO

A figura 2.1 representa um volume de controle Ω , de volume V , fixo no espaço, extraído de um meio poroso. O vetor área é representado por $d\mathbf{S}$ e a fronteira do volume, por $\partial\Omega$.

Figura 2.1: Volume de controle em um meio poroso



Fonte: modificado de (Hurtado, 2005)

Uma vez que o modelo é imiscível, o balanço de massa de um componente coincide com o balanço de massa da fase associada a esse componente. Sendo assim, pode-se efetuar o balanço de massa de uma fase p do escoamento multifásico através desse volume

de controle, o qual é dado por

$$\frac{\partial M^p}{\partial t} + \int_{\partial\Omega} \rho^p \mathbf{u}^p \cdot d\mathbf{S} = \int_V F^p dV, \quad (2.6)$$

em que F^p é a taxa de geração ou extinção de massa da fase p por unidade de volume.

Tendo em vista que a porosidade ϕ é a razão entre o volume poroso e o volume total do meio e a saturação da fase p é a razão entre o volume ocupado pela fase p e volume poroso do meio, isto é,

$$\phi = \frac{V_\phi}{V} \quad \text{e} \quad S^p = \frac{V_p}{V_\phi}, \quad (2.7)$$

pode-se escrever

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho^p S^p \phi dV + \int_{\partial\Omega} \rho^p \mathbf{u}^p \cdot d\mathbf{S} = \int_V F^p dV. \quad (2.8)$$

Aplicando-se o Teorema da Divergência de Gauss e a condição de escoamento incompressível, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho^p S^p \phi dV + \int_V \rho^p \nabla \cdot \mathbf{u}^p dV = \int_V \rho^p f^p dV, \quad (2.9)$$

em que

$$f^p = \frac{F^p}{\rho^p}. \quad (2.10)$$

Uma vez que o volume de controle é fixo no espaço e o escoamento é incompressível, pode-se reescrever a equação na forma

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (S^p \phi) + \nabla \cdot \mathbf{u}^p - f^p \right] dV = 0. \quad (2.11)$$

Já que a equação (2.11) deve ser válida para qualquer volume V , deve-se ter

$$\frac{\partial}{\partial t} (S^p \phi) + \nabla \cdot \mathbf{u}^p - f^p = 0. \quad (2.12)$$

A velocidade da fase p pode ser substituída pela Lei de Darcy na forma de potenciais dada na equação (2.5). A equação da conservação da massa para a fase p é, então:

$$\frac{\partial}{\partial t} (S^p \phi) + \nabla \cdot (-\lambda^p \mathbb{K} \nabla \Phi^p) - f^p = 0, \quad (2.13)$$

em que λ^p é a mobilidade da fase p , dada por

$$\lambda^p = \frac{k_r^p}{\mu^p}. \quad (2.14)$$

Assim, as equações de conservação da massa das fase água e óleo são dadas, respectiva-

mente, por

$$\frac{\partial}{\partial t}(S^w \phi) + \nabla \cdot (-\lambda^w \mathbb{K} \nabla \Phi^w) - f^w = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(S^o \phi) + \nabla \cdot (-\lambda^o \mathbb{K} \nabla \Phi^o) - f^o = 0. \quad (2.16)$$

O modelo bifásico é completado pela equação de restrição volumétrica

$$S^w + S^o = 1. \quad (2.17)$$

Ainda, assumindo-se que os efeitos de pressão capilar são poucos significativos, considera-se uma única pressão P . Utilizando a equação

$$\nabla \Phi^p = \nabla P - \rho^p \mathbf{g}, \quad (2.18)$$

a pressão pode ser obtida por meio de um pós processamento tendo em vista que assumiu-se escoamento incompressível. Tem-se, assim, três equações – (2.15), (2.16) e (2.17) – e três incógnitas – S^w , S^o e P .

2.3 PROPRIEDADES FÍSICAS

Nos estudos de um reservatório de petróleo, é de caráter essencial o conhecimento das propriedades básicas da rocha e dos fluidos nela contidos. São essas propriedades que determinam as quantidades dos fluidos existentes no meio poroso, sua distribuição, seu comportamento. É evidente que têm forte influência sobre a quantidade de fluido que pode ser extraída e, portanto, se fazem muito importantes no contexto de exploração de petróleo (Thomas, 2001).

Esta seção se destina à descrição da obtenção e tratamento das propriedades físicas abarcadas no modelo matemático apresentado. Primeiramente, serão descritas as propriedades do fluido; posteriormente, da rocha. Por fim, as propriedades associadas ao conjunto rocha-fluido.

2.3.1 PROPRIEDADES DOS FLUIDOS

- **Viscosidades:**

A viscosidade é uma medida da resistência do fluido em relação ao escoamento. Está relacionada diretamente ao tipo e ao tamanho de suas moléculas. Trata-se de um

parâmetro presente em qualquer equação que descreve movimentos de fluidos (McCain Jr, 1990). A viscosidade é função da pressão e da temperatura. Sua variação em virtude da temperatura será desconsiderada, pois que o modelo matemático é destinado a um escoamento isotérmico. Quanto à pressão, a viscosidade é crescente com a pressão para um reservatório subsaturado; decrescente, para saturado (Trangenstein & Bell, 1989). Neste trabalho, contudo, as viscosidades da água e do óleo foram consideradas constantes.

- **Densidades:**

A densidade é a relação entre a massa e o volume da fase. Uma vez que o modelo considerado é incompressível, as densidades da água e do óleo permanecem constantes.

2.3.2 PROPRIEDADES DA ROCHA

- **Porosidade:**

A porosidade é a razão entre o volume poroso e o volume total da rocha. Neste trabalho, a rocha reservatório é considerada incompressível.

- **Permeabilidade absoluta:**

A propriedade permeabilidade absoluta da rocha, presente na Lei de Darcy –equação (2.5)–, é a medida de sua capacidade de permitir o fluxo de fluidos. Neste trabalho, a permeabilidade absoluta é representada na forma de um tensor de segunda ordem. Tal tensor é simétrico, contendo nove componentes Kaviany (1995). A representação é ortotrópica, considerando as direções principais de permeabilidade alinhadas com os eixos de coordenadas x, y, z . Dessa forma, o tensor \mathbb{K} é uma matriz puramente diagonal dada por

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

2.3.3 PROPRIEDADES DO CONJUNTO ROCHA-FLUIDO

- **Permabilidade relativa:**

No escoamento multifásico em meio poroso, faz-se necessário introduzir a permeabilidade relativa na Lei de Darcy no intuito de considerar as interações entre os fluidos (Peaceman, 1977). Permeabilidade relativa é um conceito utilizado para relacionar a permeabilidade absoluta (de um fluido único e saturado) à permeabilidade efetiva do fluido no escoamento multifásico, quando esse ocupa uma fração do volume poroso. Foi observado, experimentalmente, que a permeabilidade relativa é função das saturações – seu valor decresce com a diminuição da saturação da fase (Archer & Wall, 1986). Ou seja, essa propriedade associada ao conjunto rocha-fluido introduz a forma segundo a qual o escoamento é afetado em virtude da presença de outras fases e da matriz porosa. Trangenstein & Bell (1989) afirmam que a permeabilidade relativa depende do volume ocupado por cada fase, da rocha, do histórico do escoamento e da tensão interfacial entre as fases. Essas interações complexas ainda não são totalmente entendidas e dominadas. Pode-se afirmar, contudo, que a movimentação de uma fase também tende à zero conforme sua saturação tende à zero. Ainda, sabe-se que a fase deve alcançar o estado imóvel antes que sua saturação seja nula (Trangenstein & Bell, 1989).

Optou-se por calcular as permeabilidades relativas da água e do óleo por meio do modelo proposto em Corey *et al.* (1956). Para caracterizá-lo, definem-se S_{max}^p e S_{min}^p , as saturações máxima e mínima, respectivamente, da fase p . A permeabilidade relativa desta fase é dada por

$$k_r^w = \alpha^w (\hat{S})^{n^w}, \quad (2.20)$$

$$k_r^o = \alpha^o (1 - \hat{S})^{n^o}, \quad (2.21)$$

em que o parâmetro α^p e o expoente n^p são constantes conhecidas dependentes da interação entre a fase e a rocha e a saturação \hat{S} normalizada é calculada por

$$\hat{S} = \left(\frac{S^w - S_{min}^w}{S_{max}^w - S_{min}^w} \right). \quad (2.22)$$

3 MÉTODO NUMÉRICO

O conjunto de equações que constitui o modelo numérico associado à simulação de um reservatório é, quase sempre, demasiadamente complexo para que o problema físico possa ser solucionado analiticamente. Advém disso a necessidade de introduzir aproximações à formulação numérica, as quais permitam escrever as equações em um formato possível de ser resolvido por rotinas computacionais (Aziz & Settari, 1979).

Maliska (2004) afirma que a tarefa do método numérico é resolver um conjunto de equações diferenciais, substituindo as derivadas por expressões algébricas que envolvam a função incógnita. Nesse procedimento, obtém-se a solução do problema para um número discreto de pontos, com um determinado erro. Se o método adotado for consistente, quanto maior o número de pontos, mais perto da solução exata estará a solução aproximada.

Este capítulo é dedicado à apresentação dos métodos numéricos adotados na solução do modelo bifásico implementado. Serão apresentados o método dos volumes finitos baseado em elementos, as discretizações das equações conservativas e as formulações adotadas para resolver o conjunto de equações.

3.1 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS BASEADO EM ELEMENTOS

Atribui-se o designio de *Método dos Volumes Finitos* (FVM) a qualquer método numérico que satisfaz a conservação da propriedade em níveis elementares no processo de obtenção das equações aproximadas (Maliska, 2004).

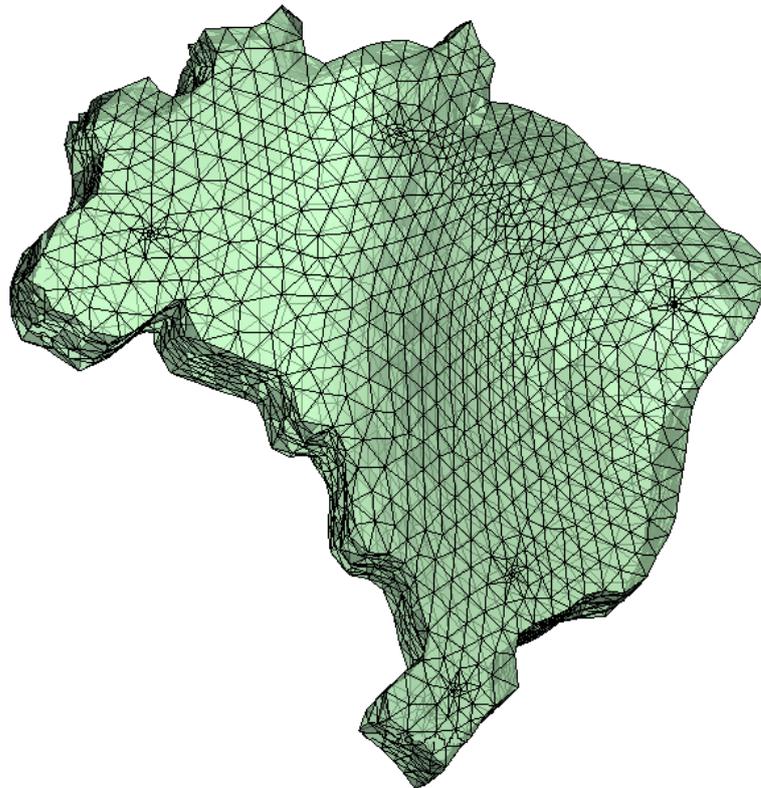
A abordagem frequentemente adotada para deduzir as equações conservativas consiste em realizar um balanço de uma determinada propriedade em um volume de controle pertencente ao domínio do problema. O procedimento de fazer esse volume tender a zero fornece as equações diferenciais. Ao invés de utilizá-las diretamente, o Método dos Volumes Finitos emprega as equações prévias de balanço. Isso assegura o caráter conservativo do método.

Ressalta-se que muitos dos balanços não são facilmente deduzidos – *e.g.* para volumes de controle irregulares. Disso provém a preferência por obter as equações discretizadas através da integração das equações diferenciais, visto que integrar a forma conservativa ou

divergente da equação diferencial e fazer um balanço da propriedade são procedimentos equivalentes (Maliska, 2004).

O Método dos Volumes Finitos baseado em Elementos (EbFVM) é um Método dos Volumes Finitos que explora alguns conceitos provenientes do Método dos Elementos Finitos (FEM) a fim de prover maior flexibilidade geométrica e possibilidade de refinamentos localizados de malha. Por conseguinte, consegue-se alcançar elevada acurácia de representação do domínio mantendo a característica fundamental do método dos volumes finitos – o caráter conservativo (Hurtado, 2011). A formulação adotada permite empregar triângulos e quadriláteros em malhas bidimensionais; hexaedros, tetraedros, prismas e pirâmides, em malhas tridimensionais. Essas malhas são não-estruturadas, o que significa que não há um padrão que possa descrever a configuração dos vizinhos de um dado elemento (Maliska, 2004). O potencial de discretização geométrica de malhas não-estruturadas está ilustrada na figura 3.1, a qual ilustra uma malha de 36950 elementos no formato aproximado do território brasileiro.

Figura 3.1: Potencial geométrico da malha não-estruturada



Fonte: do autor

3.1.1 ENTIDADES GEOMÉTRICAS DA MALHA

A fim de caracterizar completamente uma malha associada a um determinado domínio, deve-se definir o que é uma malha e descrever as entidades que a compõem. Uma malha \mathcal{M} é a coleção de elementos e_i tais que para um domínio fechado Ω tem-se

$$\Omega = \bigcup_{e \in \mathcal{M}} e. \quad (3.1)$$

Cada e deve possuir um interior não vazio. Ainda, deve-se satisfazer

$$\text{Int}(e_i) \cap \text{Int}(e_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j. \quad (3.2)$$

Isto é, a interseção dos interiores dos elementos deve ser um conjunto vazio (Hurtado, 2011). De forma mais simples, pode-se afirmar que os elementos devem cobrir completamente o domínio sem que ocorra superposição ou espaços vazios.

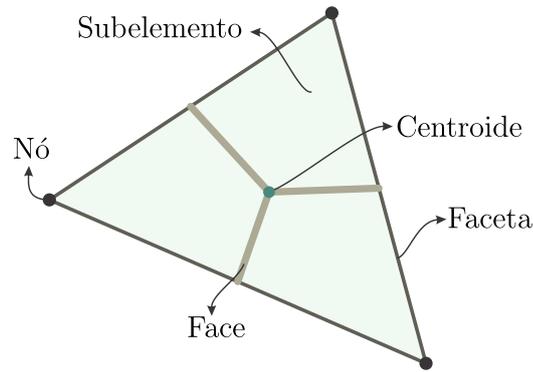
As superfícies que delimitam os elementos são chamadas de facetas. Tratam-se de arestas em elementos 2D e superfícies, em 3D. Cada faceta que não esteja no contorno do domínio é necessariamente compartilhada por dois elementos. Isso significa que não é possível contato parcial entre as facetas e por conseguinte, a malha é conforme (Hurtado, 2011).

As faces dos elementos bidimensionais são definidas como os segmentos que conectam os pontos médios das arestas ao centroide do elemento. A definição para o caso tridimensional é análoga. Essas faces subdividem o elemento em porções denominadas subelementos, os quais estão associados a duas das faces do elemento – com exceção do elemento tridimensional pirâmide, no qual cada subelemento pode estar associado a quatro faces do elemento.

O campo de uma variável do modelo diferencial é aproximado no EbFVM pelos valores discretos em locais coincidentes com os vértices dos elementos da malha, denominados nós. A figura 3.2 ilustra as principais entidades de uma malha para o elemento mais simples: o triângulo. As definições para os demais elementos são similares e podem ser encontradas em (Hurtado, 2011).

A construção do volume de controle se dá a partir dos elementos dispostos ao redor dos nós, conforme ilustrado na figura 3.3. Logo, a superfície de controle é composta por faces de elementos.

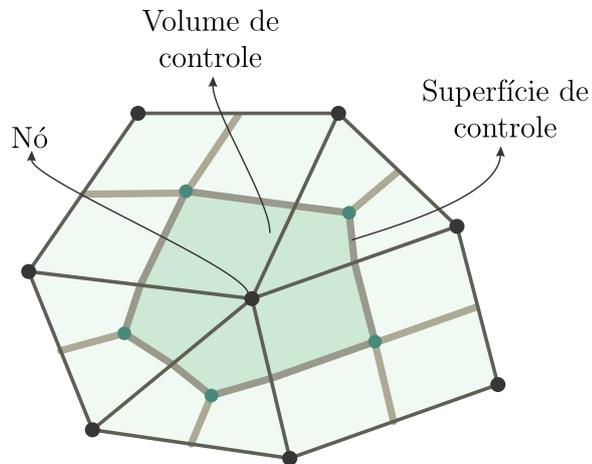
Figura 3.2: Principais entidades de um elemento triangular



Fonte: do autor

Em virtude da disposição geométrica, é conveniente que propriedades físicas tais como porosidade e permeabilidade sejam homogêneas no domínio de um elemento. Assim, não ascende necessidade de adotar qualquer esquema de interpolação a fim de avaliá-los na superfície do volume de controle (Cordazzo, 2006).

Figura 3.3: Construção do volume de controle



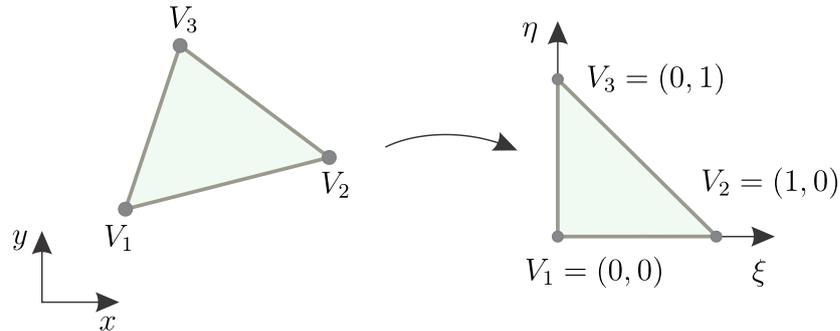
Fonte: do autor

3.1.2 ABORDAGEM NUMÉRICA

A estratégia adotada a fim de lidar com a distorção geométrica dos elementos contidos em uma malha não estruturada é uma transformação denominada mapeamento. Trata-se de uma função bijetora por meio da qual os pontos no espaço físico são representados na forma de elementos regulares em espaços transformados (Hurtado, 2011).

Nesse procedimento, um ponto definido em coordenadas globais – (x, y) no caso bi-dimensional – passa a ser descrito em termos de coordenadas locais – (ξ, η) . A figura 3.4 ilustra o mapeamento de um elemento triangular para o espaço transformado. Conforme será verificado posteriormente, essa transformação facilita a discretizações das equações modelo.

Figura 3.4: Mapeamento para um espaço transformado



Fonte: do autor

O mapeamento das coordenadas locais para as globais é realizado empregando funções de forma de primeira ordem oriundas do Método dos Elementos Finitos. Para cada vértice i pertencente a um elemento, há uma função de forma \mathcal{N}_i , a qual assume valor 1 em i e 0 em todos os outros vértices. Sendo assim, cada ponto $p = (x, y, z)$ pode ser representado segundo a expressão

$$p = \sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_i(\xi, \eta, \zeta) p_i, \quad (3.3)$$

em que p_i , $i = 1, \dots, n_v$, representam os vértices dos elementos; n_v , o número de vértices e (ξ, η, ζ) , as coordenadas locais de P .

As funções de forma devem ser contínuas, diferenciáveis e partições da unidade, de forma que sejam valores positivos e satisfaçam a equação

$$\sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_i(\xi, \eta, \zeta) = 1. \quad (3.4)$$

para qualquer ponto (ξ, η, ζ) no sistema local de coordenadas Zienkiewicz & Taylor (2000).

Seja ψ uma função definida nos nós de uma malha. O EbFVM propõe que o valor de ψ dentro do elemento seja dado pela relação

$$\psi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \psi_i. \quad (3.5)$$

Portanto, o valor de ψ dentro do elemento é uma média ponderada de seus valores nos

vértices do elemento e o peso dessa média é dado pela função de forma.

Uma vez que funções de forma são diferenciáveis, o gradiente de ψ no sistema de coordenadas global pode ser expresso conforme

$$\begin{aligned} \nabla\psi &= \nabla\left(\sum_{i=1}^{n_v} \mathcal{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \psi_i\right) = \sum_{i=1}^{n_v} \begin{pmatrix} \partial_x \mathcal{N}_i \\ \partial_y \mathcal{N}_i \\ \partial_z \mathcal{N}_i \end{pmatrix} \psi_i \\ \Rightarrow \nabla\psi &= \begin{pmatrix} \partial_x \mathcal{N}_1 & \partial_x \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_x \mathcal{N}_{n_v} \\ \partial_y \mathcal{N}_1 & \partial_y \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_y \mathcal{N}_{n_v} \\ \partial_z \mathcal{N}_1 & \partial_z \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_z \mathcal{N}_{n_v} \end{pmatrix} \Psi_e, \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que

$$\Psi_e = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \cdots & \psi_{n_v} \end{pmatrix}^T \quad (3.7)$$

é um vetor com os valores de ψ nos nós do elemento.

As funções de forma, contudo, são usualmente dadas em termos das coordenadas locais e, por conseguinte, utilizar as derivadas de \mathcal{N}_i com respeito às coordenadas globais é inconveniente. Aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi \mathcal{N}_i \\ \partial_\eta \mathcal{N}_i \\ \partial_\zeta \mathcal{N}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\xi y & \partial_\xi z \\ \partial_\eta x & \partial_\eta y & \partial_\eta z \\ \partial_\zeta x & \partial_\zeta y & \partial_\zeta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \mathcal{N}_i \\ \partial_y \mathcal{N}_i \\ \partial_z \mathcal{N}_i \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

A matriz J dada por

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\xi y & \partial_\xi z \\ \partial_\eta x & \partial_\eta y & \partial_\eta z \\ \partial_\zeta x & \partial_\zeta y & \partial_\zeta z \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

é a matriz Jacobiana. Seu cômputo pode ser realizado através da equação (3.3) Hurtado (2011). Definindo a matriz

$$D \equiv \begin{pmatrix} \partial_\xi \mathcal{N}_1 & \partial_\xi \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_\xi \mathcal{N}_{n_v} \\ \partial_\eta \mathcal{N}_1 & \partial_\eta \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_\eta \mathcal{N}_{n_v} \\ \partial_\zeta \mathcal{N}_1 & \partial_\zeta \mathcal{N}_2 & \cdots & \partial_\zeta \mathcal{N}_{n_v} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

pode-se elucidar a equação (3.6) no formato

$$\nabla\psi = J^{-1}D\Psi_e. \quad (3.11)$$

A matrix $J^{-1}D$ pode ser considerada como um operador gradiente discreto (Grein, 2015).

3.1.3 DISCRETIZAÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DE UMA VARIÁVEL GENÉRICA

Maliska (2004), propõe que a equação de conservação de uma propriedade genérica ψ associada a um escoamento seja escrita na forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\psi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\psi) + F, \quad (3.12)$$

em que ρ é a massa específica, \mathbf{u} é a velocidade do fluido, Γ é um coeficiente difusivo e F , um termo fonte associado à propriedade conservada. Na equação (3.12), o primeiro termo é o de acumulação; o segundo, advectivo; o terceiro, difusivo; o quarto, o termo fonte.

A fim de realizar discretização da equação (3.12), realiza-se uma integração dessa equação para cada volume de controle. Almejando a clareza dos procedimentos, cada termo apresentado na equação (3.12) será discretizado separadamente. Considera-se um volume de controle arbitrário \mathcal{P} – vide figura 3.3 – e uma malha fixa.

A discretização do termo de acumulação se dá utilizando a formulação totalmente implícita (Maliska, 2004):

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\psi) \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{P}} \rho\psi \, dV = \frac{\partial}{\partial t}(M_{\mathcal{P}}\bar{\psi}_{\mathcal{P}}) \approx \frac{\partial}{\partial t}(M_{\mathcal{P}}\psi_{\mathcal{P}}), \quad (3.13)$$

em que $M_{\mathcal{P}}$ é massa contida no volume \mathcal{P} e $\bar{\psi}_{\mathcal{P}}$ é média do valor de ψ em \mathcal{P} . Essa média é, no Método dos Volumes Finitos, aproximada pelo valor da propriedade no nó. Essa aproximação é razoável, pois que o nó se localiza, geralmente, próximo ao centro do volume de controle.

A discretização do termo fonte é similar:

$$\int_{\mathcal{P}} F \, dV \approx F_{\mathcal{P}}V_{\mathcal{P}}, \quad (3.14)$$

O termo de transporte advectivo é discretizado por meio da aplicação do Teorema da

Divergência de Gauss:

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \psi) \, dV = \int_{\partial \mathcal{P}} (\rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \psi \, dA \approx \sum_f (\rho \mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{A}_f) \psi_f = \sum_f \dot{m}_f \psi_f, \quad (3.15)$$

em que o índice f representa a face do volume de controle; $\partial \mathcal{P}$, seu contorno; $\Delta \mathbf{A}_f$ o vetor área associado à face f e \dot{m}_f o fluxo de massa que a atravessa. O valor da propriedade ψ_f na face no centro da face é calculado a partir de algum método de interpolação, como CDS ou UDS.

Por fim, parte-se à discretização do termo difusivo – o último termo da equação (3.12). A discretização desse termo é similar àquela realizada para o termo advectivo. Novamente, lança-se mão do Teorema da Divergência de Gauss e da definição do operador gradiente discreto – equação (3.11) – para obter

$$\int_{\mathcal{P}} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \psi) \, dV = \int_{\partial \mathcal{P}} (\Gamma \nabla \psi) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA \approx \sum_f (\Gamma \nabla \psi)_f \cdot \Delta \mathbf{A}_f = (\Gamma J^{-1} D \Psi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f. \quad (3.16)$$

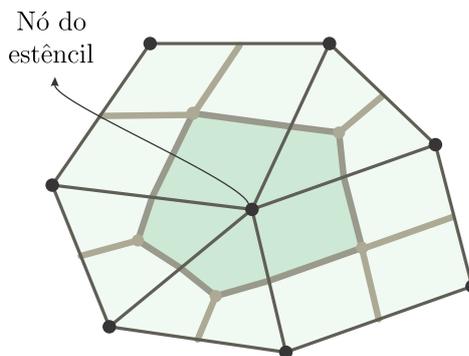
Infere-se das equações discretizadas que as equações discretizadas envolvem, além do próprio nó associado a \mathcal{P} , os nós que compartilham um elemento com o nó \mathcal{P} . Sendo assim, esse é o estêncil associado ao EbFVM.

Matematicamente, se $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$ é o conjunto dos elementos que compartilham o nó \mathcal{P} e \mathcal{N}^e , o conjunto dos nós associados ao elemento e , então o estêncil $\mathcal{S}^{\mathcal{P}}$ é dado por

$$\mathcal{S}^{\mathcal{P}} = \bigcup_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} \mathcal{N}^e. \quad (3.17)$$

Graficamente, a figura 3.5 exhibe em preto os nós, os quais em conjunto, compõem o estêncil associado ao nó \mathcal{P} .

Figura 3.5: Estêncil associado ao nó \mathcal{P}



Fonte: adaptado de (Grein, 2015)

3.2 EQUAÇÕES DISCRETIZADAS

Empregando o procedimento de discretização exposto anteriormente, obtém-se a equação de conservação da massa das fases água e óleo para um dado volume de controle \mathcal{P} da malha, as quais são

$$\frac{\phi_{\mathcal{P}} \Delta V_{\mathcal{P}}}{\Delta t} [S_{\mathcal{P}}^w - (S_{\mathcal{P}}^w)^{\text{old}}] + \sum_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} (-\lambda^w \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f = q_{\mathcal{P}}^w \Delta V_{\mathcal{P}}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\phi_{\mathcal{P}} \Delta V_{\mathcal{P}}}{\Delta t} [S_{\mathcal{P}}^o - (S_{\mathcal{P}}^o)^{\text{old}}] + \sum_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} (-\lambda^o \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f = q_{\mathcal{P}}^o \Delta V_{\mathcal{P}}, \quad (3.19)$$

em que o índice superior old indica o valor da propriedade no passo de tempo anterior, Φ_e é um vetor com os valores de Φ nos nós do elemento e e $\mathcal{E}^{\mathcal{P}}$ é o conjunto de elementos que compartilham o nó \mathcal{P} .

Em conjunto com a equação de restrição volumétrica equação (2.17) tem-se três equações para as três variáveis primárias: P , S^w e S^o .

Esse conjunto de equações pode ser, ainda, manipulado algebricamente para que o sistema de equações seja resolvido de forma mais conveniente. Somando a equação (3.18) à equação (3.19) e substituindo a equação (2.17) chega-se à conservação da massa global, dada por

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} (-\lambda^t \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f = q_{\mathcal{P}}^t \Delta V_{\mathcal{P}}, \quad (3.20)$$

em que

$$\lambda^t = (\lambda^w + \lambda^o) \quad \text{e} \quad q^t = (q^w + q^o) \quad (3.21)$$

são, respectivamente, mobilidade e termo fonte totais.

As equações a serem resolvidas são as equações de conservação da massa da água – equação (3.18)– e a equação de conservação da massa global – equação (3.20). Assim, há duas equações para duas variáveis primárias – S^w e P . A pressão pode ser obtida a partir do potencial por meio da expressão

$$\Phi = P - \rho G. \quad (3.22)$$

Já a saturação do óleo pode ser calculada por meio da equação (2.17). Em virtude de sua relação estreita com a implementação computacional, a construção do sistema de equações será explicado apenas no capítulo subsequente.

3.3 FORMULAÇÕES IMPES E SEQUENCIAL

O método IMPES (*IMplicit Pressure Explicit Saturation*), em sua formulação clássica, fundamenta-se na divisão do sistema acoplado de equações em sistemas de equações distintos para pressão e saturação, os quais são resolvidos de forma implícita e explícita, respectivamente. O cálculo explícito da saturação acarreta menor custo computacional, e estabilidade condicionada a pequenos passos de tempo (Chen, 1962).

As equações associadas ao cálculo implícito de P e explícito de S^w são, respectivamente:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^p} (-\lambda^t \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f = q_p^t \Delta V_p, \quad (3.23)$$

$$S_p^w = (S_p^w)^{\text{old}} + \frac{\Delta t}{\phi_p \Delta V_p} \sum_{e \in \mathcal{E}^p} (-\lambda^w \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f - \frac{\Delta t q_p^w}{\phi_p}. \quad (3.24)$$

O procedimento iterativo para determinar as variáveis primárias do problema através do IMPES clássico é:

1. Especificar os valores iniciais das variáveis primárias – P e S^w – em todos os volumes de controle da malha;
2. Calcular as mobilidades em todos os volumes de controle da malha;
3. Interpolarmobilidades nas faces dos elementos;
4. Resolver o sistema linear da equação da pressão – equação (3.23);
5. A partir da solução obtida para a pressão, calcular a saturação da água explicitamente – equação (3.24)
6. Avançar a solução no tempo e retornar ao item 2 até atingir a simulação do tempo total desejado.

O método sequencial calcula as variáveis primárias de modo similar. Neste caso, contudo, após o passo 5, retorna-se ao 2 até que os campos de pressão e saturação mudem menos que uma dada tolerância.

3.4 FORMULAÇÃO TOTALMENTE IMPLÍCITA

No método totalmente implícito ou FIM (*Fully Implicit Method*) as variáveis são resolvidas de maneira concomitante. Trata-se da formulação mais estável e robusta para a simulação de reservatórios. Apresenta limitações de passo de tempo menos restritivas em relação aos esquemas que linearizam o acoplamento entre pressão e saturação, como é feito no método IMPES (*Implicit Pressure, Explicit Saturation*). (Chen, 1962).

3.4.1 MÉTODO DE *Newton*

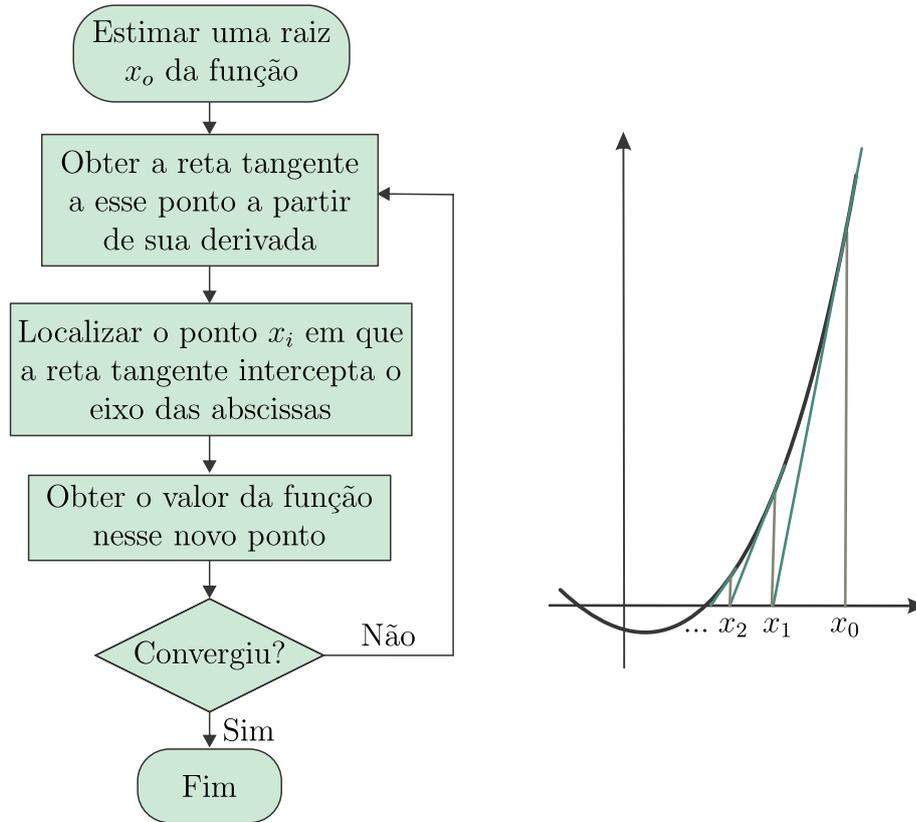
Quanto à aplicação do FIM, faz-se necessário o emprego de um *solver* não linear para a resolução do sistema de equações. No intuito de resolver esse sistema, foi adotado o método de *Newton* contido na biblioteca PETSc (*Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation*). As rotinas implementadas nessa biblioteca são eficientes e têm suporte para a resolução dos problemas em paralelo (Balay *et al.*, 2009). Antes de utilizar a PETSc, contudo, as equações devem ser preparadas à aplicação do método de *Newton*.

A ideia fundamental desse método é mais simples de ser entendida no caso unidimensional, no qual deseja-se determinar, de forma iterativa, as raízes de uma função a partir de uma estimativa inicial. Calcula-se a reta tangente à função no ponto associado à estimativa. Determina-se, então, a interseção dessa reta tangente com o eixo das abcissas a fim de encontrar uma melhor aproximação para a raiz. Repetindo esse procedimento, tem-se um método iterativo que pode ser utilizado para estimar a raiz de uma função. Matematicamente, o método de *Newton* para funções de uma variável é representado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (3.25)$$

em que n indica a n -ésima iteração e $f'(x_n)$ é a derivada da função f em x_n . Esse procedimento iterativo está ilustrado e descrito na figura 3.6.

Figura 3.6: Método de Newton para funções de uma variável



Fonte: do autor

No caso de funções de múltiplas variáveis – caso deste trabalho –, o método de *Newton* apresentado para uma única variável deve ser expandido a uma forma mais genérica. Nessa, são resolvidas, simultaneamente, raízes de várias funções, as quais são denominadas resíduos. As equações resíduo associadas às equações de conservação discretizadas são

$$R^w = \frac{\phi_p \Delta V_p}{\Delta t} [S_p^w - (S_p^w)^{\text{old}}] + \sum_{e \in \mathcal{E}^p} (-\lambda^w \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f - q_p^w \Delta V_p, \quad (3.26)$$

$$R^t = \sum_{e \in \mathcal{E}^p} (-\lambda^t \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f - q_p^t \Delta V_p, \quad (3.27)$$

uma vez que as raízes dessas funções consistem na solução do sistema de equações. Nas equações 3.26 e 3.27 o símbolo R^w denota o resíduo associado à conservação da massa da água e R^t , da conservação da massa total. Ambos os resíduos são funções da saturação da água S^w e da pressão P , as quais constituem as variáveis primárias do problema.

O procedimento iterativo utilizado no intuito de determinar essas variáveis primárias está listado a seguir:

1. Construir um vetor \mathbf{X} com as estimativas das variáveis primárias – P e S^w – em todos os volumes de controle da malha;
2. Calcular as propriedades e as mobilidades em todos os volumes de controle da malha;
3. Interpolarm as mobilidades nas faces dos elementos;
4. Computar os resíduos de cada equação – R^w e R^t – em todos os volumes de controle da malha;
5. Computar as derivadas parciais dos resíduos em cada nó através da expansão em série de Taylor truncada^a

$$\frac{\partial R^i}{\partial X} = \frac{R^i(X + dX) - R^i(X)}{dX}; \quad (3.28)$$

6. Resolver o sistema linear

$$J \Delta \mathbf{X} = -\mathbf{R}; \quad (3.29)$$

em que J é a matriz jacobiana, contendo todas as derivadas parciais dos resíduos em todos os volumes; $\Delta \mathbf{X}$, o vetor com as correções a serem aplicadas às estimativas e \mathbf{R} , o vetor contendo os resíduos correspondentes às estimativas;

7. Corrigir o valor das variáveis contidas em \mathbf{X} por meio da equação

$$\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \Delta \mathbf{X}; \quad (3.30)$$

8. Retornar ao item 2 e iterar até que seja atingida a convergência;
9. Retornar ao item 2 e avançar a solução no tempo até a simulação do tempo total desejado.

Assim, todas as variáveis são resolvidas de forma implícita, e, portanto, podem ser utilizados passos de tempo significativamente maiores àqueles utilizados em métodos que apresentam algum caráter explícito Aziz & Settari (1979).

^aRessalta-se que os resíduos são funções de S^w e P , de forma que a derivada numérica em relação a \mathbf{X} deve levar em conta a contribuição dessas duas variáveis. A forma por meio da qual essas contribuições são consideradas serão detalhadas posteriormente.

No capítulo ulterior, destinado ao tema implementação computacional, procedimentos tais como a construção da matriz jacobiana serão mais bem detalhados.

4 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Conquanto as fases de modelagem matemática e numérica detenham papéis fundamentais à acurácia com a qual o fenômeno físico é representado, é por meio da implementação computacional que se obtêm os resultados concretos através da simulação numérica do problema. Maliska (2004) afirma que o desenvolvimento de um bom programa computacional requer a harmonia entre o uso das ferramentas computacionais disponíveis, a estratégia de depuração dos erros e a ulterior interpretação correta dos resultados.

Este capítulo se destina à descrição de alguns aspectos relacionados à implementação computacional. Também proporciona uma visão geral do simulador do ponto de vista de programação. Isso facilita o entendimento da forma por meio da qual o conjunto de dados físicos foi tratado e da inter-relação entre cada módulo implementado. A possibilidade de adquirir essa visão é importante, pois que estreita o caminho entre a percepção de um fenômeno físico e a capacidade de obter algum resultado a partir das equações abstratas que o modelam.

Primeiramente, as metodologias IMPES e totalmente implícita serão explicadas do ponto de vista de implementação. Posteriormente, será explicado um esquema de passo de tempo adaptativo implementado a fim de reduzir o esforço computacional de ambas as formulações.

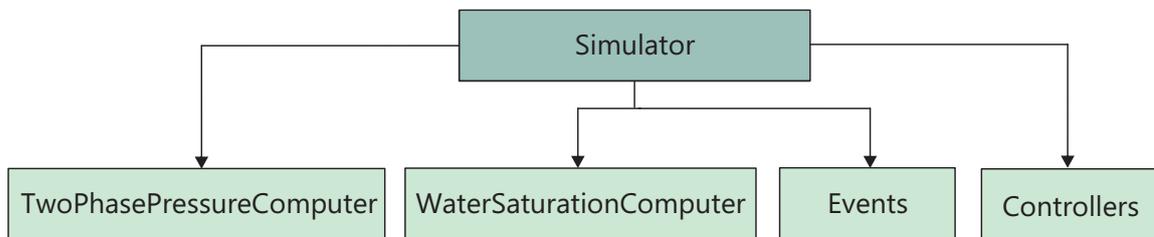
4.1 MÉTODOS IMPES E SEQUENCIAL

O método IMPES, conforme já discutido anteriormente, é mais simples e direto do ponto de vista de implementação, quando comparado ao método totalmente implícito. Esta seção de destina ao esclarecimento da abordagem computacional utilizada para obter a solução do problema. Primeiramente, será exposta a estrutura geral do simulador. A seguir, serão brevemente descritos os procedimentos de cálculo implícito da pressão e explícito da saturação. Para mais detalhes quanto ao tratamento numérico do modelo por meio do método dos volumes finitos baseado em elementos, consultar Hurtado (2011).

4.1.1 ESTRUTURA GERAL DO SIMULADOR

A simulação do escoamento bifásico por meio da formulação IMPES é fundamentado em uma classe denominada `Simulator`. Essa classe é responsável por administrar a resolução implícita da pressão por meio da classe `TwoPhasePressureComputer` e pelo cálculo explícito da saturação, por meio da classe `WaterSaturationComputer`. Ainda há classes derivadas das classes abstratas `Event` e `Controller`, as quais são, respectivamente, destinadas à execução de eventos – *e.g.* avanço no tempo e exportação de dados – e controle da simulação – *e.g.* verificar convergência e chegada ao tempo final de simulação. A relação entre essas classes está ilustrada esquematicamente na figura 4.1.

Figura 4.1: Classes responsáveis pela simulação pelo método IMPES



Fonte: do autor

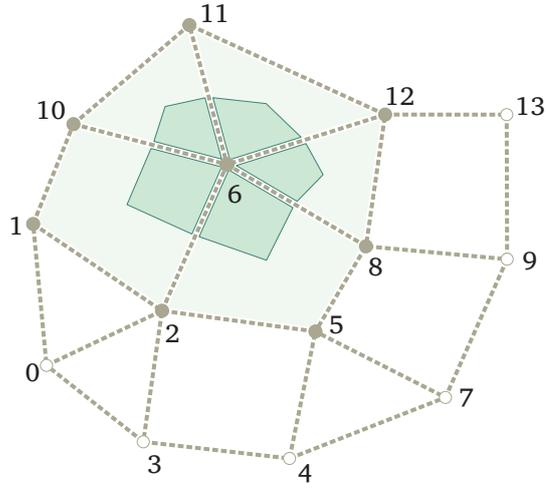
4.1.2 CÁLCULO IMPLÍCITO DA PRESSÃO

O cálculo implícito da pressão consiste em resolver o sistema linear constituído pelas equações de conservação da massa total para cada nó da malha. A equação para o nó \mathcal{P} é dada por

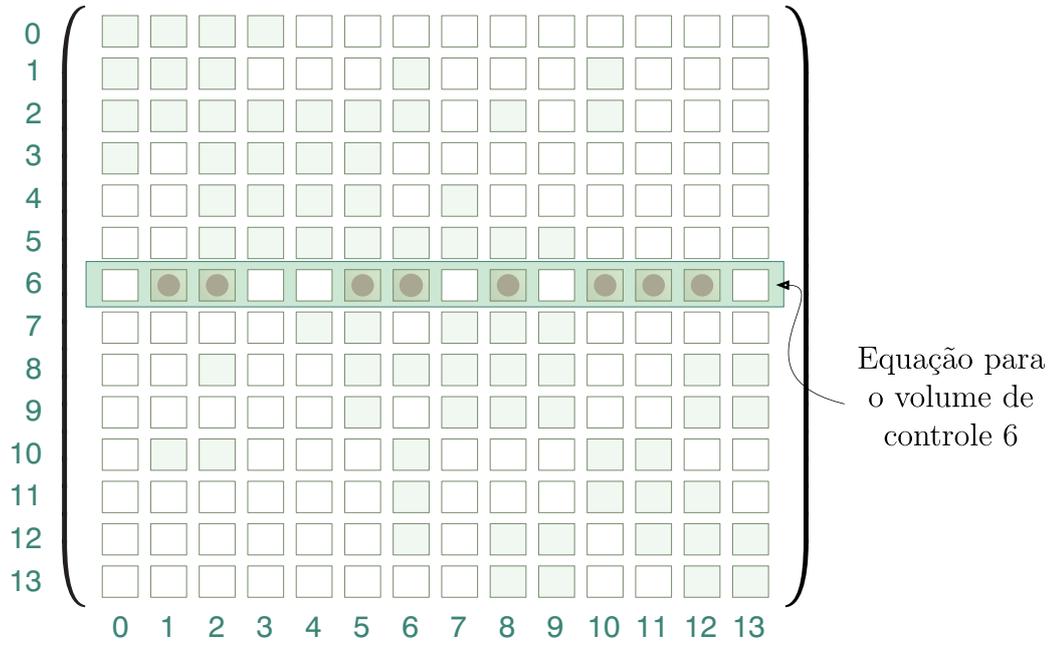
$$\sum_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} (-\lambda^t \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f = q_{\mathcal{P}}^t \Delta V_{\mathcal{P}}. \quad (4.1)$$

A fim de adicionar os termos da equação (4.1) à matriz do sistema linear da pressão sem executar procedimentos duplicados, procede-se conforme o pseudocódigo representado na listagem 4.1. A estrutura final da matriz do sistema linear está ilustrada, para uma malha bidimensional simples, na figura 4.2.

Figura 4.2: Exemplo de estrutura da matriz do sistema linear da pressão



Matriz do sistema linear



Fonte: modificado de (Hurtado, 2011)

Listagem 4.1: Pseudocódigo da rotina que resolve o sistema linear da pressão

```

1  PARA todos os elementos da malha
2      PARA todas as faces do elemento
3          PARA todos os nós do elemento
4              calcular contribuição do nó no fluxo difusivo
5              adicionar contribuição às equações referentes aos nós atrás ...
6              ... e à frente da face
7          FIM PARA
8      FIM PARA
9  FIM PARA

```

Já o termo do lado direito da equação (4.1) é adicionado diretamente ao termo independente, por meio de uma varredura dos nós do poço ou da fronteira com condição de contorno do tipo Neumann. Caso a condição de contorno seja do tipo Dirichlet as linhas da equação dos nós da fronteira são zeradas, exceto a entrada da diagonal principal, à qual é atribuído o valor 1. Ao termo independente é, então, atribuído o valor prescrito. Dadas as montagens da matriz e do termo independente, tem-se o sistema linear, do qual são calculadas as pressões para um determinado passo de tempo.

4.1.3 CÁLCULO EXPLÍCITO DA SATURAÇÃO

O cálculo explícito da saturação é dado a partir dos valores de pressão calculados implicitamente para o passo de tempo em questão. A equação resolvida explicitamente é

$$S_p^w = (S_p^w)^{\text{old}} + \frac{\Delta t}{\phi_p \Delta V_p} \sum_{e \in \mathcal{E}^p} (-\lambda^w \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f - \frac{\Delta t q_p^w}{\phi_p}. \quad (4.2)$$

A maneira de construir a equação explícita é análoga àquela relativa ao sistema linear. Nesse caso, contudo, não há necessidade de montar a matriz com essas contribuições, pois que os valores de pressão são conhecidos e pode-se efetuar o somatório presente na equação (4.2) diretamente.

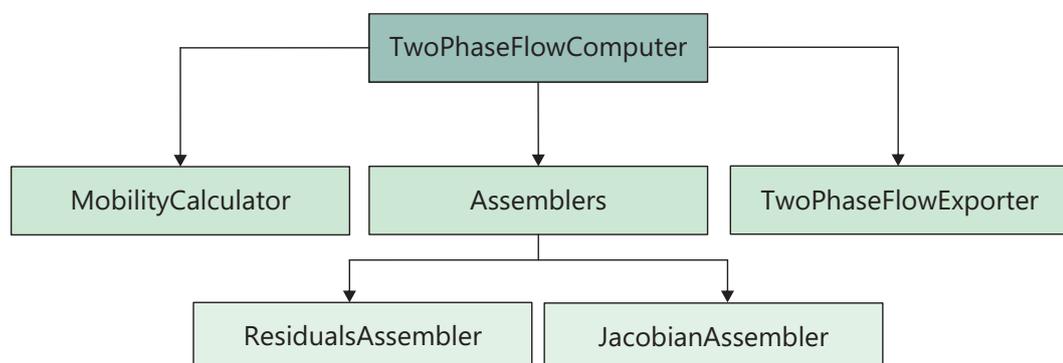
4.2 MÉTODO TOTALMENTE IMPLÍCITO

O método totalmente implícito é mais laborioso tanto do ponto de vista de formulação quanto de implementação. Há de se atentar para diversos detalhes referentes não somente ao método numérico em si, mas também aos aspectos computacionais envolvidos em sua concepção. Esta seção se destina ao esclarecimento da abordagem computacional utilizada para obter a solução do problema. Primeiramente, será exposta a estrutura geral do simulador. A seguir, serão detalhados os procedimentos de cálculo dos resíduos e construção da matriz jacobiana.

4.2.1 ESTRUTURA GERAL DO SIMULADOR

A simulação do escoamento bifásico por meio da formulação totalmente implícita é fundamentado em uma classe denominada `TwoPhaseFlowComputer`. Essa classe é responsável por administrar a resolução do sistema não linear, a qual é efetuada com o suporte da biblioteca PETSc (Balay *et al.*, 2013). Para isso, a `TwoPhaseFlowComputer` possui classes responsáveis por calcular as mobilidades (`MobilityCalculator`); montar os resíduos (`ResidualsAssembler`); montar a matriz jacobiana (`JacobianAssembler`) e exportar a solução numérica de forma que essa possa ser visualizada convenientemente (`TwoPhaseFlowExporter`). A relação entre essas classes está ilustrada esquematicamente na figura 4.3.

Figura 4.3: Classes responsáveis pela simulação pelo método FIM



Fonte: do autor

A classe `TwoPhaseFlowComputer` contém a função responsável pela resolução do sistema não linear, a qual está representada em pseudocódigo na listagem 4.2. As opera-

ções executadas nas linhas 2 e 3 da listagem são executadas, respectivamente, pelas classes `ResidualsAssembler` e `JacobianAssembler`. A linha 6, por sua vez, se refere ao passo de tempo adaptativo já explicado anteriormente.

Listagem 4.2: Pseudocódigo da rotina que resolve o sistema não linear

```

1  Alocar memória para o vetor de resíduos
2  Alocar memória para a matriz jacobiana
3  REPETIR
4      Resolver o sistema não linear utilizando a PETSc ...
5          ...( informando à biblioteca a implementação própria das funções ...
6              ... de montagem do vetor de resíduos e da matriz jacobiana)
7  SE convergência atingida e saturação consistente ENTÃO
8      Ajustar passo de tempo
9      Avançar a solução no tempo
10 SE NÃO
11     Ajustar passo de tempo
12 FIM SE
13 ENQUANTO tempo final atingido

```

4.2.2 CÁLCULO DOS RESÍDUOS

A fim de facilitar a indexação das variáveis, optou-se por dispô-las de forma que a saturação e a pressão de um dado volume de controle consistam em entradas adjacentes do vetor de resíduos. A classe `ResidualsAssembler` dispõe de uma função que calcula os resíduos R^w e R^t e já os adiciona nas posições corretas do vetor resíduo. Essa adição é feita por etapas nas quais são calculados os termos difusivo, acumulativo e fonte denotados, respectivamente, por α_{dif} , α_{ac} e α_{fon} nas equações a seguir:

$$R^w = \overbrace{\frac{\phi_p \Delta V_p}{\Delta t} [S_p^w - (S_p^w)^{\text{old}}]}^{\alpha_{\text{ac}}} + \overbrace{\sum_{e \in \mathcal{E}^p} (-\lambda^w \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f}_{\alpha_{\text{dif}}} - \overbrace{q_p^w \Delta V_p}_{\alpha_{\text{fon}}}. \quad (4.3)$$

$$R^t = \sum_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} \overbrace{(-\lambda^t \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f}^{\alpha_{\text{dif}}^t} - \overbrace{q_{\mathcal{P}}^t \Delta V_{\mathcal{P}}}^{\alpha_{\text{fon}}^t}, \quad (4.4)$$

A função responsável por esses cálculos está representada em pseudocódigo na listagem 4.8. As quatro subrotinas chamadas na listagem 4.8 serão explicadas nos itens a seguir.

Listagem 4.3: Pseudocódigo da rotina que computa os resíduos

-
- 1 **CHAMA** função que adiciona o termo difusivo
 - 2 **CHAMA** função que adiciona o termo acumulativo
 - 3 **CHAMA** função que adiciona termo fonte
 - 4 **CHAMA** função que aplica condições de contorno
-

ADIÇÃO DO TERMO DIFUSIVO A adição dos termo difusivos correspondentes às equações de conservação da massa da água e global,

$$\alpha_{\text{dif}}^w = \sum_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} (-\lambda^w \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f \quad \text{e} \quad \alpha_{\text{dif}}^t = \sum_{e \in \mathcal{E}^{\mathcal{P}}} (-\lambda^w \mathbb{K} J^{-1} D \Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f, \quad (4.5)$$

foi implementada de forma que não fossem realizados cálculos e procedimentos duplicados. A listagem 4.4 contém o pseudocódigo da função que executa essa operação.

Listagem 4.4: Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo difusivo nos resíduos

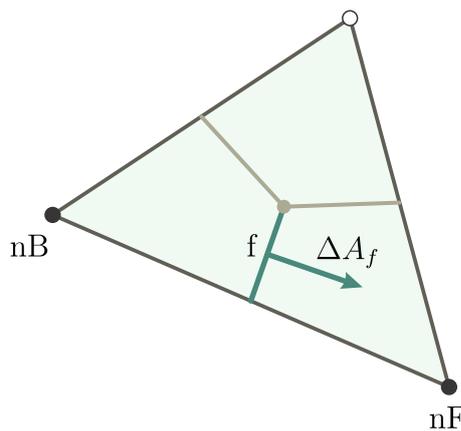
-
- 1 **PARA** todos os elementos da malha
 - 2 **PARA** todas as faces do elemento
 - 3 calcular fluxo difusivo de água
 - 4 calcular fluxo difusivo total
 - 5 adicionar fluxos nas equações referentes aos volumes de controle ...
 - 6 ... separados pela face
 - 7 **FIM PARA**
 - 8 **FIM PARA**
-

Ressalta-se que as mobilidades λ^w e λ^t devem ser avaliadas nas faces. Tendo em vista que a mobilidade é função de variáveis primárias armazenadas nos nós, essas são primeiramente avaliadas nos nós. Posteriormente, esses valores são interpolados a fim de determinar as mobilidades na face do volume de controle. Essa interpolação foi realizada pelo esquema *upwind*, o qual tem relação direta com o termo parabólico da equação, *i.e.*, o valor da função na interface é igual ao valor do volume de controle a montante (Maliska, 2004). Matematicamente, tem-se

$$\lambda_f^p = \begin{cases} \lambda_{nB}^p & \text{se } \mathbf{V}^p \cdot \Delta \mathbf{A}_f \geq 0; \\ \lambda_{nF}^p & \text{se } \mathbf{V}^p \cdot \Delta \mathbf{A}_f < 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde nB e nF indicam os nós atrás e a frente da face, conforme mostrado na figura 4.4.

Figura 4.4: Esquema de interpolação *upwind* em elemento triangular



Fonte: do autor

ADIÇÃO DO TERMO ACUMULATIVO A função que adiciona o termo acumulativo da equação da conservação da massa da água,

$$\alpha_{ac}^w = \frac{\phi_p \Delta V_p}{\Delta t} [S_p^w - (S_p^w)^{old}], \quad (4.7)$$

por sua vez, é mais direta e está representada na listagem 4.5. Tendo em vista que esse termo não necessita interpolações e cálculos envolvendo outras entidades além dos nós, pode-se varrer os nós da malha diretamente. Ressalta-se, pois, que esse termo deve ser adicionado apenas à equação da conservação da massa da água, porquanto a equação de restrição volumétrica cancela esse termo na equação de conservação da massa total^a.

^aEssa simplificação só se aplica em caso de escoamento incompressível.

Listagem 4.5: Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo acumulativo nos resíduos

```

1  PARA todos os nós da malha
2      calcular termo acumulativo
3      adicionar termo na equação de conservação da massa da água
4  FIM PARA

```

ADIÇÃO DO TERMO FONTE A função que adiciona os termos fontes correspondentes às equações de conservação da massa da água e global,

$$\alpha_{\text{fon}}^w = q_p^w \quad \text{e} \quad \alpha_{\text{fon}}^t = q_p^t, \quad (4.8)$$

verifica os poços localizados ao longo da malha, e, a partir da informação sobre sua operação – pressão constante ou vazão constante – adiciona o valor adequado ao resíduo das equações associadas aos volumes de controle nos quais os poços se encontram. Tendo em vista que esse termo não necessita interpolações e cálculos envolvendo outras entidades além dos nós, pode-se varrer os nós da malha diretamente e adicionar os termos fonte. A função responsável por adicioná-los aos resíduos está representada em pseudocódigo na listagem 4.6.

A vazão nos poços cuja condição de operação é pressão prescrita é calculada por meio da equação

$$q_{\text{poço}} = \lambda^p \text{WI} (P_p - P_{\text{poço}}), \quad (4.9)$$

em que $q_{\text{poço}}$ é a vazão da fase p no sentido reservatório-poço, WI é o *well index* ou índice de poço, P_p é a pressão no nó \mathcal{P} do reservatório e $P_{\text{poço}}$ é a pressão de fundo de poço. Neste trabalho, o índice de poço foi calculado realizando uma adaptação do modelo de Peaceman (1978), utilizando a expressão

$$\text{WI} = \frac{2\pi \mathbb{K} h}{\ln\left(\frac{r_{\text{eq}}}{r_{\text{poço}}}\right)}, \quad (4.10)$$

em que h é o comprimento do poço, $r_{\text{poço}}$ é o raio do poço e r_{eq} é o raio equivalente, o qual nesse trabalho foi calculado como metade do diâmetro hidráulico do volume de controle associado ao poço por meio da equação

$$r_{\text{eq}} = \frac{\text{Volume do volume de controle associado ao poço}}{\text{Área da superfície de controle associada ao poço}}. \quad (4.11)$$

Listagem 4.6: Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo fonte nos resíduos

```

1  PARA todos os poços da malha
2      SE poço opera com pressão constante
3          calcula vazão no poço a partir de sua pressão de operação
4          adiciona vazão às equações dos volumes de controle do poço
5      FIM SE
6      SE poço opera com vazão constante
7          adiciona vazão às equações dos volumes de controle do poço
8      FIM SE
9  FIM PARA

```

APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO Quanto à imposição das condições de contorno, optou-se por considerar condições de Neumann e Dirichlet. Quanto à imposição de fluxo prescrito – condição de contorno de Neumann – preferiu-se prescrever velocidade, a fim de que o problema a ser resolvido ficasse independente da malha utilizada.

Ressalta-se que em malhas não estruturadas tanto a face quanto o nó nos quais são prescritas condições de Neumann e Dirichlet, respectivamente, estão localizados sobre o contorno. Essa configuração geométrica pode ser visualizada na figura 4.5, em que está ilustrado um volume de controle adjacente ao contorno. É importante ressaltar que o volume de controle associado ao nó \mathcal{P} é interior ao domínio, ao passo que o nó está sobre a fronteira.

A condição de Neumann é imposta diretamente fazendo, nas equações (4.3) e (4.4),

$$\alpha_{\text{fon}}^w = q_{\mathcal{P}}^w \quad \text{e} \quad \alpha_{\text{fon}}^t = q_{\mathcal{P}}^t, \quad (4.12)$$

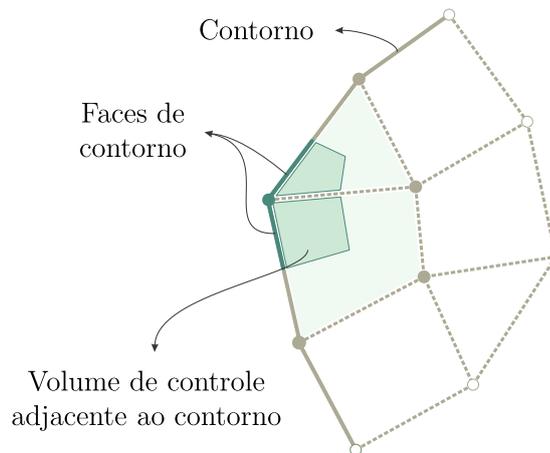
em que $q_{\mathcal{P}}^w$ e $q_{\mathcal{P}}^t$ são as vazões volumétricas de água e total, obtidas através de

$$q_{\mathcal{P}}^w = \sum_{\text{bf} \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}^b} V^w \Delta A_{\text{bf}} \quad \text{e} \quad q_{\mathcal{P}}^t = \sum_{\text{bf} \in \mathbb{F}_{\mathcal{P}}^b} (V^w + V^o) \Delta A_{\text{bf}}, \quad (4.13)$$

em que $\mathbb{F}_{\mathcal{P}}^b$ é o conjunto de faces que formam a parte da superfície de controle associada ao nó \mathcal{P} que está localizada sobre a fronteira e bf são as faces contidas nesse conjunto. Já V^w e V^t são as velocidades de água e total prescritas, respectivamente.

No caso de condição de contorno de Dirichlet, elimina-se a equação da variável co-

Figura 4.5: Volume de controle adjacente ao contorno



Fonte: modificado de (Maliska *et al.*, 2015)

nhecida e, em seu lugar, insere-se apenas o valor unitário na diagonal principal da matriz jacobiana. O resíduo, por sua vez, recebe o valor zero.

O pseudocódigo da função destinada à aplicação das condições de contorno está representada por meio de pseudocódigo na listagem 4.7. A face de contorno mencionada no algoritmo é uma entidade da fronteira, a qual está ilustrada na figura 4.5 juntamente às outras entidades das fronteiras da malha.

Listagem 4.7: Pseudocódigo da rotina que aplica as condições de contorno nos resíduos

```

1  PARA todas as fronteiras com condição de contorno do tipo Neumann
2      PARA todos os elementos da fronteira
3          PARA todas as faces do elemento
4              adicionar fluxo prescrito na equação do nó associado ...
5                  ... à face de contorno
6          FIM PARA
7      FIM PARA
8  FIM PARA
9  PARA todas as fronteiras com condição de contorno do tipo Dirichlet
10     PARA todos os nós da fronteira
11         adicionar zero nas equações do nó
12     FIM PARA
13 FIM PARA

```

4.2.3 CONSTRUÇÃO DA MATRIZ JACOBIANA

O cálculo da matriz jacobiana é a parte mais custosa e complexa dos algoritmos de solução de sistemas não lineares. Ainda, sua construção é diferenciada em se tratando do método dos volumes finitos baseado em elementos, pois que esse método se fundamenta em varreduras nos elementos da malha computacional.

Um aspecto relevante do processo de montagem da matriz jacobiana é sua estrutura, a qual deve ser compatível àquela associada ao vetor resíduo. Uma vez que a indexação de variáveis se deu de forma que as equações de conservação da massa da água e total de um determinado volume de controle fossem adjacentes, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_1^w}{\partial S_1} & \frac{\partial R_1^w}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial R_1^w}{\partial S_n} & \frac{\partial R_1^w}{\partial P_n} \\ \frac{\partial R_1^t}{\partial S_1} & \frac{\partial R_1^t}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial R_1^t}{\partial S_n} & \frac{\partial R_1^t}{\partial P_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial R_n^w}{\partial S_1} & \frac{\partial R_n^w}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial R_n^w}{\partial S_n} & \frac{\partial R_n^w}{\partial P_n} \\ \frac{\partial R_n^t}{\partial S_1} & \frac{\partial R_n^t}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial R_n^t}{\partial S_n} & \frac{\partial R_n^t}{\partial P_n} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta S_n \\ \Delta P_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1^w \\ R_1^t \\ \vdots \\ R_n^w \\ R_n^t \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

em que

$$\frac{\partial R_{\mathcal{P}}}{\partial x_j} = \frac{R_{\mathcal{P}}(x_j + \Delta x_j) - R_{\mathcal{P}}(x_j)}{\Delta x_j}. \quad (4.15)$$

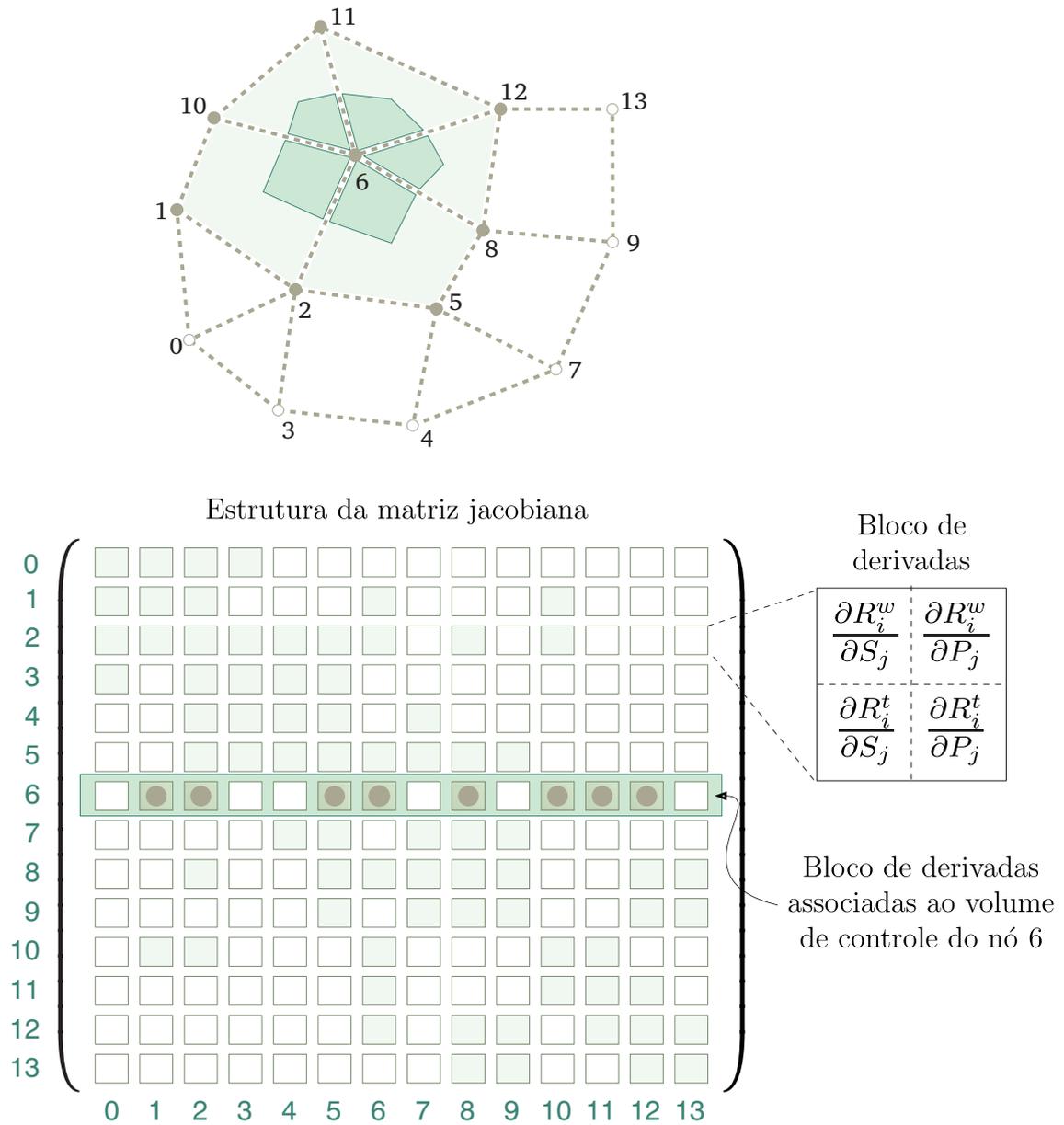
Na equação (4.15), \mathcal{P} é o volume de controle em que se deseja calcular a derivada e $R_{\mathcal{P}}$ é o resíduo, o qual pode ser associado à equação de conservação da massa da água ou total do nó \mathcal{P} . Já x_j é a variável em relação à qual a derivada é calculada. Ressalta-se que x_j é um componente do vetor solução, o qual possui tanto S^w quanto P em suas entradas, *i.e.*, a variável x_j representada na equação (4.15) pode ser tanto saturação quanto pressão.

Quanto à estrutura da matriz, pode-se verificar que cada linha é composta pelas derivadas de uma única equação do resíduo, ao passo que cada coluna contém as derivadas em relação a uma única variável. Ademais, a equação (4.14) consiste na equação (3.29) com os coeficientes explicitados.

Na figura 4.6 pode-se visualizar um exemplo de estrutura da matriz jacobiana. É interessante notar que a estrutura da matriz do sistema linear da pressão no método IMPES, representada na figura 4.2 é semelhante àquela associada à matriz jacobiana e exposta na figura 4.6. Esta última, contudo, é composta por blocos – matrizes 2x2 nas quais estão

dispostas as derivadas numéricas de R^w e R^t em relação à S^w e P , conforme ilustrado na figura.

Figura 4.6: Exemplo de estrutura da matriz jacobiana



Fonte: modificado de (Maliska *et al.*, 2015)

A fim de efetuar o cálculo das derivadas numéricas que compõem a matriz jacobiana de forma mais conveniente e eficaz, as equações resíduo podem ser escritas na forma

$$R^w = \alpha_{ac}^w + \alpha_{dif}^w + \alpha_{fon}^w \quad \text{e} \quad R^t = \alpha_{ac}^t + \alpha_{dif}^t + \alpha_{fon}^t. \quad (4.16)$$

Assim, as derivadas numéricas associadas ao resíduo R^w são dadas por

$$\frac{\partial R_p^w}{\partial S_j} = \frac{\partial}{\partial S_j} (\alpha_{ac}^w + \alpha_{dif}^w + \alpha_{fon}^w) = \frac{\partial \alpha_{ac}^w}{\partial S_j} + \frac{\partial \alpha_{dif}^w}{\partial S_j} + \frac{\partial \alpha_{fon}^w}{\partial S_j}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial R_p^w}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j} (\alpha_{ac}^w + \alpha_{dif}^w + \alpha_{fon}^w) = \frac{\partial \alpha_{ac}^w}{\partial P_j} + \frac{\partial \alpha_{dif}^w}{\partial P_j} + \frac{\partial \alpha_{fon}^w}{\partial P_j}, \quad (4.18)$$

e as derivadas numéricas associadas ao resíduo R^t , por

$$\frac{\partial R_p^t}{\partial S_j} = \frac{\partial}{\partial S_j} (\alpha_{dif}^t + \alpha_{fon}^t) = \frac{\partial \alpha_{dif}^t}{\partial S_j} + \frac{\partial \alpha_{fon}^t}{\partial S_j}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial R_p^t}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j} (\alpha_{dif}^t + \alpha_{fon}^t) = \frac{\partial \alpha_{dif}^t}{\partial P_j} + \frac{\partial \alpha_{fon}^t}{\partial P_j}. \quad (4.20)$$

Dado isso, infere-se que a montagem da matriz jacobiana pode ser realizada considerando separadamente as contribuições devidas aos termos difusivo, acumulativo e fonte. A classe `JacobianAssembler` dispõe de uma função responsável por calcular cada uma dessas contribuições e adicioná-las à matriz jacobiana. Essa função é semelhante àquela destinada a calcular os resíduos. Seu pseudocódigo está contido na listagem 4.8. As quatro subrotinas chamadas na listagem 4.8 serão explicadas nos itens a seguir.

Listagem 4.8: Pseudocódigo da rotina que monta a matriz jacobiana

-
- 1 **CHAMA** função que adiciona o termo difusivo
 - 2 **CHAMA** função que adiciona o termo acumulativo
 - 3 **CHAMA** função que adiciona termo fonte
 - 4 **CHAMA** função que aplica condições de contorno
-

ADIÇÃO DO TERMO DIFUSIVO Quanto à função que adiciona a contribuição do termo difusivo à matriz jacobiana, procurou-se efetuar a implementação computacional de forma a tentar minimizar procedimentos repetidos. Essa preocupação se deu, sobretudo, em relação às varreduras das entidades da malha.

Lembrando que termos difusivos são dados conforme a equação (4.5), as derivadas numéricas do termo difusivo podem ser calculadas por

$$\frac{\partial \alpha_{\text{dif}}^w}{\partial S_j} = \frac{\alpha_{\text{dif}}^w(S_j^w + \Delta S_j^w, P_j) - \alpha_{\text{dif}}^w(S_j^w, P_j)}{\Delta S_j^w}, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \alpha_{\text{dif}}^w}{\partial P_j} = \frac{\alpha_{\text{dif}}^w(S_j^w, P_j + \Delta P_j) - \alpha_{\text{dif}}^w(S_j^w, P_j)}{\Delta P_j}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \alpha_{\text{dif}}^t}{\partial S_j} = \frac{\alpha_{\text{dif}}^t(S_j^w + \Delta S_j^w, P_j) - \alpha_{\text{dif}}^t(S_j^w, P_j)}{\Delta S_j^w}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \alpha_{\text{dif}}^t}{\partial P_j} = \frac{\alpha_{\text{dif}}^t(S_j^w, P_j + \Delta P_j) - \alpha_{\text{dif}}^t(S_j^w, P_j)}{\Delta P_j}, \quad (4.24)$$

em que ΔS_j^w é uma perturbação na saturação e ΔP_j , na pressão do nó j . Isto é, as derivadas parciais dos resíduos calculadas numericamente consistem em subtrair o fluxo difusivo perturbado do fluxo difusivo não perturbado e dividir esse valor pela perturbação. Optou-se por armazenar o fluxo não perturbado já na etapa da construção dos resíduos. Sendo assim, a função da classe `JacobianAssembler`, cujo intuito é adicionar os termos difusivos à matriz jacobiana, deve calcular o fluxo perturbado, para então calcular a derivada numérica e adicioná-la à matriz.

A fim de realizar esse cálculo, dá-se primeiro a perturbação da saturação; depois, da pressão. Para o primeiro caso, faz-se a varredura dos elementos da malha e para cada nó do elemento, perturba-se a saturação, calcula-se os fluxos nas faces e adiciona-se esse valor à matriz jacobiana.

O mesmo procedimento é realizado para a perturbação da pressão. Contudo, neste caso pode-se ocasionar uma mudança no sentido dos fluxos e, por conseguinte, nas mobilidades nas faces, interpoladas por *upwind*. Para simplificar o cálculo dessas mobilidades, define-se o pseudofluxo na face f , dado por

$$\theta_f^p = (-KJ^{-1}D\Phi_e) \cdot \Delta \mathbf{A}_f. \quad (4.25)$$

Esse pseudofluxo, apesar de não apresentar o valor correto do fluxo difusivo, contém a informação referente a seu sentido, e pode, portanto, ser utilizado para determinar os valores corretos de mobilidade.

Os procedimentos de perturbação da saturação e da pressão para a montagem da matriz jacobiana estão representados de forma mais detalhada na listagem 4.9.

Listagem 4.9: Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo difusivo na matriz jacobiana

```

1  {Perturbação da saturação}
2  PARA todos os elementos da malha
3      PARA todos os vértices do elemento
4          perturbar saturação do vértice
5          calcular mobilidade do vértice perturbado
6      PARA todas as faces do elemento
7          PARA todos os vértices do elemento
8              calcular contribuição do nó no fluxo perturbado da face
9              adicionar contribuição ao fluxo perturbado da face
10         FIM PARA
11         adicionar fluxo perturbado dividido pela perturbação à matriz ...
12         ... nas equações dos nós nF e nB da face
13         subtrair fluxo perturbado dividido pela perturbação à matriz ...
14         ... nas equações dos nós nF e nB da face
15     FIM PARA
16 FIM PARA
17 FIM PARA
18
19 {Perturbação da pressão}
20 PARA todos os elementos da malha
21     PARA todos os vértices do elemento
22         perturbar pressão do vértice
23         calcular pseudofluxo
24         calcular mobilidade do vértice perturbado
25     PARA todas as faces do elemento
26         PARA todos os vértices do elemento
27             calcular contribuição do nó no fluxo perturbado da face
28             adicionar contribuição ao fluxo perturbado da face
29         FIM PARA
30         adicionar fluxo perturbado dividido pela perturbação à matriz ...
31         ... nas equações dos nós nF e nB da face
32         subtrair fluxo perturbado dividido pela perturbação à matriz ...
33         ... nas equações dos nós nF e nB da face
34     FIM PARA
35 FIM PARA
36 FIM PARA

```

No intuito de prover uma visualização menos abstrata da função responsável por montar a matriz jacobiana, ilustrou-se um exemplo na figura 4.7. Nela, considera-se uma malha composta por um único elemento triangular. Admite-se, também, que está sendo realizada a etapa de perturbação da saturação. Dá-se, então, a perturbação da saturação do nó cujo índice é 0.

Uma vez que a perturbação é da variável correspondente à primeira equação do sistema, esse procedimento proverá as contribuições do termo difusivo à primeira coluna da matriz. Dada a perturbação da saturação e o cálculo das mobilidades perturbadas nas faces do elemento, parte-se à varredura das faces. Para cada face, varre-se os nós do elemento calculando a contribuição do nó aos fluxos difusivos perturbados de água e total. Faz-se, então, o cálculo da derivada numérica a partir dos valores de fluxos perturbado, não perturbado e perturbação. Essa derivada é, pois, adicionada às equações dos nós associados a essa face. Por exemplo, à face f_0 , estão associados os nós 0 e 1. Sendo assim, são calculadas as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial (\alpha_{\text{dif}}^w)_0}{\partial S_0}, \frac{\partial (\alpha_{\text{dif}}^t)_0}{\partial S_0}, \frac{\partial (\alpha_{\text{dif}}^w)_1}{\partial S_0}, \frac{\partial (\alpha_{\text{dif}}^t)_1}{\partial S_0}. \quad (4.26)$$

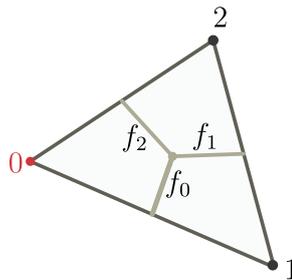
Esses coeficientes são relacionados às equações 0, 1, 2 e 3, respectivamente, *i.e.* conservação da massa da água do nó 0, conservação da massa total do nó 0, conservação da massa da água do nó 1 e conservação da massa total do nó 1. Constituem, portanto, contribuições às entradas (0, 0), (1, 0), (2, 0) e (3, 0) da matriz jacobiana. A figura 4.7 ainda apresenta a sequência do processo de varredura das faces do elemento, ilustrando as contribuições dos fluxos através das faces f_1 e f_2 .

Para continuar a montagem da matriz, ter-se-ia de realizar o mesmo procedimento incrementando as saturações dos nós 1 e 2, processo do qual seriam calculadas as colunas 2 e 4 da matriz – referentes às equações de conservação da massa da água dos nós 1 e 2.

Por fim, o mesmo procedimento seria feito incrementando as pressões dos nós 0, 1 e 2, procedimento do qual seriam determinadas as colunas 1, 3 e 5, referentes às equações de conservação da massa total dos nós 0, 1 e 2. Conforme já explicitado, a única diferença entre esse processo de perturbação de pressão é a necessidade de calcular o pseudofluxo nas faces do elemento.

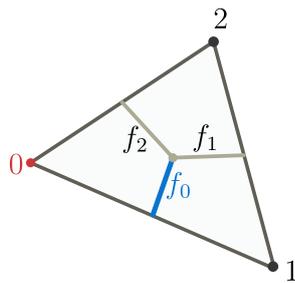
Figura 4.7: Exemplo de etapa de montagem da matriz jacobiana

1) PERTURBAÇÃO DA SATURAÇÃO DO NÓ 0 DO ELEMENTO 0-1-2

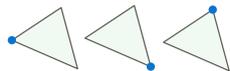


2) VARREDURA DAS FACES

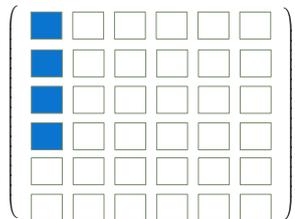
a) Face 0



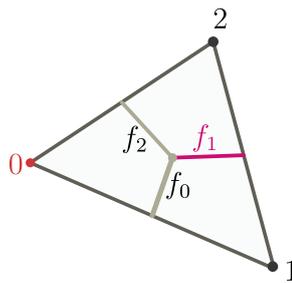
Calcular contribuição de cada nó no fluxo perturbado em f_0



Calcular derivada numérica e adicioná-la à matriz nas equações dos nós 0 e 1



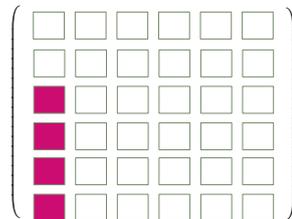
a) Face 1



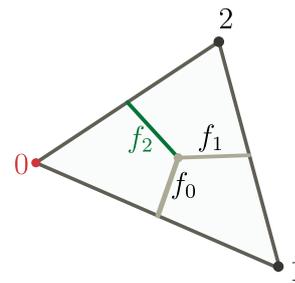
Calcular contribuição de cada nó no fluxo perturbado em f_1



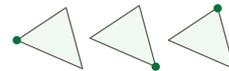
Calcular derivada numérica e adicioná-la à matriz nas equações dos nós 1 e 2



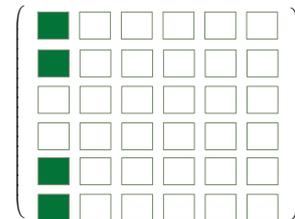
a) Face 2



Calcular contribuição de cada nó no fluxo perturbado em f_2



Calcular derivada numérica e adicioná-la à matriz nas equações dos nós 2 e 0



Fonte: do autor

ADIÇÃO DO TERMO ACUMULATIVO Adicionar o termo acumulativo à matriz jacobiana é muito mais simples que adicionar o termo difusivo. Isso porque só há termo de acumulação na equação da conservação da massa da água e, além disso, o resíduo desse termo é função exclusiva e linear da saturação:

$$\alpha_{ac}^w = \frac{\phi_{\mathcal{P}} \Delta V_{\mathcal{P}}}{\Delta t} [S_{\mathcal{P}}^w - (S_{\mathcal{P}}^w)^{old}]. \quad (4.27)$$

A derivada parcial, pois, consiste em um valor constante e que pode ser calculado diretamente para cada nó da malha:

$$\frac{\partial \alpha_{ac}^w}{\partial S^w} = \frac{\phi_{\mathcal{P}} \Delta V_{\mathcal{P}}}{\Delta t}. \quad (4.28)$$

A listagem 4.10 representa o pseudocódigo da função que adiciona esse termo à jacobiana.

Listagem 4.10: Pseudocódigo da rotina que adiciona o termo acumulativo na matriz jacobiana

```

1  PARA todos os nós da malha
2      calcular derivada do termo acumulativo
3      adicionar derivada à matriz jacobiana na equação de conservação da ...
4          ... massa da água do nó
5  FIM PARA

```

ADIÇÃO DO TERMO FONTE A função que adiciona o termo fonte verifica os poços localizados ao longo da malha, e, a partir da informação sobre sua operação – pressão constante ou vazão constante – adiciona o valor adequado à matriz jacobiana. Os termos fonte devidos aos poços são

$$\alpha_{fon}^w = q_{\mathcal{P}}^w \quad \text{e} \quad \alpha_{fon}^t = q_{\mathcal{P}}^t. \quad (4.29)$$

Assim, se o poço opera com vazão constante, a derivada numérica é nula, logo não é preciso varrer os poços que operam sob essa condição. Já para os poços de pressão constante tem-se

$$\alpha_{fon}^w = \lambda^p WI (P_{\mathcal{P}} - P_{poço}) \quad \text{e} \quad \alpha_{fon}^t = \lambda^t WI (P_{\mathcal{P}} - P_{poço}). \quad (4.30)$$

Portanto, os termos fonte correspondentes aos poços que operam sob a condição de pressão constante são funções de S^w e P . São necessárias, então, as perturbações da satu-

ração e da pressão de forma a calcular suas contribuições à matriz jacobiana. Essa função está representada em pseudocódigo na listagem 4.11

Listagem 4.11: Pseudocódigo da rotina que aplica as condições de contorno na matriz jacobiana

```

1  {Perturbação da saturação}
2  PARA todos os poços da malha
3      SE poço opera com pressão constante
4          PARA cada vértice contido no poço
5              perturbar saturação do nó
6              calcular mobilidade perturbada
7              calcular fluxo perturbado
8              calcular derivada e adicioná-la à matriz nas equações de ...
9                  ... conservação do nó
10         FIM PARA
11     FIM SE
12 FIM PARA
13 {Perturbação da pressão}
14 PARA todos os poços da malha
15     SE poço opera com pressão constante
16         PARA cada vértice contido no poço
17             perturbar pressão do nó
18             calcular mobilidade perturbada
19             calcular fluxo perturbado
20             calcular derivada e adicioná-la à matriz nas equações de ...
21                 ... conservação do nó
22         FIM PARA
23     FIM SE
24 FIM PARA

```

APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO Se a fronteira apresentar condição de contorno do tipo Neumann, a derivada numérica de sua contribuição é nula. Apenas ascende, pois, a necessidade de varrer as fronteiras cuja condição de contorno é do tipo Dirichlet. A imposição dessa condição é bastante simples – basta zerar as linha referentes às equações

dos nós da fronteira e atribuir o valor unitário às entradas da diagonal principal. A função responsável pela aplicação das condições de contorno à matriz jacobiana está representada por meio de pseudocódigo na listagem 4.12.

Listagem 4.12: Pseudocódigo da rotina que aplica as condições de contorno na matriz jacobiana

```

1  PARA todas as fronteiras com condição de contorno do tipo Dirichlet
2      PARA todos os nós da fronteira
3          zerar as entradas das linhas associadas às equações do nó
4          setar valor unitário na diagonal principal dessas linhas
5      FIM PARA
6  FIM PARA

```

4.3 PASSO DE TEMPO ADAPTATIVO

Almejando poupar esforço computacional demasiado e, simultaneamente, prevenir a especificação de passos de tempo excessivamente altos, foi implementado um esquema de modificação do passo de tempo inicialmente especificado na simulação a partir da diferença do campo de saturação calculado em relação ao campo de saturação antigo, *i.e.*, associado ao passo de tempo anterior. O funcionamento desse esquema está esquematizado por meio de um fluxograma na figura 4.8.

Devem ser especificados pelo usuário cinco parâmetros de entrada: o passo de tempo inicial Δt , a diferença máxima de saturação ΔS_{\max} , a diferença mínima de saturação ΔS_{\min} e as duas constantes α_{aum} e α_{red} . A ideia central do esquema de passo de tempo adaptativo é ajustar o passo de tempo de acordo com a magnitude da variação do campo de saturação a partir da especificação de um valor de α_{aum} superior ao valor unitário e de α_{red} , inferior. Dessa forma, caso a diferença entre a saturação atual e a saturação antiga exceda ΔS_{\max} em algum volume de controle, o passo de tempo é reduzido por meio da expressão

$$\Delta t = \alpha_{\text{red}} \Delta t. \quad (4.31)$$

e a solução no nível de tempo em questão é recalculada. Por outro lado, se essa diferença for inferior a ΔS_{\min} em todos os volumes de controle, permite-se um aumento do passo de

tempo calculando-o por meio de

$$\Delta t = \alpha_{\text{aum}} \Delta t. \quad (4.32)$$

Almejando dispor de mais indicativos quanto à adequação do valor do passo de tempo, também são efetuadas verificações quanto à convergência da solução. Se ocorrer divergência de algum sistema linear, ou até mesmo do sistema não-linear no caso do método totalmente implícito, o passo de tempo é reduzido utilizando a equação (4.31) e não se dá o avanço no tempo, mas sim calcula-se a solução novamente com um passo de tempo de valor mais baixo. Considera-se também como divergência o caso em que o método sequencial efetua o número máximo de iterações em um mesmo passo de tempo sem atingir a tolerância requerida.

Ademais, ainda é verificado se o campo de saturação é fisicamente consistente identificando se as saturações de todos os volumes de controle possuem valores entre 0 e 1 com uma tolerância de 10^{-6} . Se essa condição não ocorrer, procede-se como no caso da divergência, reduzindo o passo de tempo e resolvendo novamente os campos de pressão e saturação associados àquele mesmo nível temporal.

Neste trabalho optou-se por utilizar dois conjuntos de parâmetros especificados ao esquema de passo de tempo adaptativo. O primeiro, e mais rígido, tem os valores de seus parâmetros listados na tabela 4.1; O segundo, e menos rígido, na tabela 4.2.

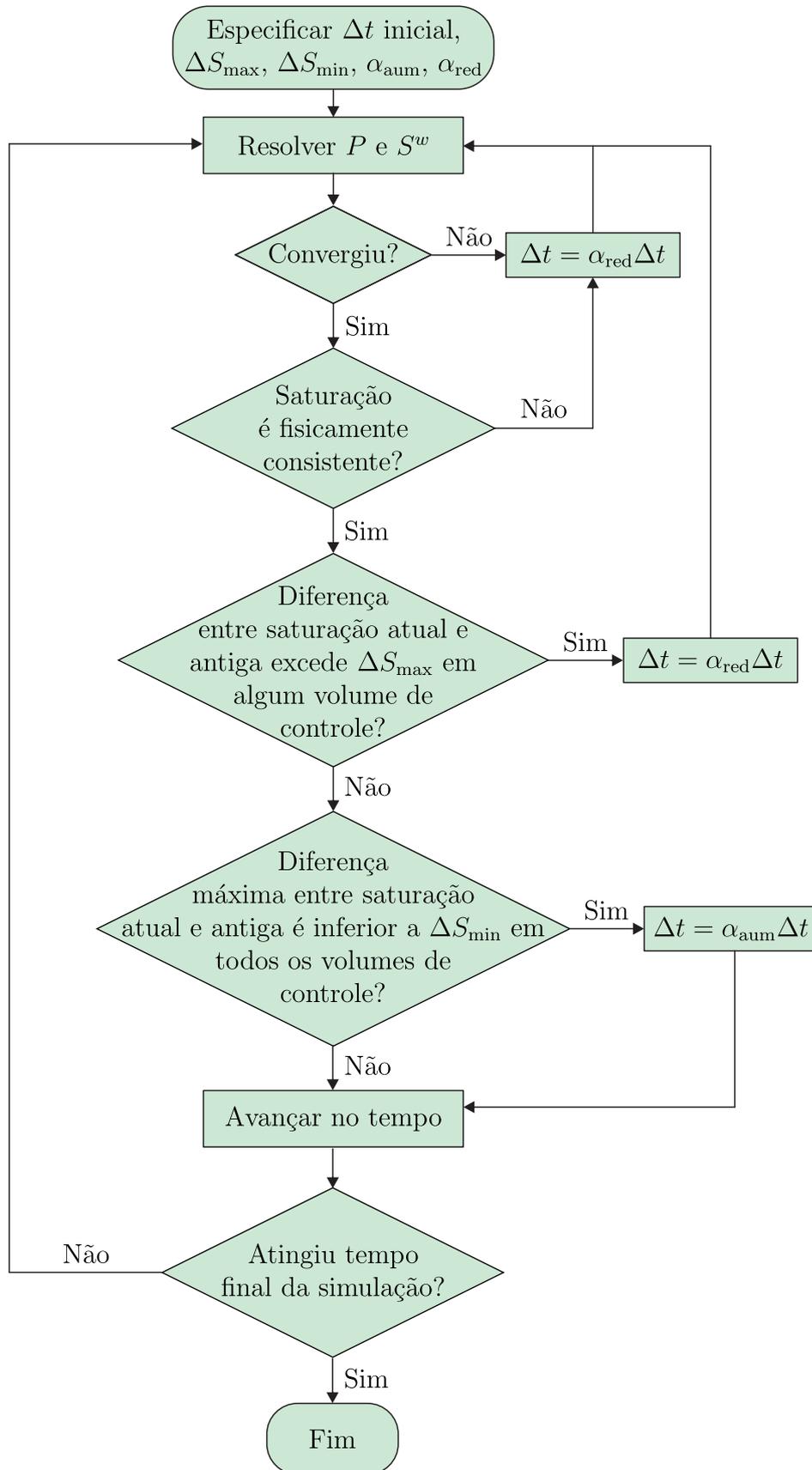
Tabela 4.1: Parâmetros correspondentes ao critérios mais rígido de passo de tempo adaptativo

ΔS_{max}	ΔS_{min}	α_{aum}	α_{red}
0,1	0,05	1,01	0,5

Tabela 4.2: Parâmetros correspondentes ao critérios menos rígido de passo de tempo adaptativo

ΔS_{max}	ΔS_{min}	α_{aum}	α_{red}
0,2	0,05	1,1	0,5

Figura 4.8: Fluxograma da estratégia de modificação do passo de tempo



Fonte: do autor

4.4 ESPECIFICAÇÃO DAS TOLERÂNCIAS

O método totalmente implícito requer a especificação de duas tolerâncias. A primeira corresponde ao sistema linear composto pela matriz jacobiana e pelo vetor de resíduos. Tendo em vista que o termo independente é o resíduo, optou-se por utilizar a tolerância absoluta da biblioteca PETSc para esse caso a fim de que não fosse especificado um critério excessivamente apertado. Assim, o critério de convergência do *solver* linear é

$$\|\mathbf{R}\| < \varepsilon, \quad (4.33)$$

em que \mathbf{R} é o vetor resíduo e ε é a tolerância especificada. O valor de ε atribuído para resolver os problemas apresentados neste trabalho foi 10^{-5} . Outra tolerância que necessita ser especificada no método totalmente implícito corresponde ao sistema não linear. Nesse caso, optou-se por utilizar a norma da mudança da solução ao longo dos passos de tempo

$$\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|} < \varepsilon, \quad (4.34)$$

em que \mathbf{X} é a solução e $\Delta\mathbf{X}$ é a diferença entre a solução atual em relação à iteração anterior do *solver* não linear. Para resolver os problemas desta trabalho, especificou-se valor 10^{-8} para essa tolerância.

Quanto ao método IMPES, a única tolerância a ser especificada diz respeito ao sistema linear de cálculo da pressão. Atribuiu-se, nesse caso, o mesmo critério do *solver* não linear do método totalmente implícito. Ao método sequencial também atribuiu-se o mesmo critério de convergência. Neste último, contudo, após resolver o sistema linear da pressão, segue-se a atualização das mobilidades e nova resolução do sistema linear até que a solução mude menos que uma tolerância. Para isso, utilizou-se como critério a razão entre a norma infinita do campo de pressão atual e a norma infinita do campo de pressão obtido no passo na iteração anterior, *i.e.*, utilizou-se a expressão

$$\frac{\|\mathbf{P}_{\text{atual}} - \mathbf{P}_{\text{anterior}}\|_{\infty}}{\|\mathbf{P}_{\text{anterior}}\|_{\infty}} < \varepsilon, \quad (4.35)$$

em que a tolerância ε foi especificada com o valor 10^{-6} . Também optou-se por determinar 50 como o número máximo de iterações em um mesmo passo de tempo. Esse limite se presta a impedir que o programa continue sendo executado indefinidamente nos casos de divergência. Conforme explicado na seção anterior, caso isso ocorra a solução correspondente a esse mesmo nível de tempo é recalculada com um passo de tempo inferior.

5 RESULTADOS

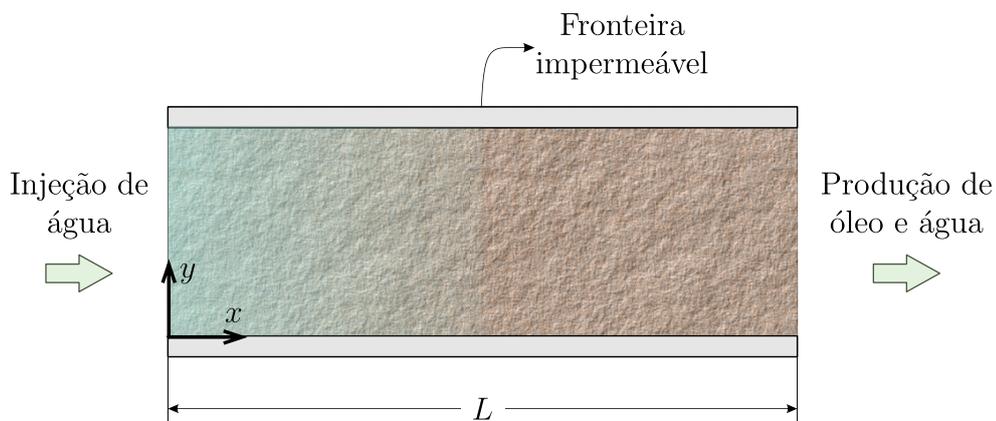
Neste capítulo, serão apresentados os resultados provenientes da simulação numérica do modelo descrito. Primeiramente, será apresentada a validação do simulador implementado lançando-se mão de um caso de deslocamento unidimensional em que há solução analítica disponível – o caso de *Buckley-Leverett*. A seguir, serão expostos os resultados obtidos para a simulação do deslocamento bidimensional em um reservatório que apresenta a configuração conhecida como *quarter five-spot*. Por fim, serão apresentados os resultados provenientes da simulação do deslocamento tridimensional em uma malha híbrida.

5.1 DESLOCAMENTO UNIDIMENSIONAL

5.1.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considera-se uma amostra de rocha homogênea inicialmente embebida em óleo na qual injeta-se água a uma vazão constante através de uma de suas fronteiras, conforme ilustrado na figura 5.1. Se a vazão de água for suficientemente alta, a influência da pressão capilar diminui de tal forma que o problema pode ser modelado como um processo de deslocamento unidimensional do tipo que permite uma solução analítica (Hurtado, 2005).

Figura 5.1: Configuração do problema de deslocamento unidimensional



Fonte: modificado de (Maliska *et al.*, 2015)

A equação que modela o escoamento na direção do eixo x é dada por (Maliska *et al.*,

2015):

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + v^T \frac{\partial F_f}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

em que F_f é o fluxo fracionário definido por

$$F_f = \frac{\frac{k_r^w}{\mu^w}}{\frac{k_r^w}{\mu^w} + \frac{k_r^o}{\mu^o}}. \quad (5.2)$$

É possível mostrar que a solução analítica para esse problema depende do fluxo fracionário, o qual, por sua vez, é determinado pelas curvas de permeabilidade relativa e pela relação entre as viscosidades (Maliska *et al.*, 2015).

Para os exemplos apresentados nesta seção foram empregadas as curvas de permeabilidade descritas dadas pelo modelo de Corey – descrito no capítulo 2 – com coeficiente unitário e expoente 2, isto é,

$$k_r^w = (\hat{S})^2, \quad (5.3)$$

$$k_r^o = (1 - \hat{S})^2. \quad (5.4)$$

A saturação \hat{S} normalizada é calculada por

$$\hat{S} = \left(\frac{S^w - S_{min}^w}{S_{max}^w - S_{min}^w} \right), \quad (5.5)$$

em que as saturações mínimas e máximas de água foram tomadas como 0 e 1, respectivamente. Já a relação entre as viscosidades é dada, neste problema, por

$$\frac{\mu^o}{\mu^w} = 4. \quad (5.6)$$

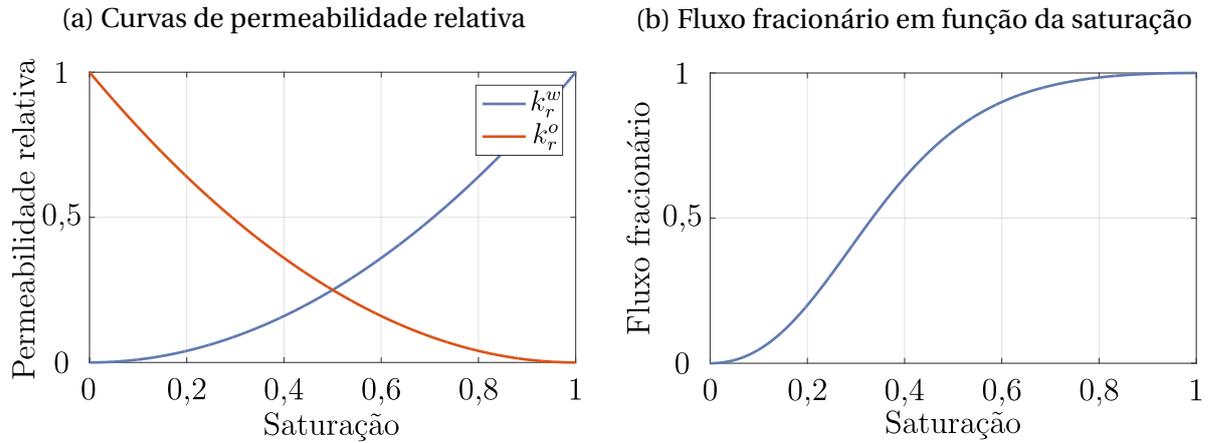
À porosidade foi atribuído o valor unitário. As curvas de permeabilidade relativa e fluxo fracionário podem ser visualizadas na figura 5.2.

Outro parâmetro presente na equação (5.1) é a velocidade total v^T , que consiste na soma das velocidades das duas fases na direção x . Pois que nesse caso a equação de conservação é simplificada para

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}^T) = 0, \quad (5.7)$$

e a velocidade prescrita na fronteira $x = 0$ é constante, pode-se afirmar que essa velocidade é constante ao longo do domínio (Hurtado, 2005).

Figura 5.2: Curvas de permeabilidade e fluxo fracionário



Fonte: do autor

5.1.2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

A fim de obter a solução analítica, as variáveis do problema são adimensionalizadas. As versões adimensionais da coordenada axial do domínio e do tempo são, respectivamente

$$X = \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\nu^T t}{\phi L}. \quad (5.8)$$

Dado isso, a equação (5.1) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial F_f}{\partial X} = 0. \quad (5.9)$$

Definindo, ainda, o parâmetro

$$\xi = \frac{X}{\tau}, \quad (5.10)$$

a equação (5.9) se torna uma equação diferencial ordinária:

$$\frac{dS}{d\xi} \left(\frac{dF_f}{dS} - \xi \right) = 0 \quad (5.11)$$

A solução analítica dessa equação é (Dullien, 1979):

$$\begin{cases} \xi = F_f'(S) & \text{se } 0 \leq \xi \leq D, \\ S = S_i & \text{se } D \leq \xi \leq \infty, \end{cases}$$

em que

$$D = F_f'(S_f) = \frac{F_f(S_f) - F_f(S_i)}{S_f - S_i}, \quad (5.12)$$

S_i é a saturação inicial do domínio e S_f , a saturação da frente de água. Essa solução analítica é conhecida como solução de *Buckley-Leverett*.

5.1.3 RESULTADOS OBTIDOS

A fim de comparar resultados numéricos à solução analítica, especificou-se como condição inicial

$$S(x, 0) = 0, \text{ para } 0 \leq x \leq L, \quad (5.13)$$

$$P(x, 0) = 0, \text{ para } 0 \leq x \leq L, \quad (5.14)$$

i.e., o domínio está, inicialmente, embebido com óleo. A condição de contorno para a fronteira $x = 0$ é de Neumann. A velocidade de água foi prescrita com valor unitário; do óleo, nulo. Já para a fronteira $x = L$ prescreveu-se os mesmos valores de pressão e saturação iniciais. Devido ao caráter hiperbólico da equação e sabendo-se que o fluido está deixando essa fronteira, nenhuma condição de saturação precisaria ser prescrita (Maliska *et al.*, 2015). Por motivos computacionais, foi prescrito o mesmo valor das condições iniciais e faz-se uma verificação para identificar se a frente de água ainda não chegou a $x = L$.

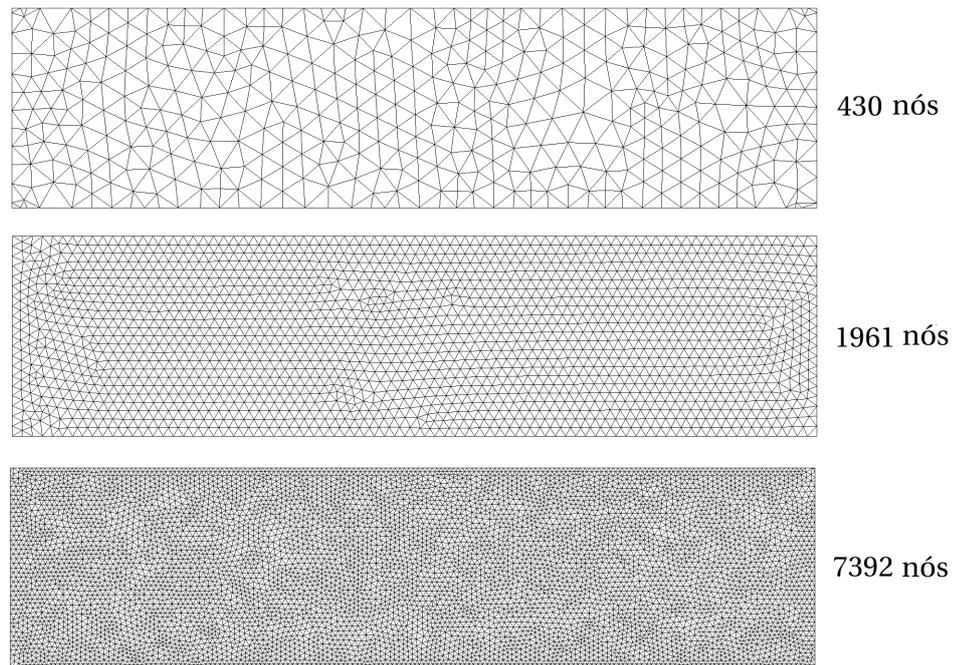
Não obstante se trate de um problema unidimensional, utilizou-se um domínio bidimensional e exportou-se as soluções de todos os nós da malha. Os quatro perfis mostrados nos resultados são correspondentes aos instantes de tempo 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 VPI – equivalentes a 0,8, 1,2, 1,6 e 2,0 segundos. O VPI pode ser interpretado como um tempo adimensional em um problema de deslocamento é o volume poroso injetado e é dado por

$$\text{VPI} = \frac{\text{Volume de fluido injetado}}{\text{volume poroso disponível}} = \frac{\int_0^t (Q_l)_{\text{ent}} dt}{\int_V \phi dV}, \quad (5.15)$$

em que $(Q_l)_{\text{ent}}$ é a vazão injetada no meio poroso.

As soluções analíticas correspondentes a esses tempos foram comparadas às soluções numéricas advindas dos métodos *IMplicit pressure*, *Explicit Saturation*, sequencial e totalmente implícito, identificados nos gráficos, respectivamente, pelas siglas FIM, IMPES e SEQ. Os resultados numéricos foram obtidos empregando três malhas com diferentes graus de refino, todas compostas por elementos triangulares. A mais grosseira possui 430 nós; a mediana, 1961; a mais refinada, 7392. Essas malhas podem ser visualizadas na figura 5.3. Os resultados numéricos apresentados a seguir foram obtidos considerando-se um passo de tempo inicial de 10^{-3} segundos.

Figura 5.3: Malhas não-estruturadas utilizadas na solução do problema de Buckley-Leverett



Fonte: do autor

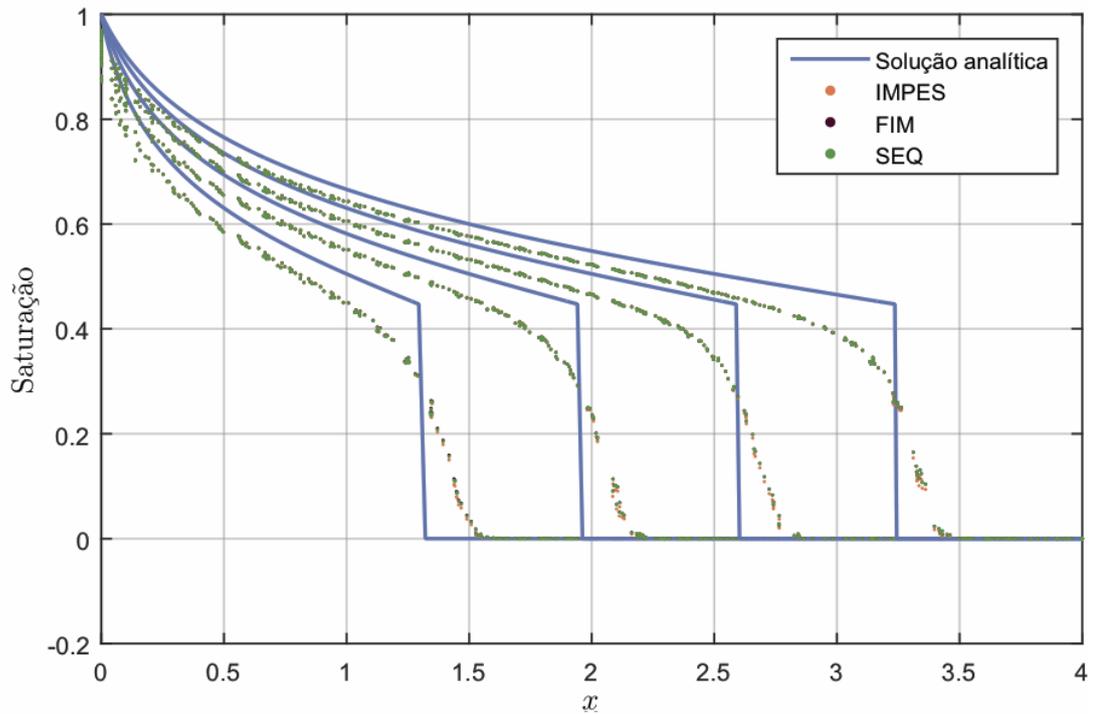
Os resultados obtidos com passo de tempo fixo estão dispostos nas figuras 5.4, 5.5 e 5.6 para malhas de 430, 1961 e 7392 nós, respectivamente. O tempo computacional despendido para 0,5 VPI por meio dos três métodos pode ser visualizado na figura 5.7. Nesses casos, o passo de tempo foi mantido em seu valor inicial de 10^{-3} s.

Já os resultados obtidos para o critério mais rígido de passo de tempo estão dispostos nas figuras 5.8, 5.9 e 5.10 para malhas de 430, 1961 e 7392 nós, respectivamente. O tempo computacional despendido para 0,5 VPI por meio dos três métodos pode ser visualizado na figura 5.11. A evolução dos passos de tempo estão dispostas nas figuras 5.12, 5.13 e 5.14.

Por fim, os resultados obtidos para o critério menos rígido de passo de tempo estão dispostos nas figuras 5.15, 5.16 e 5.17 para malhas de 430, 1961 e 7392 nós, respectivamente. O tempo computacional despendido para 0,5 VPI por meio dos três métodos pode ser visualizado na figura 5.18. A evolução dos passos de tempo estão dispostas nas figuras 5.19, 5.20 e 5.21.

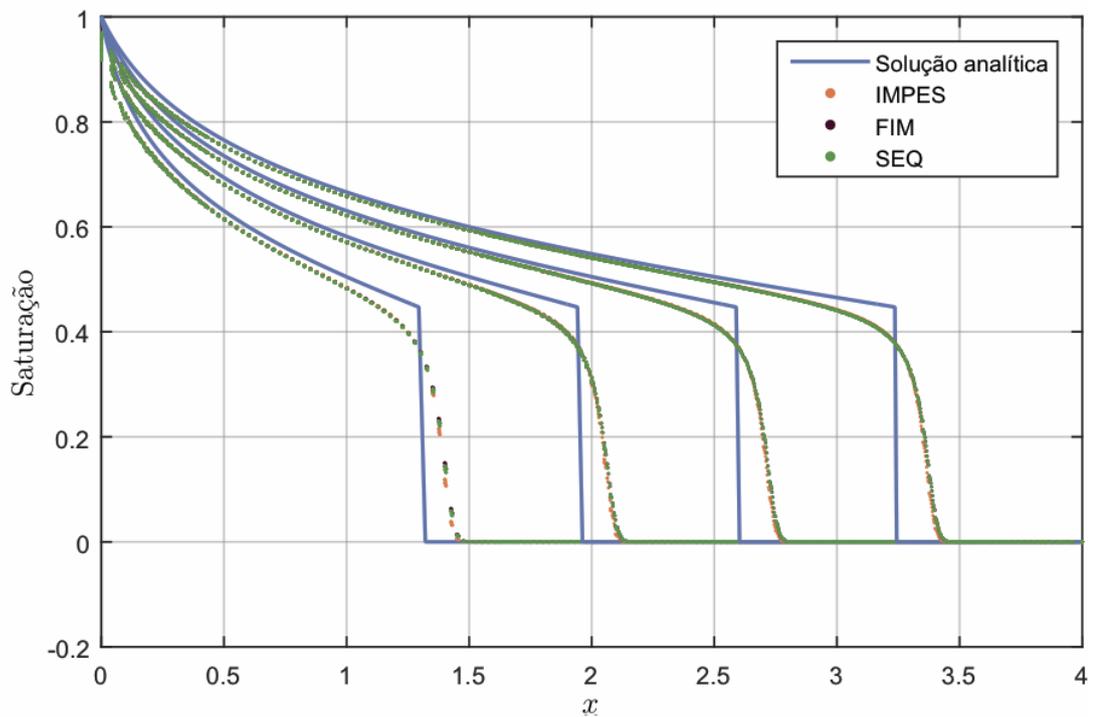
Ainda, os campos de saturação e pressão obtidos por meio do método totalmente implícito com o critério mais rígido de passo de tempo adaptativo e na malha mais refinada estão ilustrados na figura 5.22 para 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 VPI. Os resultados são associados às curvas correspondentes ao método FIM na figura 5.10.

Figura 5.4: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com passo de tempo fixo em uma malha de 430 nós



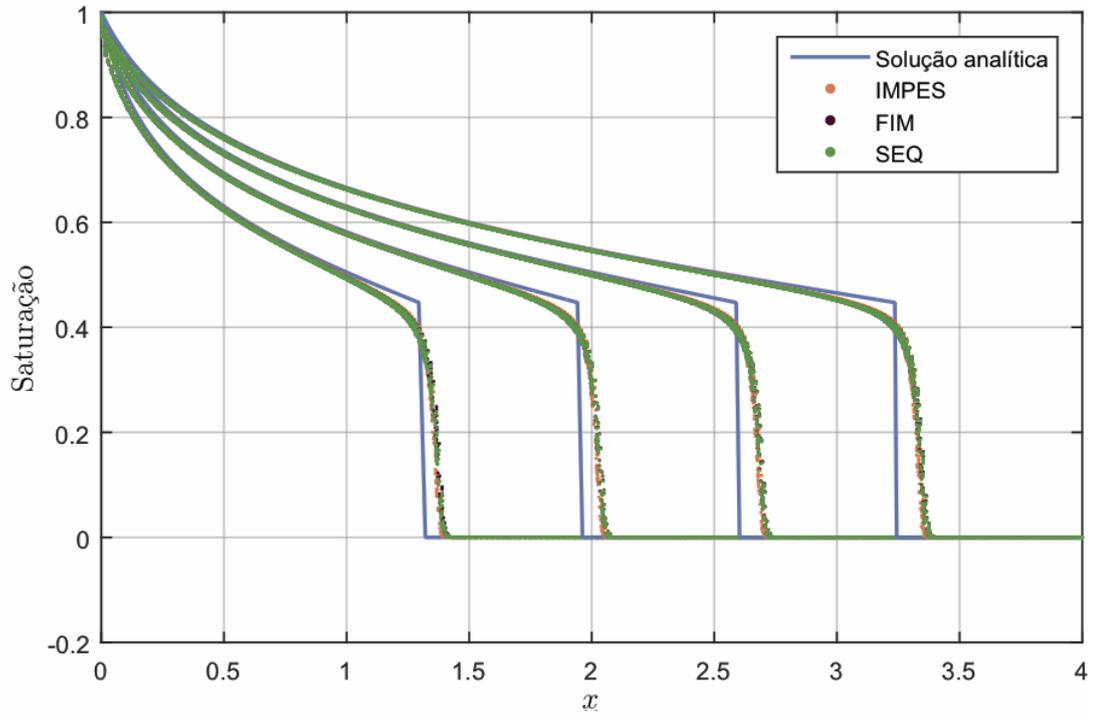
Fonte: do autor

Figura 5.5: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com passo de tempo fixo em uma malha de 1961 nós



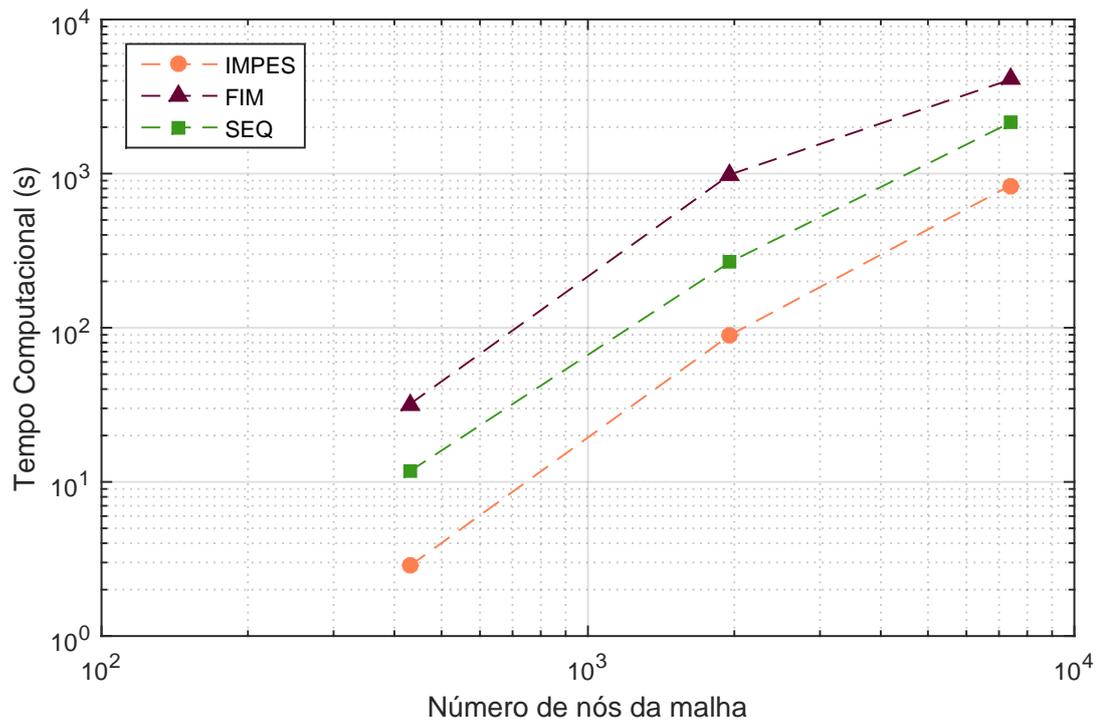
Fonte: do autor

Figura 5.6: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com passo de tempo fixo em uma malha de 7392 nós



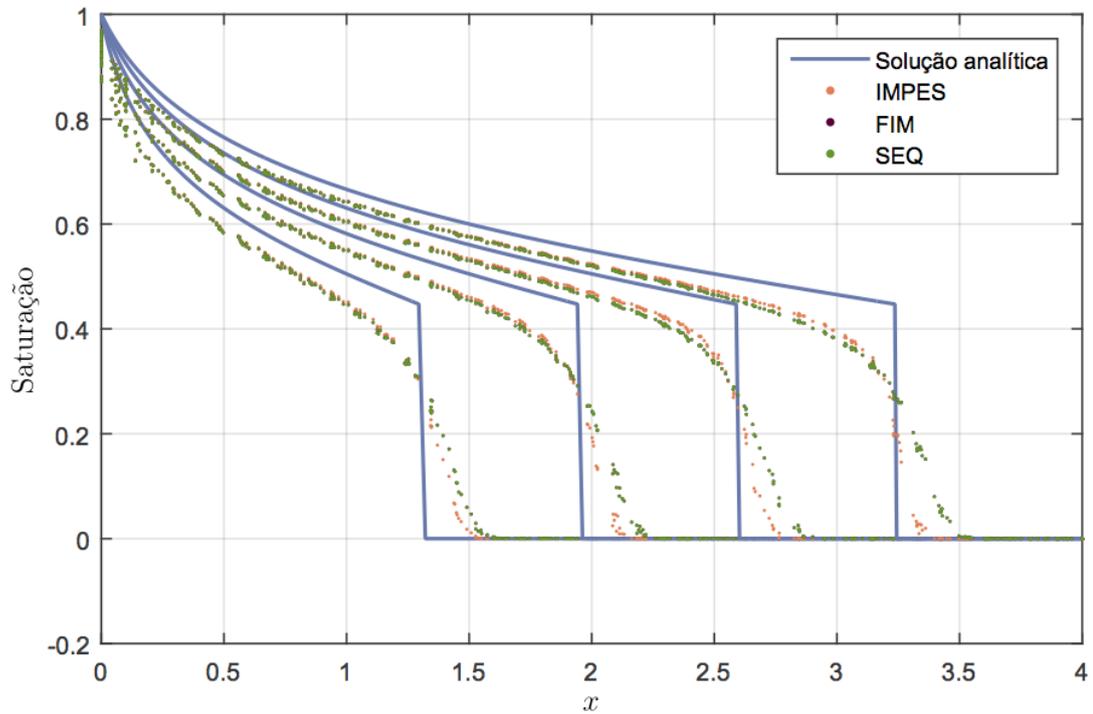
Fonte: do autor

Figura 5.7: Tempo computacional para os três métodos com passo de tempo fixo



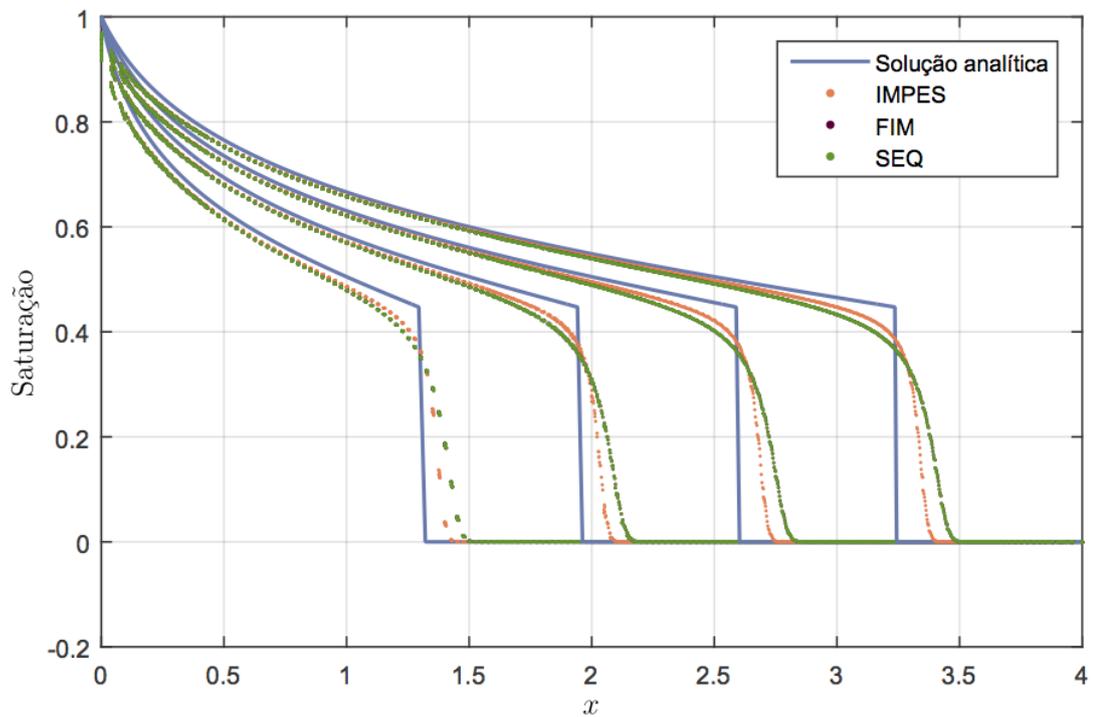
Fonte: do autor

Figura 5.8: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 430 nós



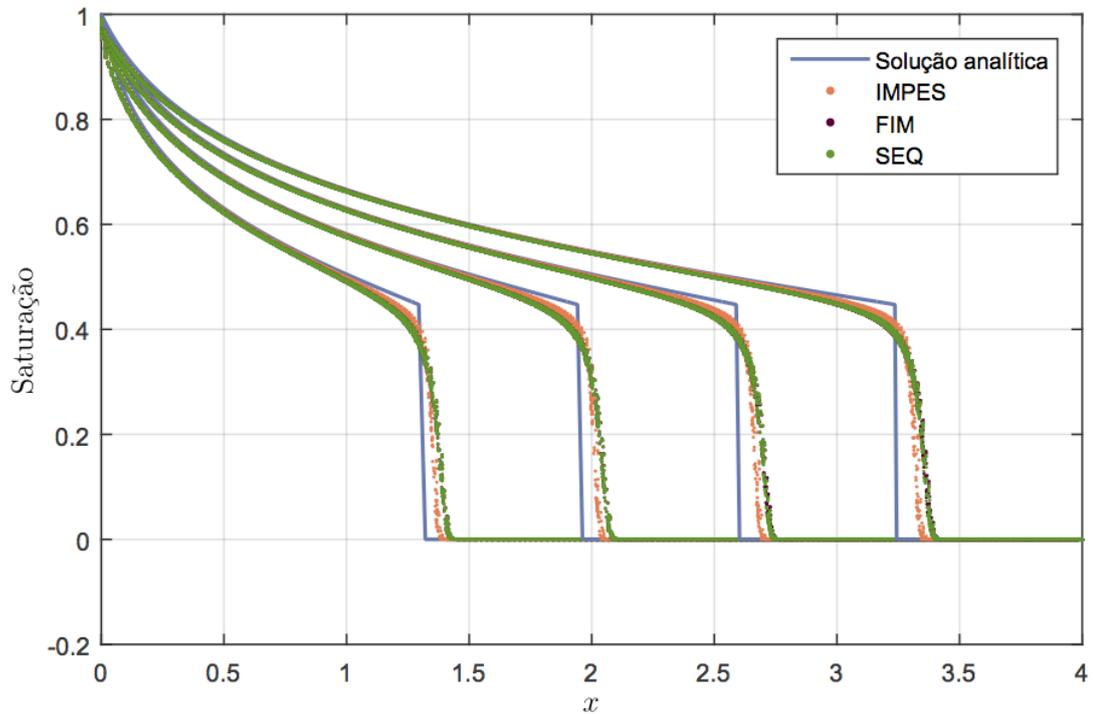
Fonte: do autor

Figura 5.9: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 1961 nós



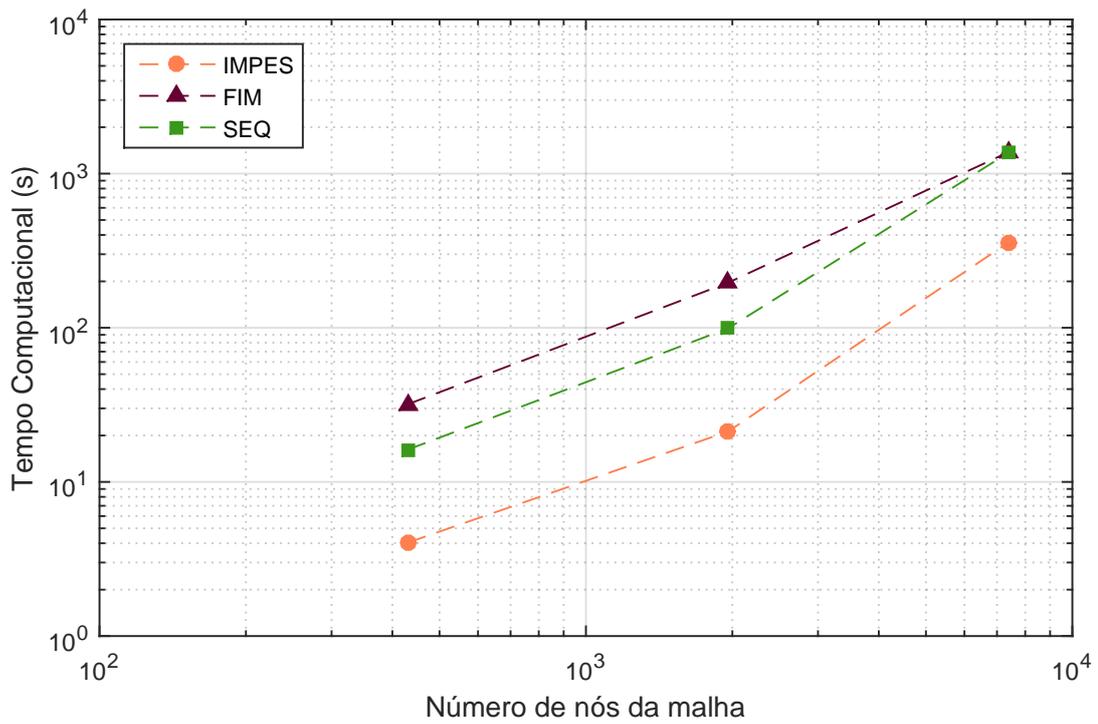
Fonte: do autor

Figura 5.10: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 7392 nós



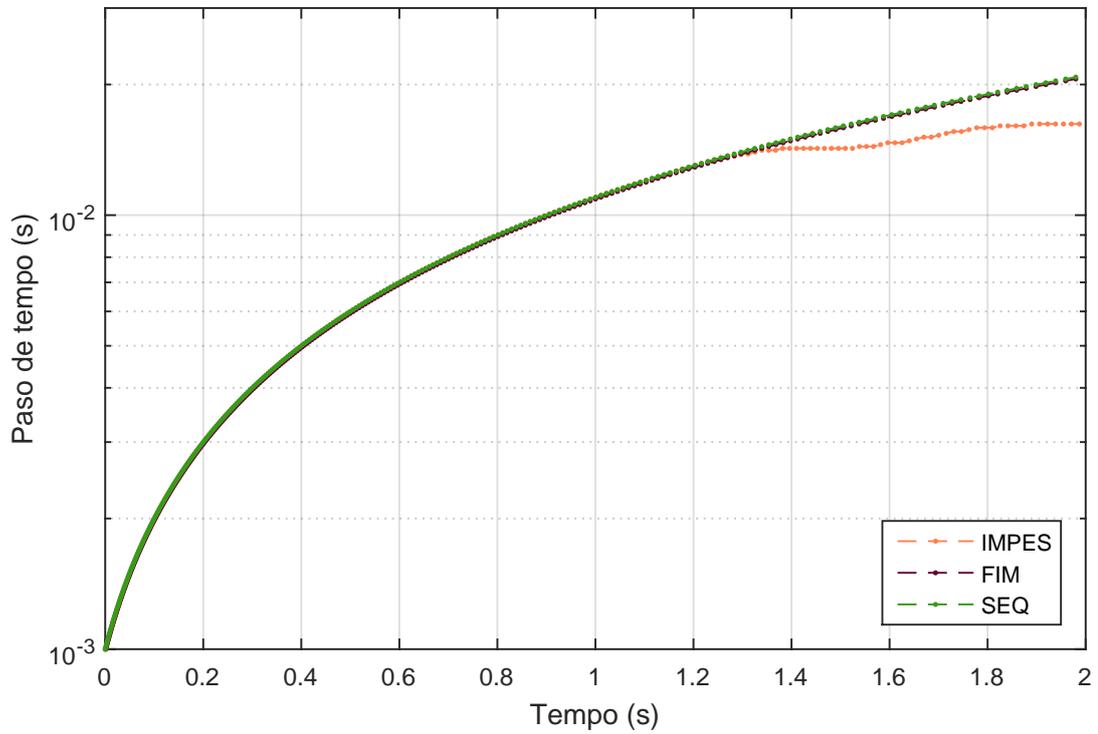
Fonte: do autor

Figura 5.11: Tempo computacional para os três métodos com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo



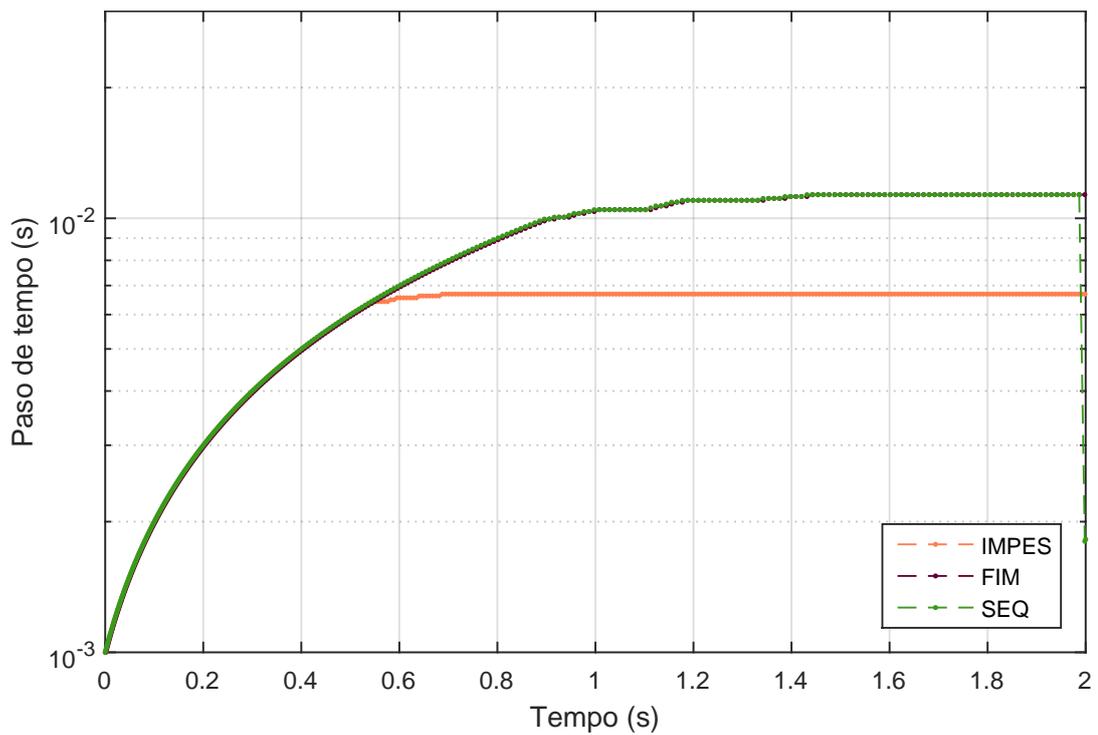
Fonte: do autor

Figura 5.12: Evolução do passo de tempo para a malha de 430 nós com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo



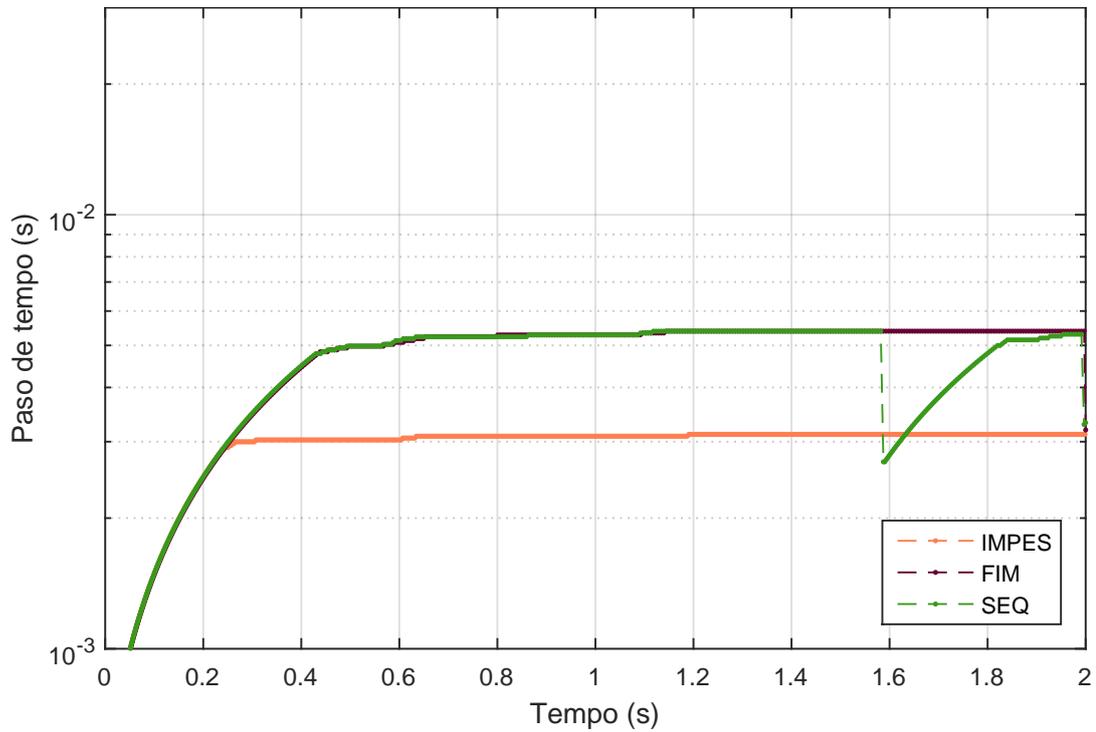
Fonte: do autor

Figura 5.13: Evolução do passo de tempo para a malha de 1961 nós com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo



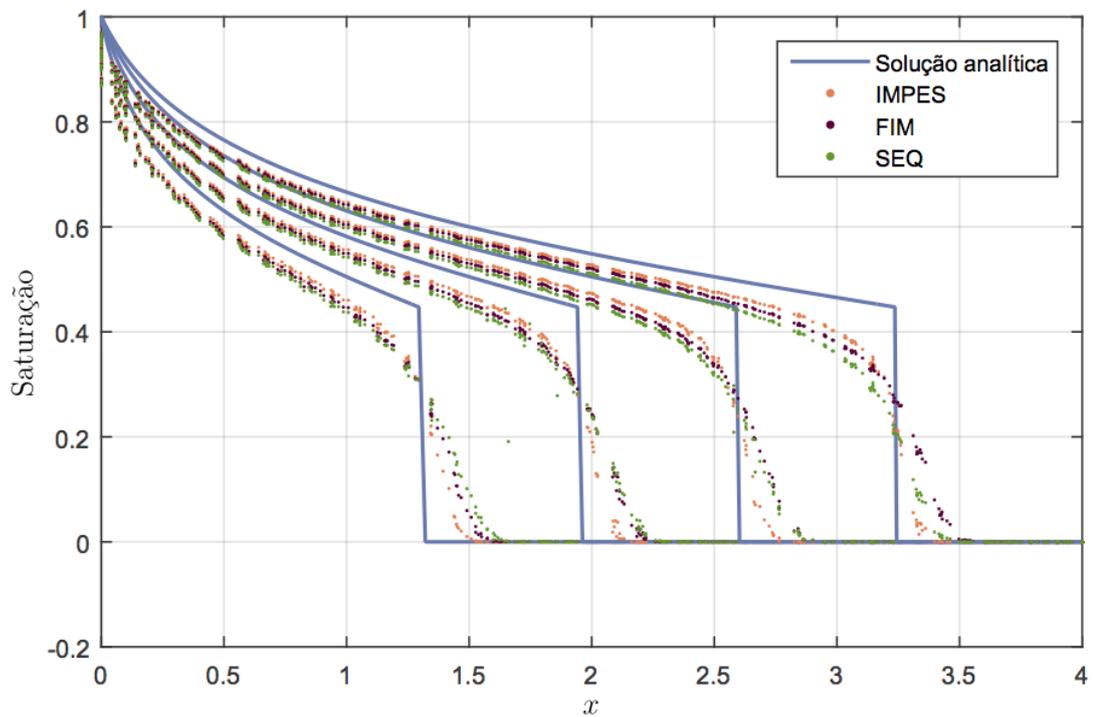
Fonte: do autor

Figura 5.14: Evolução do passo de tempo para a malha de 7392 nós com critério mais rígido de passo de tempo adaptativo



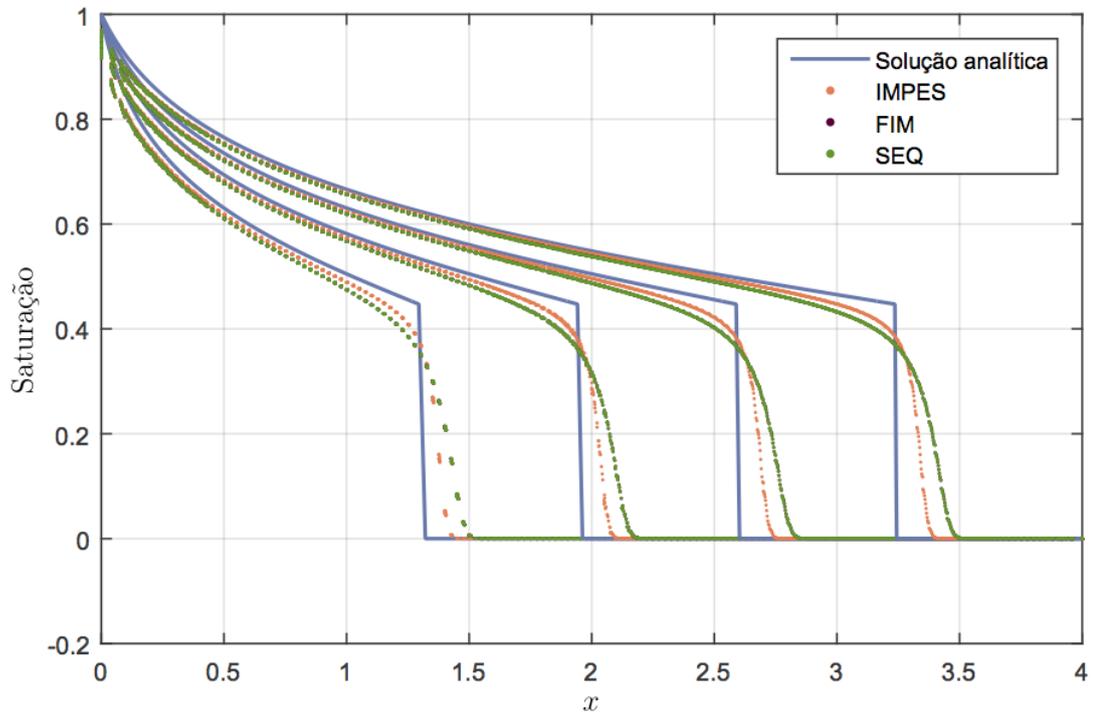
Fonte: do autor

Figura 5.15: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 430 nós



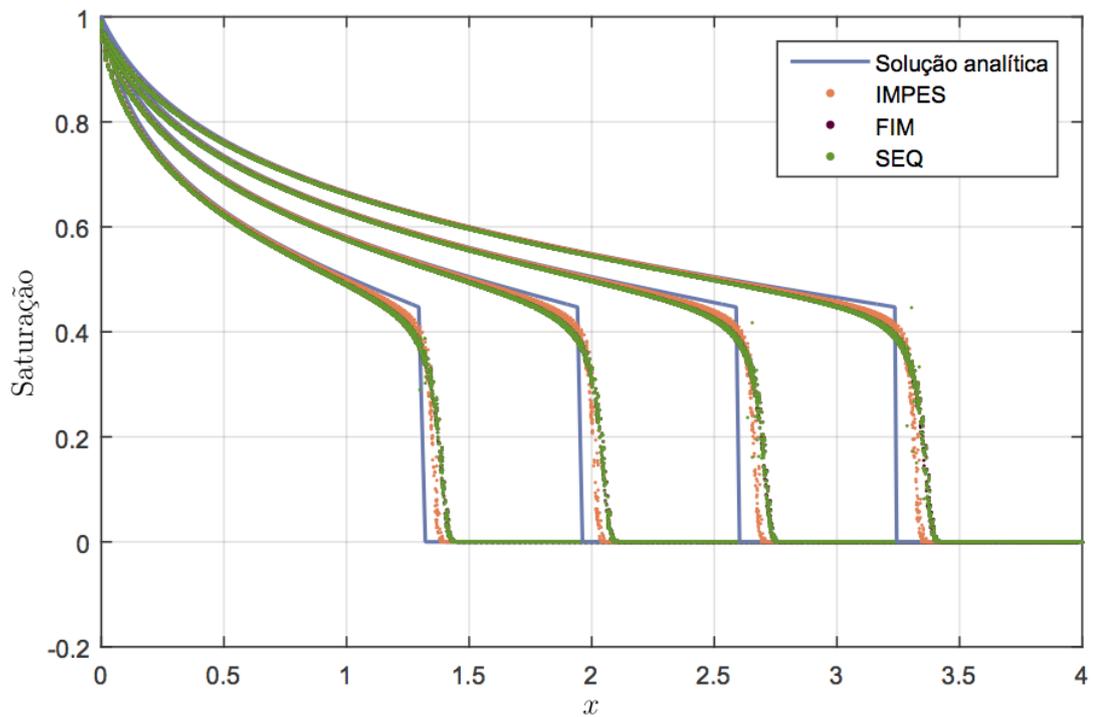
Fonte: do autor

Figura 5.16: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 1961 nós



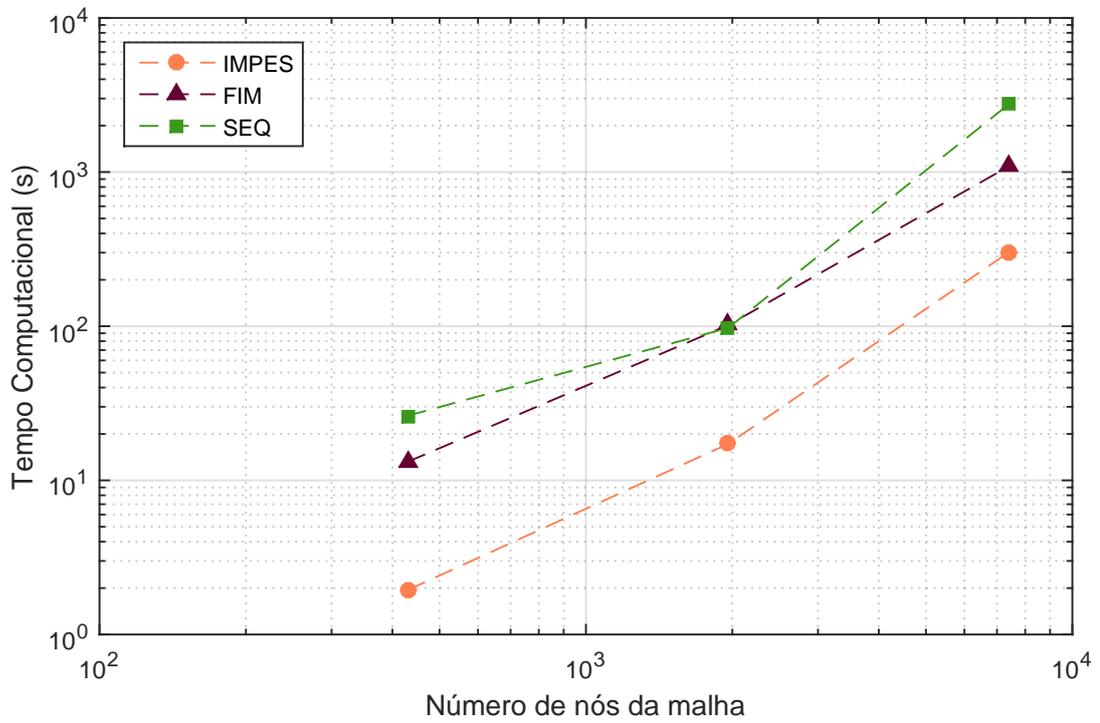
Fonte: do autor

Figura 5.17: Resultados obtidos para VPI 0,2, 0,3, 0,4 e 0,5 com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo em uma malha de 7392 nós



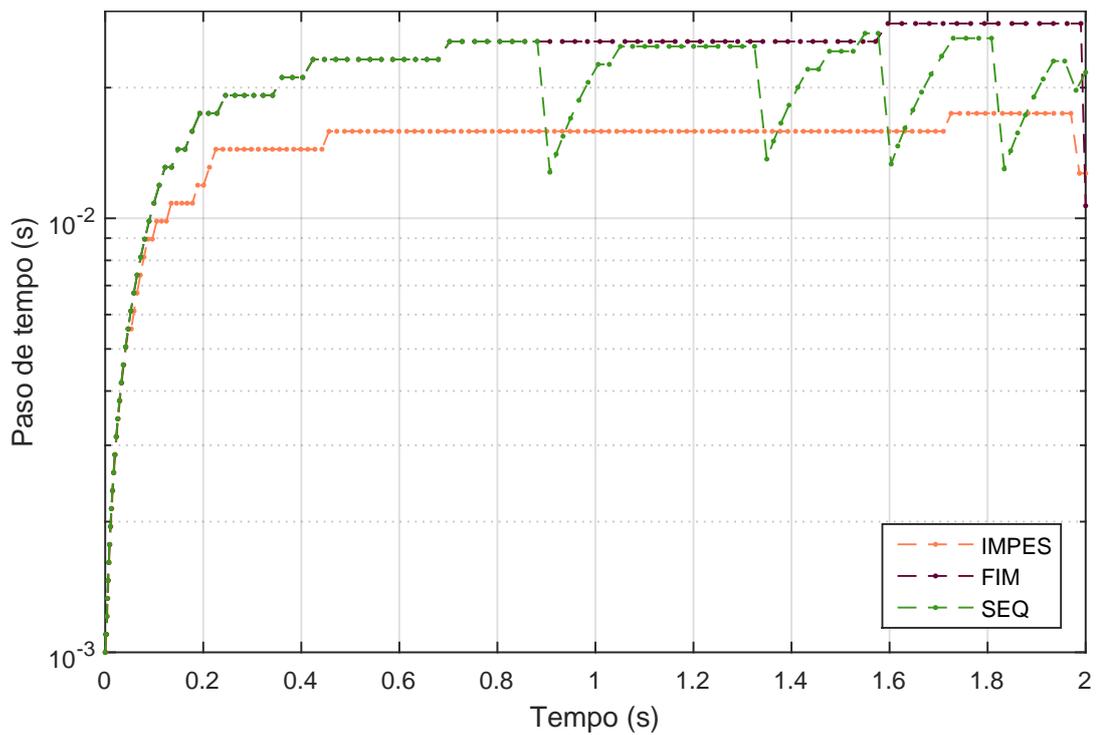
Fonte: do autor

Figura 5.18: Tempo computacional para os três métodos com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo



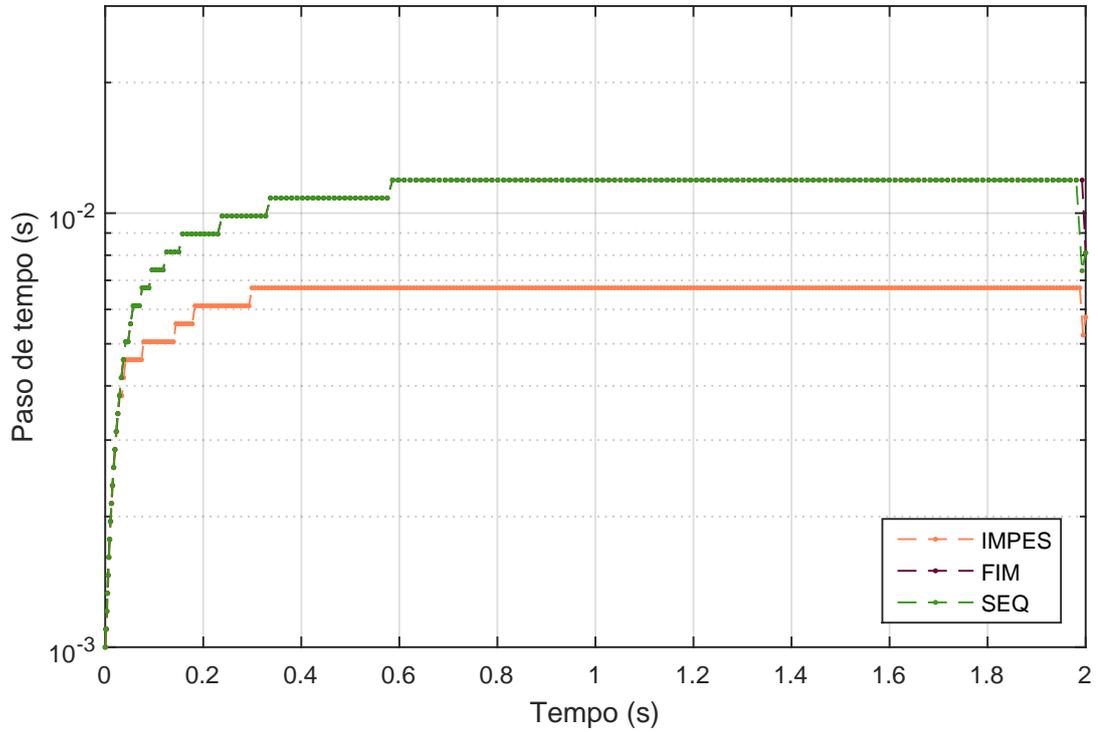
Fonte: do autor

Figura 5.19: Evolução do passo de tempo para a malha de 430 nós com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo



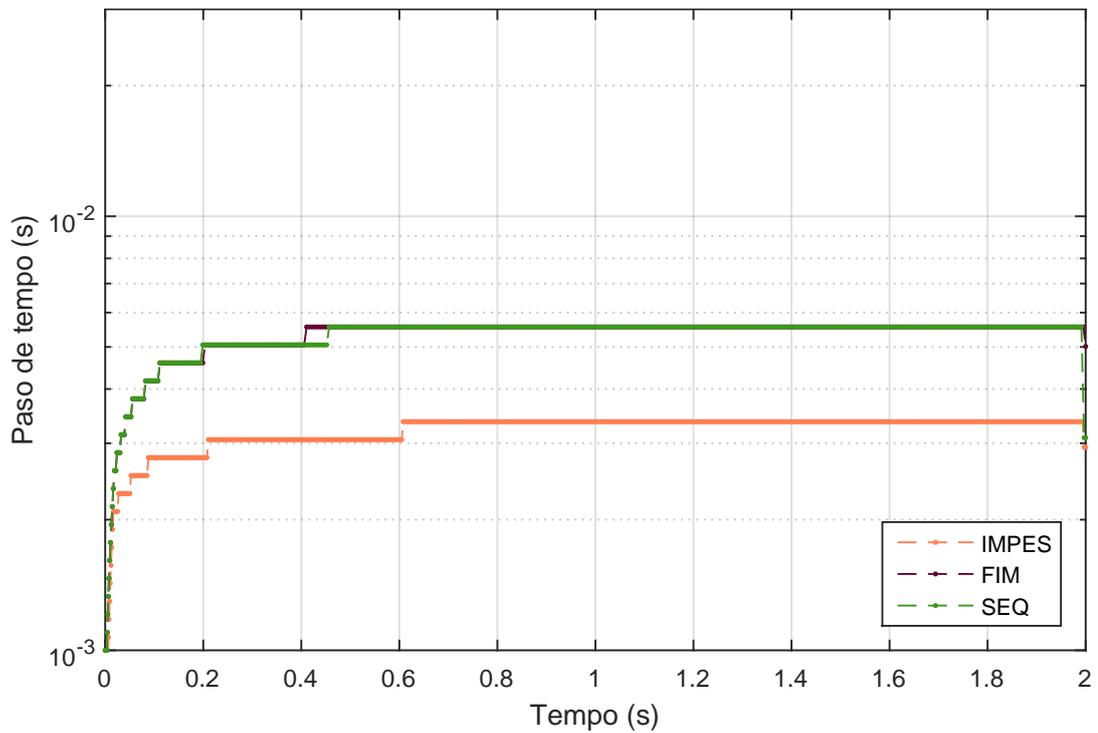
Fonte: do autor

Figura 5.20: Evolução do passo de tempo para a malha de 1961 nós com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo



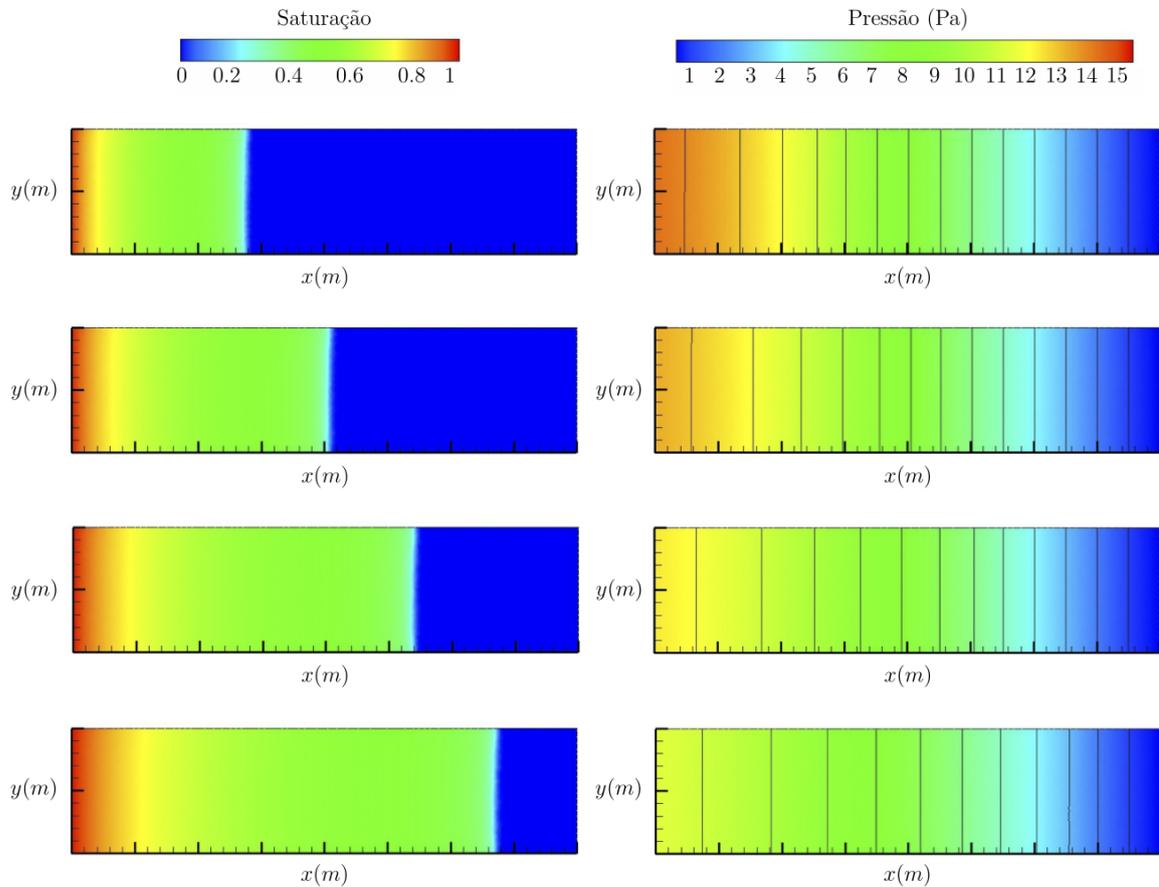
Fonte: do autor

Figura 5.21: Evolução do passo de tempo para a malha de 7392 nós com critério menos rígido de passo de tempo adaptativo



Fonte: do autor

Figura 5.22: Campos de saturação e pressão para os instantes de tempo 0,2, 0,3 0,4 e 0,5 VPI



Fonte: do autor

Para todos os critérios de passo de tempo adaptativo, as soluções numéricas apresentam o comportamento esperado, *i.e.*, os perfis numéricos de saturação se aproximam ao perfil correspondente à solução analítica à medida que a malha é refinada. Entretanto, até mesmo na malha mais refinada há considerável presença de difusão numérica, a qual é responsável pela suavização da discontinuidade dos perfis. Hurtado (2005) afirma que esse é o preço que deve ser pago pela garantia de soluções fisicamente coerentes e que, neste caso, a difusão numérica advém da interpolação de primeira ordem utilizada nos termos advectivos.

Quanto à evolução do passo de tempo, infere-se que o esquema de passo de tempo adaptativo pode ser responsável por considerável redução do tempo computacional, pois que permite-se um acréscimo de seu valor até que isso não afete a obtenção de uma solução estável. Além disso, conforme esperado, o passo de tempo deve ser reduzido à medida que a malha é refinada, conforme expõem as figuras 5.12, 5.13, 5.14, 5.19, 5.20 e 5.21.

Entretanto, observa-se que a utilização de um esquema de passo de tempo adaptativo pode influenciar na qualidade da solução numérica obtida. Quando esse esquema não é aplicado as soluções determinadas pelos três métodos praticamente coincidem – 5.4, 5.5 e 5.6. A solução obtida por meio do método totalmente implícito não é afetada significativamente quando os critérios mais e menos rígido de passo de tempo adaptativo são empregados. O método sequencial, contudo, apresenta alguns pontos distantes da curva quando o critério menos rígido de passo de tempo adaptativo é empregado – 5.15, e 5.17. Já o método IMPES apresenta uma solução mais próxima da analítica quando o critério de passo de tempo adaptativo é aplicado. Isso se deve, possivelmente, a uma condição mais próxima daquela na qual esse método fornece a solução analítica para o caso de *Buckley-Leverett*. Essa condição é apresentada no apêndice A para o caso de uma malha unidimensional. Também é explicado que o método FIM, não obstante a estabilidade incondicional, apresenta difusão numérica para quaisquer combinações de malha e parâmetros do problema. Os resultados obtidos neste trabalho sugerem que esse comportamento se mantém no caso de uma malha não estruturada bidimensional. Nesse caso, entretanto, as condições que permitem ao IMPES apresentar a solução analítica não podem ser obtidas de forma direta. Mesmo se essas condições pudessem ser determinadas, ter-se-ia de especificar um passo de tempo fixo, logo não seria possível satisfazê-la com o esquema de passo adaptativo.

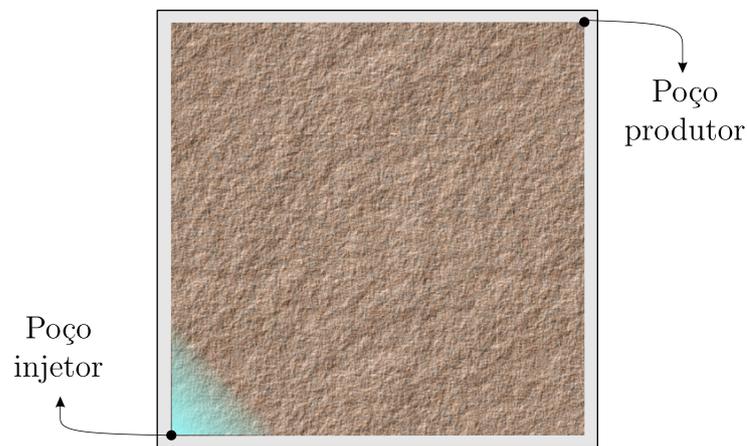
Quanto ao tempo computacional despendido em cada simulação, infere-se que o passo de tempo adaptativo é interessante sobretudo ao método totalmente implícito, o qual permite uma redução do custo computacional sem que a solução seja significativamente alterada. O método sequencial, muito embora tenha fornecido soluções mais rapidamente que o FIM para alguns casos, apresentou certa sensibilidade em relação ao uso de um passo de tempo adaptativo, de forma que deve-se ter cautela a aplicar essa condição para tal método. Já o método IMPES clássico se comportou bem quanto à utilização do passo de tempo adaptativo. Contudo, conforme já explicado, isso pode ser devido a um caráter particular do problema unidimensional de *Buckley-Leverett*.

5.2 DESLOCAMENTO BIDIMENSIONAL EM CONFIGURAÇÃO QUARTER FIVE-SPOT

5.2.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considera-se uma amostra de rocha quadrada, homogênea, inicialmente embebida em óleo e na qual injeta-se água a uma vazão constante através de um poço injetor e produz-se óleo a partir de um poço produtor que opera com pressão constante, conforme ilustrado na figura 5.23.

Figura 5.23: Configuração do problema de deslocamento bidimensional



Fonte: modificado de (Maliska *et al.*, 2015)

A configuração desse problema é conhecida como *quarter five-spot*, pois que representa um quarto de um domínio quadrado em que há quatro poços produtores nos vértices e um poço injetor no centro (Aziz & Settari, 1979). Os dados de entrada utilizados no problema estão listados na tabela 5.1. A injeção de água ao longo do tempo especificado corresponde a cerca de 48% do volume poroso injetado. O modelo de permeabilidade relativa considerado foi o modelo de Corey com coeficiente unitário e expoente quadrático, ou seja,

$$k_r^w = (\hat{S})^2, \quad (5.16)$$

$$k_r^o = (1 - \hat{S})^2. \quad (5.17)$$

As saturações mínima e máxima de água e óleo foram especificadas como 0 e 1, respectivamente e o campo de pressão inicial é nulo.

Tabela 5.1: Dados do problema de deslocamento bifásico bidimensional

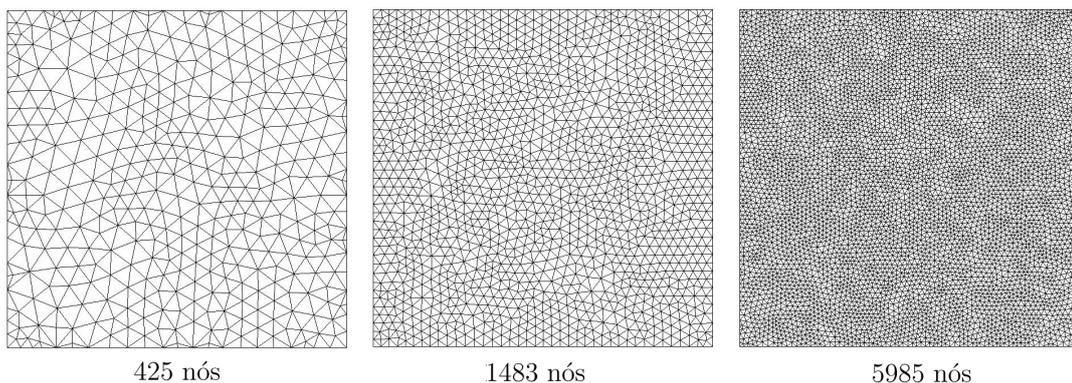
Atributo	Valor
Área do reservatório	90000 m ²
Viscosidade da água	10 ⁻³ Pa.s
Viscosidade do óleo	10 ⁻² Pa.s
Permeabilidade absoluta	10 ⁻¹¹ m ²
Porosidade	0,2
Vazão de água injetada	2.10 ⁻⁵ m ³ /s
Dias de simulação	5000

Fonte: do autor

5.2.2 RESULTADOS OBTIDOS

A seguir serão apresentados alguns resultados obtidos para o problema descrito. Os resultados numéricos advindos de cada método – IMPES, totalmente implícito e sequencial – serão apresentados e comparados entre si. Foram empregadas três malhas computacionais com diferentes graus de refino – 425, 1483 e 5985 nós – compostas apenas de elementos triangulares. Essas malhas podem ser visualizadas na figura 5.24. Os valores de índice de poço utilizados foram $2,85208 \cdot 10^{-11}$ m³, $3,25968 \cdot 10^{-11}$ m³ e $6,18471 \cdot 10^{-11}$ m³ para as malhas de 425, 1483 e 5985 nós, respectivamente.

Figura 5.24: Malhas não-estruturadas utilizadas na solução do problema *quarter five-spot*



Fonte: do autor

Os critérios de convergência e as tolerâncias utilizadas foram idênticos àqueles especificados no caso de deslocamento unidimensional. Neste caso utilizou-se apenas o esquema mais rívido de passo de tempo, o qual tem seus parâmetros listados na tabela 4.1.

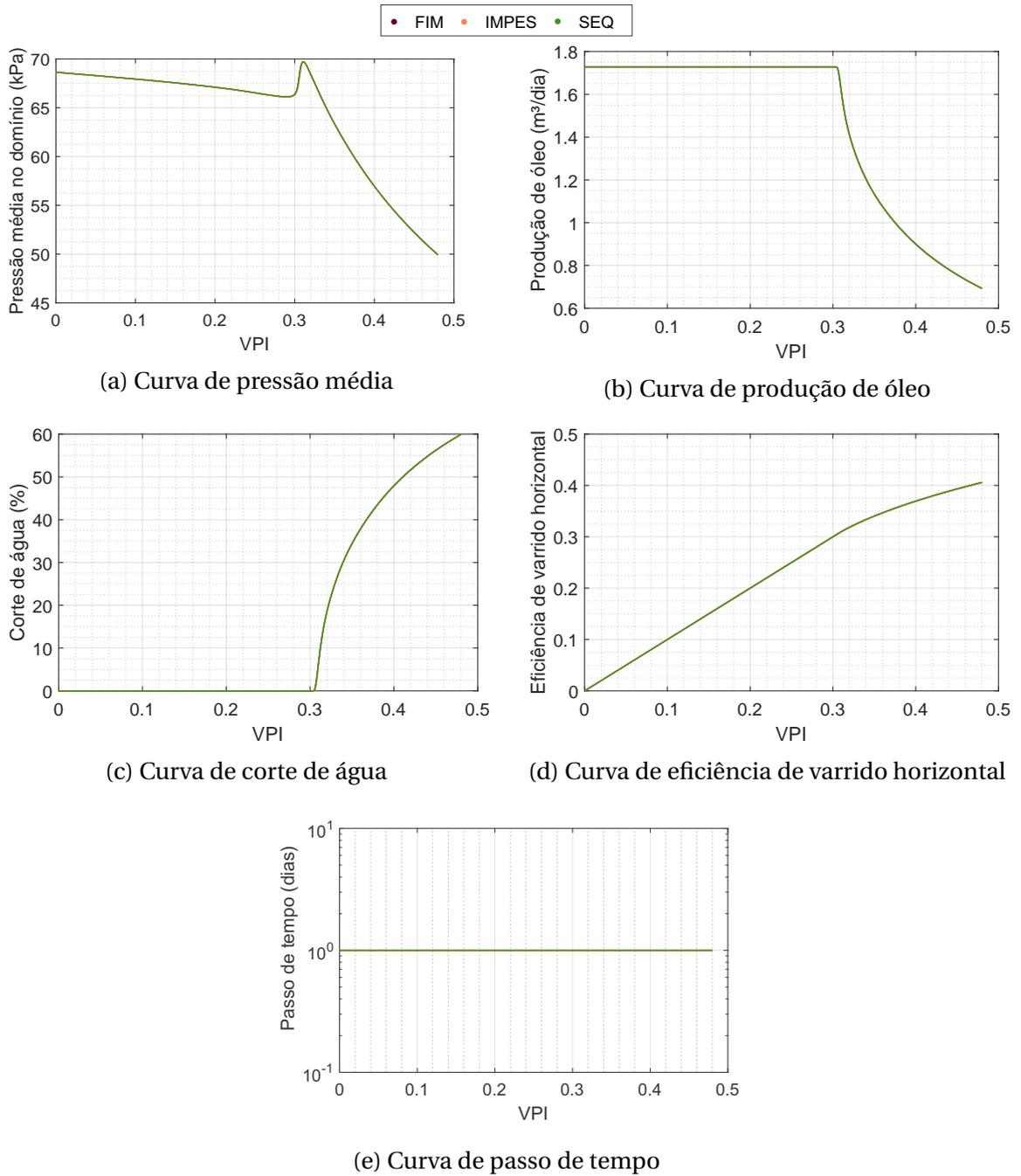
Os resultados obtidos para a malha mais grossa – de 425 nós – sem e com a utilização do passo de tempo adaptativo podem ser visualizados, respectivamente, nas figuras 5.25 e 5.26. No caso de passo de tempo fixo, seu valor foi mantido constante e igual a 1 dia. No caso em que é utilizado o esquema de passo de tempo adaptativo, esse valor corresponde ao passo de tempo inicial. As primeiras curvas expostas são a pressão média ao longo do tempo e a taxa de produção de óleo. A terceira curva corresponde ao corte de água – razão entre a vazão de água e a vazão total no poço. A quarta curva correlaciona o volume poroso injetado à eficiência de varrido horizontal – razão entre o volume de óleo produzido e o volume injetável. Quando se dispõem de curvas de eficiência de varrido horizontal, para se obterem os valores reais para um determinado reservatório basta multiplicar os valores adimensionais que podem ser lidos na figura pelo volume deslocável do meio poroso em estudo (Rosa *et al.*, 2006). Em decorrência de sua definição, essa curva é idêntica à de saturação média no domínio. Por fim, a última curva apresenta a evolução do passo de tempo da simulação. Os tempos computacionais despendidos sem e com a utilização do passo de tempo adaptativo estão listados, respectivamente, nas tabelas 5.2 e 5.3.

Os mesmos resultados também foram obtidos para uma malha de 1483 nós e estão dispostos, sem e com a utilização do passo de tempo adaptativo, respectivamente, nas figuras 5.27 e 5.28. Para esse caso, o passo de tempo inicial especificado foi de 0,5 dia quando utilizado o esquema de passo de tempo adaptativo. Quando não utilizado, seu valor foi mantido em 0,5 dia. Os tempos computacionais despendidos sem e com a utilização do passo de tempo adaptativo estão listados, respectivamente, nas tabelas 5.4 e 5.5.

Por fim, também foram calculados os mesmos resultados para a malha mais refinada – de 5985 nós. Esses resultados estão dispostos, sem e com a utilização do passo de tempo adaptativo, respectivamente, nas figuras 5.29 e 5.30. Para essa configuração, o passo de tempo foi mantido em 0,05 dia quando não utilizada a estratégia de passo de tempo adaptativo. Quando utilizada, esse foi o valor especificado como passo de tempo inicial. Os tempos computacionais despendidos sem e com a utilização do passo de tempo adaptativo estão listados, respectivamente, nas tabelas 5.6 e 5.7.

Ademais, os campos de saturação e pressão no instante de *breakthrough* estão ilustrados na figura 5.31. A partir desse instante, o poço produtor passa a produzir não apenas óleo, mas também água (Rosa *et al.*, 2006). Já a figura 5.32 exhibe os campos de saturação obtidos pelo método totalmente implícito, com passo de tempo fixo e com a malha mais refinada para os instantes de tempo de 500, 1500, 3000 e 5000 dias.

Figura 5.25: Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo fixo e uma malha de 425 nós



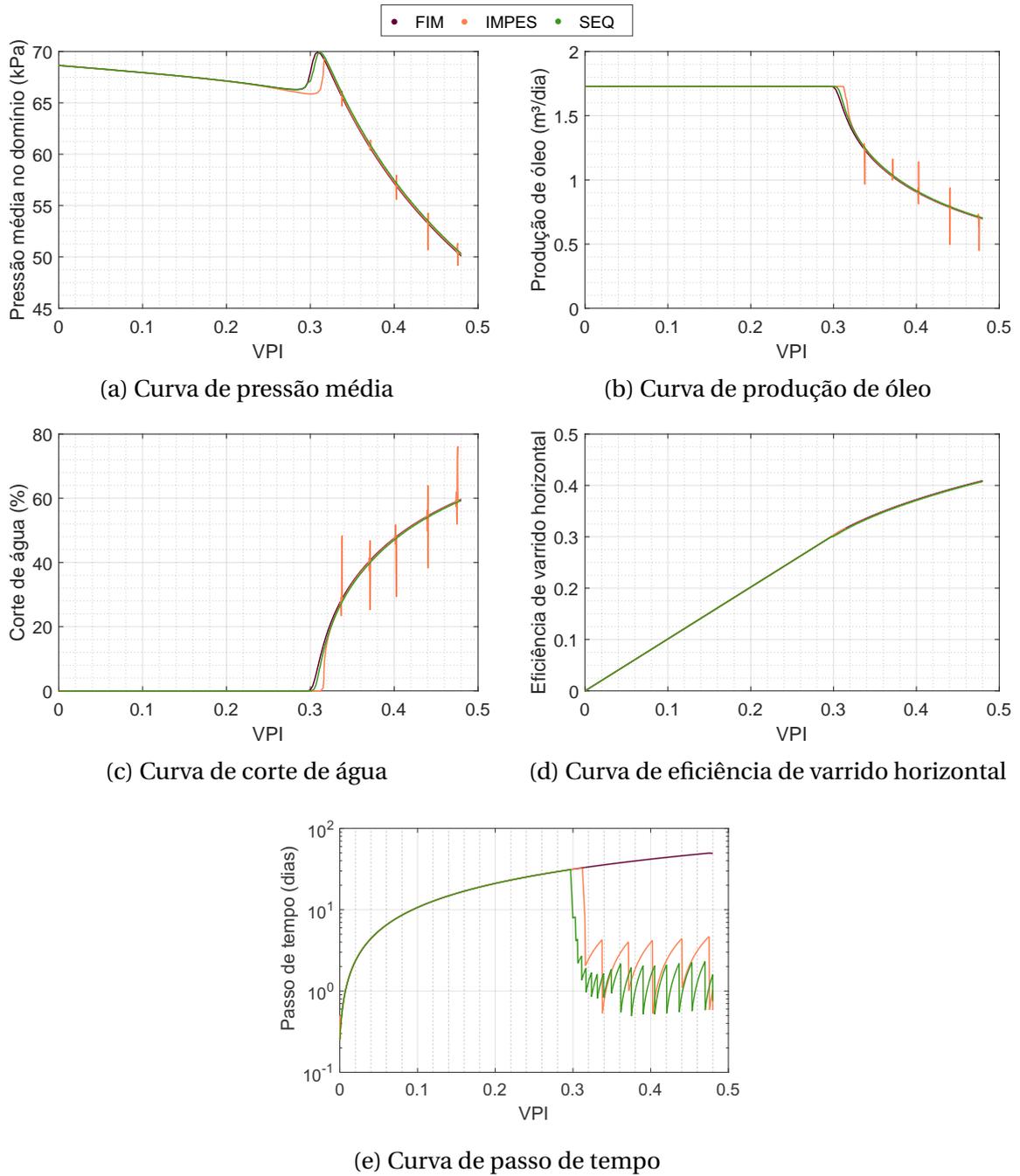
Fonte: do autor

Tabela 5.2: Tempo computacional – passo de tempo fixo e malha de 425 nós

FIM	IMPES	SEQ
481,315 s	46,7706 s	206,893 s

Fonte: do autor

Figura 5.26: Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo adaptativo e uma malha de 425 nós



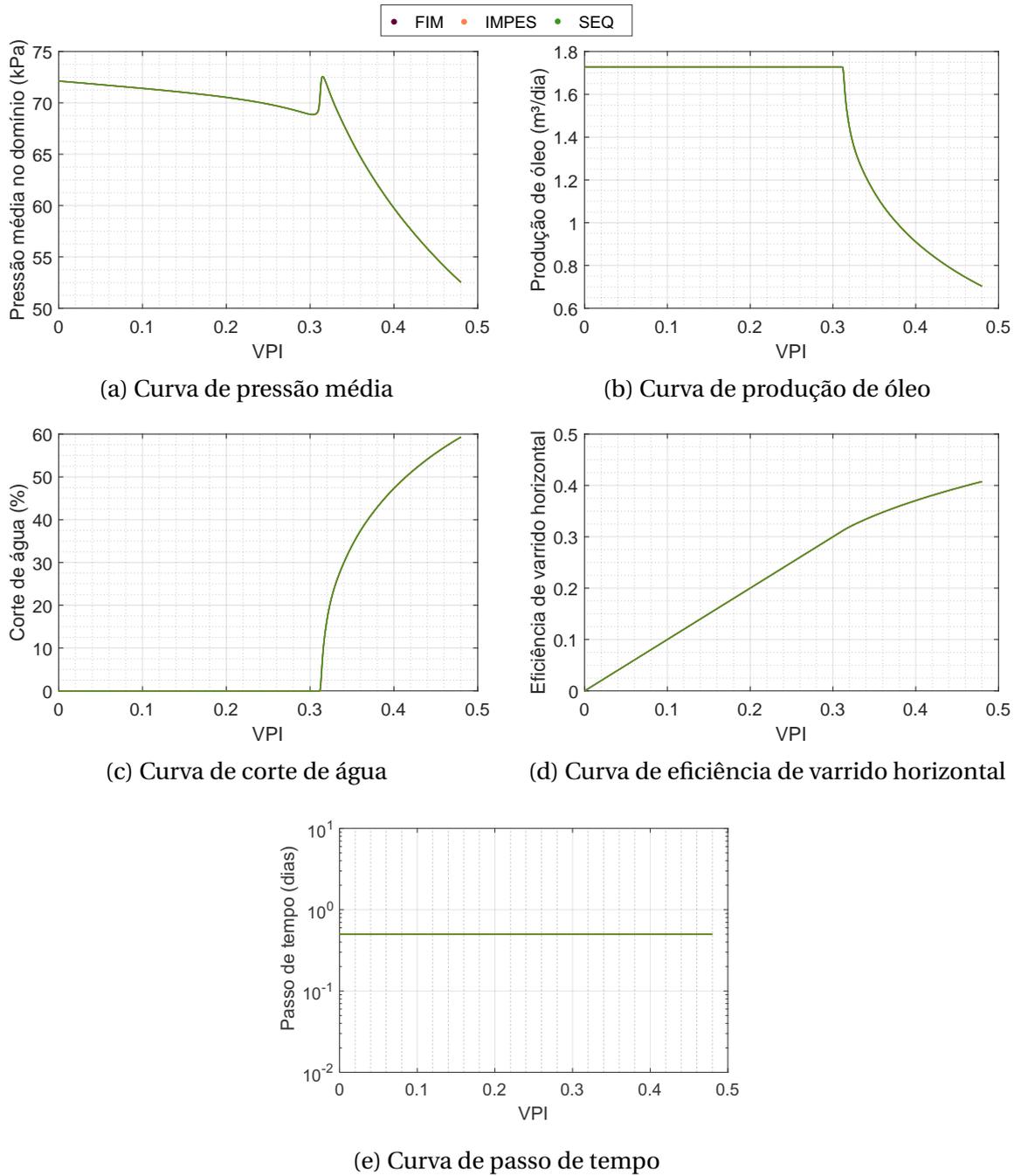
Fonte: do autor

Tabela 5.3: Tempo computacional – passo de tempo adaptativo e malha de 425 nós

FIM	IMPES	SEQ
49,8253 s	13,8850 s	57,2920 s

Fonte: do autor

Figura 5.27: Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo fixo e uma malha de 1483 nós



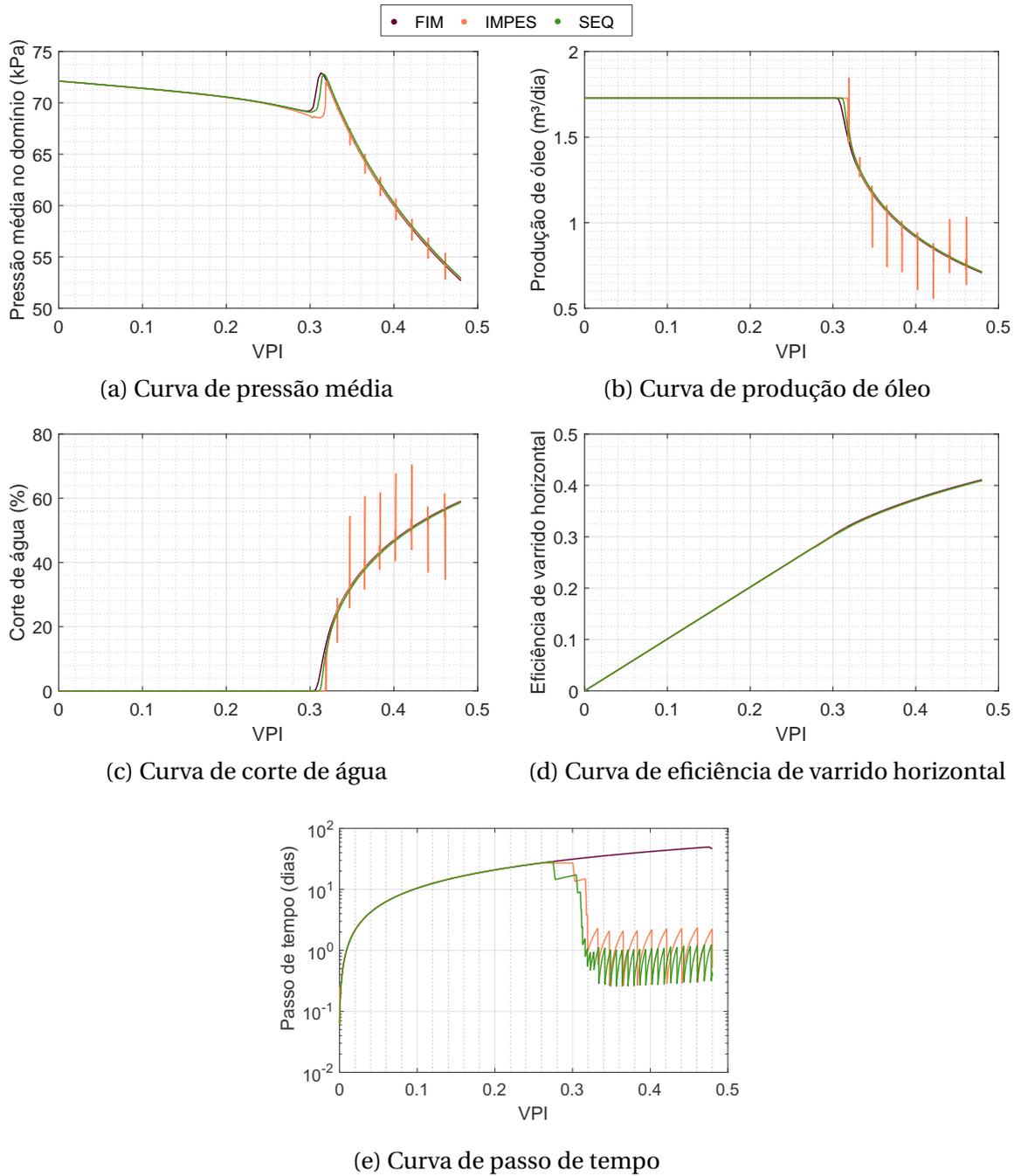
Fonte: do autor

Tabela 5.4: Tempo computacional – passo de tempo fixo e malha de 1483 nós

FIM	IMPES	SEQ
4259,28 s	453,339 s	822,232 s

Fonte: do autor

Figura 5.28: Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo adaptativo e uma malha de 1483 nós



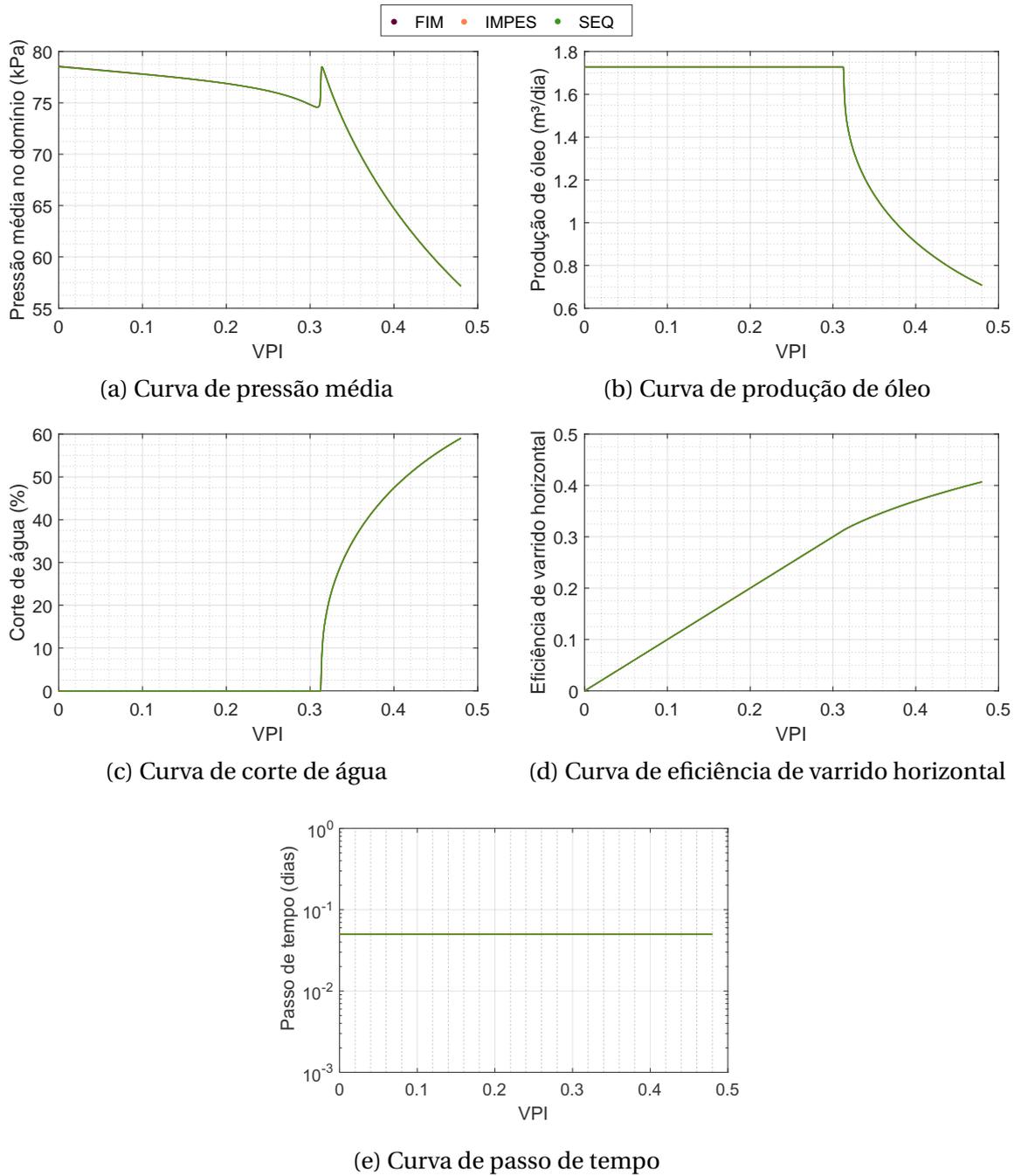
Fonte: do autor

Tabela 5.5: Tempo computacional – passo de tempo adaptativo e malha de 1483 nós

FIM	IMPES	SEQ
219,840 s	108,822 s	306,970 s

Fonte: do autor

Figura 5.29: Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo fixo e uma malha de 5985 nós



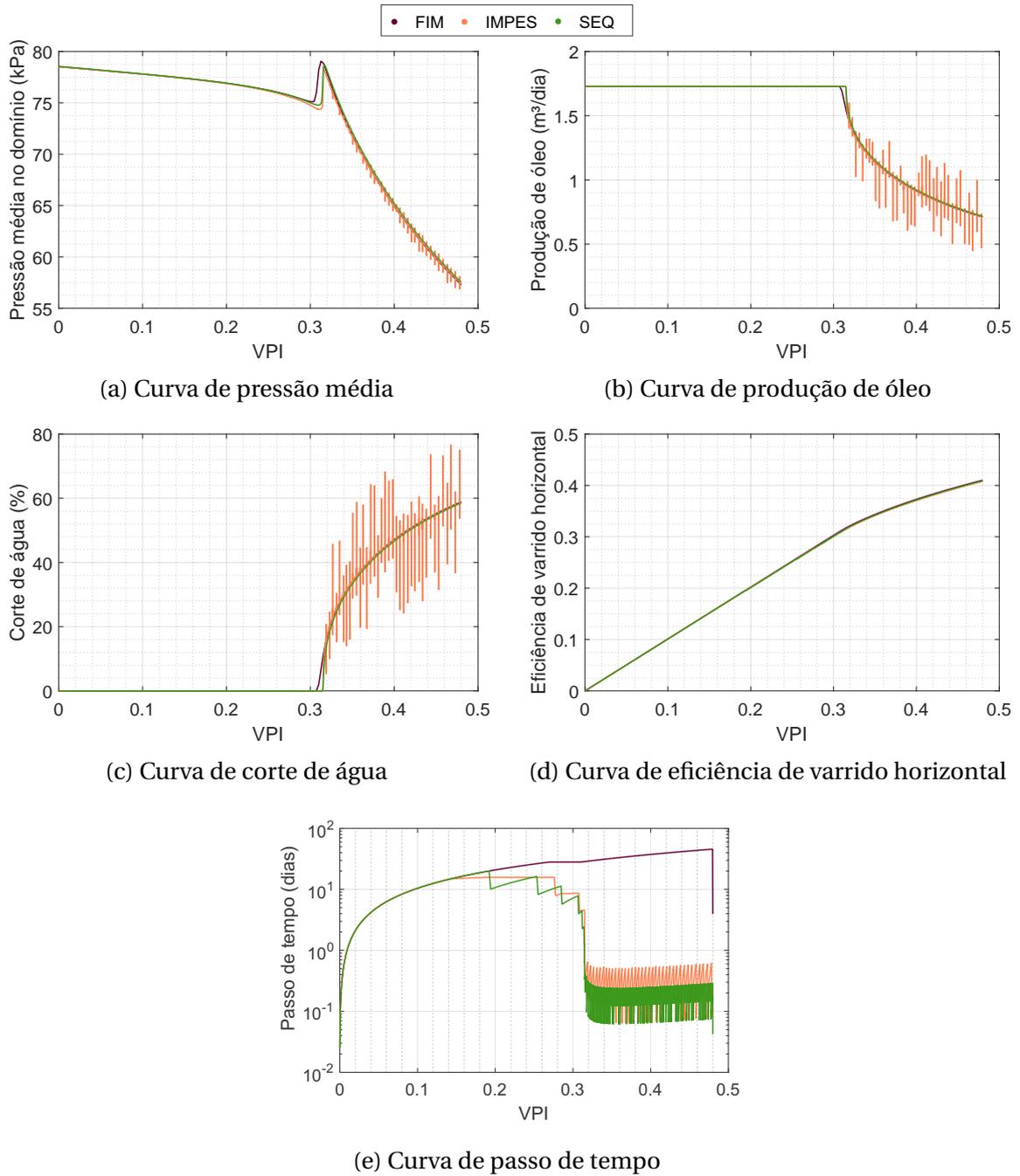
Fonte: do autor

Tabela 5.6: Tempo computacional – passo de tempo fixo e malha de 5985 nós

FIM	IMPES	SEQ
115135 s	13.097,2 s	28.003,0 s

Fonte: do autor

Figura 5.30: Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com passo de tempo adaptativo e uma malha de 5985 nós



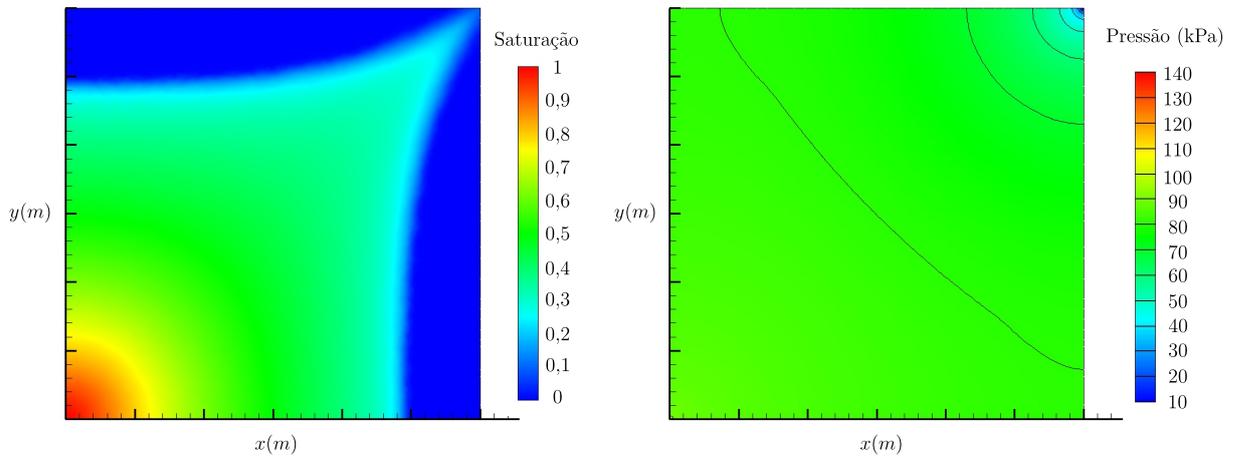
Fonte: do autor

Tabela 5.7: Tempo computacional – passo de tempo adaptativo e malha de 5985 nós

FIM	IMPES	SEQ
1.315,89 s	1.048,18 s	4.625,63 s

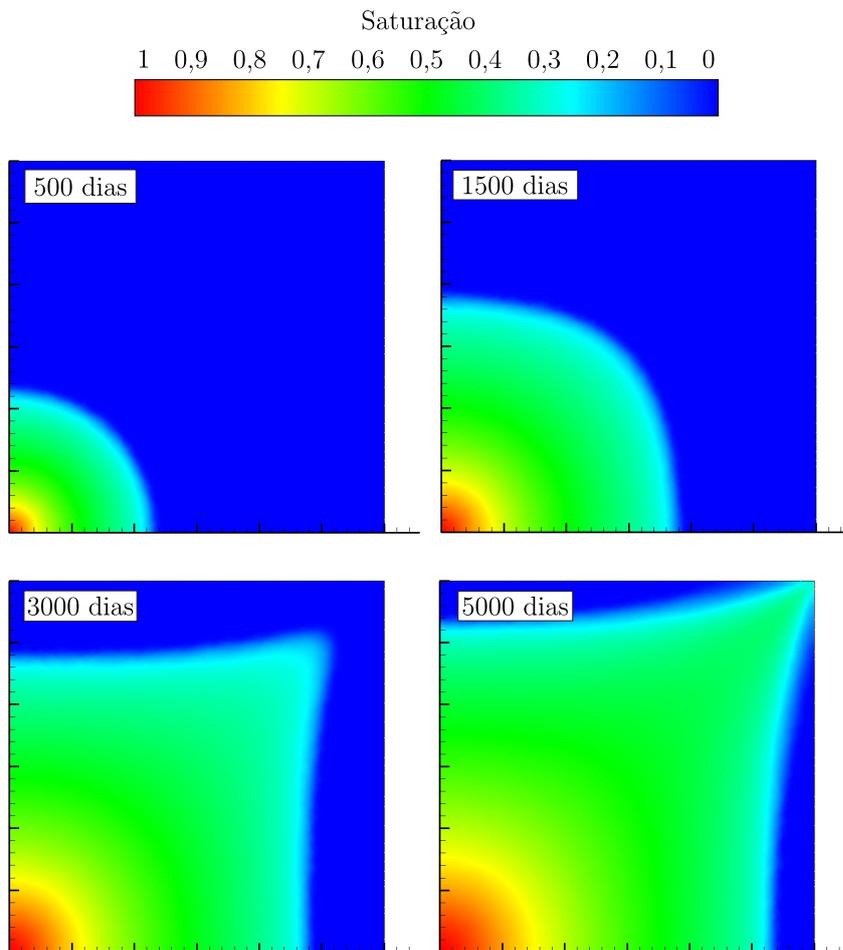
Fonte: do autor

Figura 5.31: Campos de pressão e saturação no instante de *breakthrough*



Fonte: do autor

Figura 5.32: Campos de saturação para os instantes de tempo de 500, 1500, 3000 e 5000 dias



Fonte: do autor

Observa-se que a curva de eficiência de varrido horizontal apresenta dois trechos distintos – uma reta correspondente à função identidade e uma curva tendendo a se tornar horizontal. O tempo associado à transição entre esses dois trechos é o instante de *breakthrough* (BT).

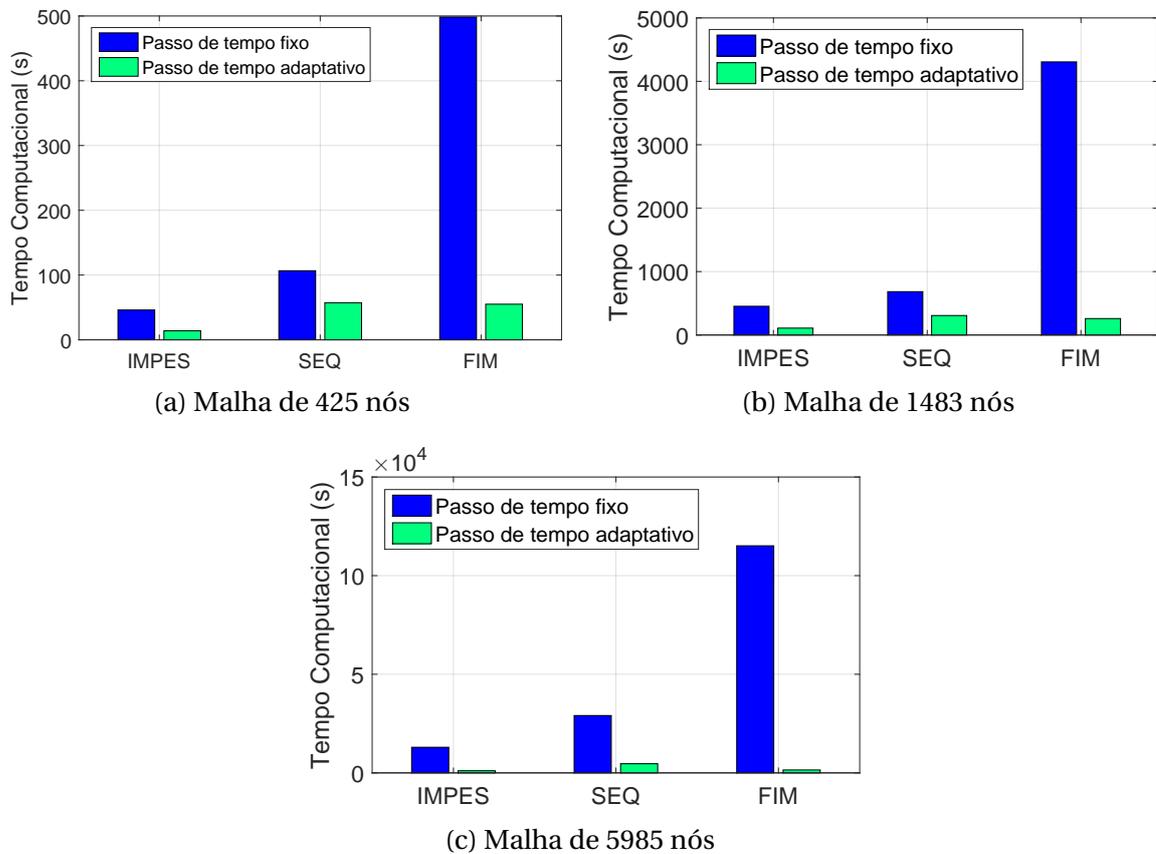
Quanto à curva de pressão, verifica-se que seu valor máximo não ocorre quando a rocha está saturada de óleo. Tem-se uma curva de pressão média crescente até atingir seu valor máximo e, a partir de então, a curva passa a ser decrescente. Esse comportamento decorre da utilização de um modelo de permeabilidade relativa quadrático, pois que com esse modelo o mínimo valor de mobilidade total ocorre quando a saturação de óleo é menor que a unidade.

Pode-se inferir dos resultados que o métodos IMPES apresenta instabilidades na solução numérica correspondente após o *breakthrough*. Essas instabilidades ocorrem porque esse esquema não itera na não linearidade existente entre pressão e saturação, de modo que o valor da saturação utilizada para calcular a vazão de fluido produzida é o do tempo anterior. Isso pode levar a inconsistências físicas no instante de tempo em que se passa a produzir água. Nesse instante, os volumes de controle ao redor do poço produtor apresentam saturação de água relativamente elevada, levando a uma vazão de água entrando no volume de controle do poço também relativamente alta. Porém, a vazão de água produzida no poço ainda é baixa, pois a saturação de água nesse volume é a do instante anterior, que é pequena. Ou seja, a diferença entre as vazões entrando e saindo do volume de controle é alta. Caso passos de tempo grandes sejam utilizados, a variação da saturação será também relativamente alta (e possivelmente não física). No próximo passo de tempo ter-se-ia, pois, mobilidade da água com valor elevado, levando a uma produção de água excessiva, que leva a uma redução demasiada da saturação. Desse modo, a saturação de água no volume de controle do poço fica instável, alternando entre valores altos e baixos. Essas instabilidades podem ser reduzidas substancialmente modificando o IMPES clássico para o método sequencial. Contudo, isso se dá às custas da necessidade um maior tempo de computação.

Já o método totalmente implícito apresenta soluções estáveis não obstante a utilização do esquema de passo de tempo adaptativo. Ademais, essa estratégia permitiu uma redução significativa do custo computacional correspondente ao método FIM, que com passo de tempo fixo era o que mais demandava tempo computacional e com passo de tempo adaptativo ficou menos custoso que o método sequencial. Ressalta-se que embora o IMPES tenha sido o método menos custoso em todos os casos, sua solução só apresentou estabi-

lidade em casos de passo de tempo fixo. Além disso, o custo computacional de utilizar o método totalmente implícito com passo de tempo adaptativo ficou da mesma ordem do custo correspondente à utilização da formulação IMPES sem o passo de tempo adaptativo e ambos os métodos apresentaram soluções estáveis e consistentes. Portanto, foi possível tirar proveito da robustez do FIM no intuito de utilizar passos de tempo mais elevados e por conseguinte reduzir o tempo despendido na simulação numérica. Os tempos computacionais despendidos estão sumarizados por meio de gráficos na figura 5.33.

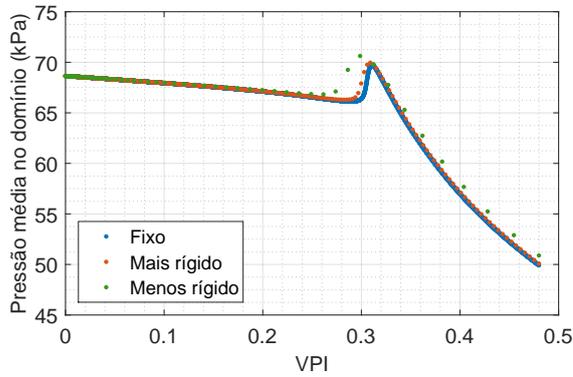
Figura 5.33: Tempos computacionais despendidos no caso de deslocamento bidimensional



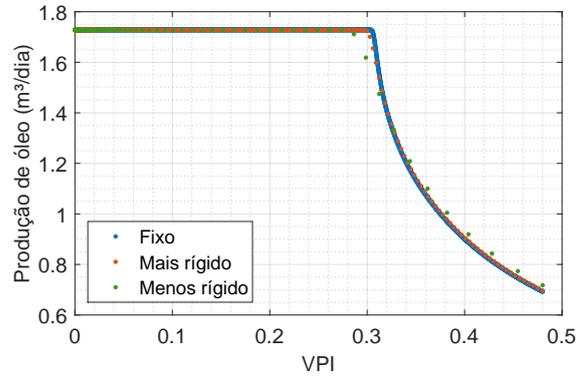
Fonte: do autor

Almejando analisar mais pormenorizadamente a influência do esquema de passo de tempo adaptativo na solução numérica obtida por meio do método totalmente implícito, foram comparados os resultados advindos de três tratamentos distintos do passo de tempo – passo de tempo fixo, critério mais rígido e critério menos rígido. Os parâmetros associados a esses critérios já foram explicados e podem ser encontrados nas tabelas 4.1 e 4.2. Para realizar essa comparação, optou-se por utilizar a malha mais grossa, a qual possui 425 nós. Os resultados obtidos estão expostos na figura 5.34. Os tempos computacionais despendidos na obtenção de tais soluções estão listados na tabela 5.8.

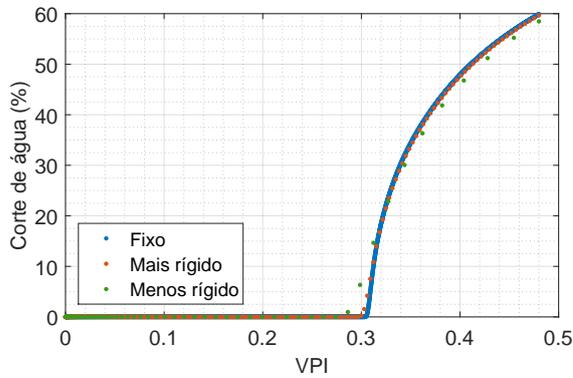
Figura 5.34: Resultados obtidos para o deslocamento bidimensional com o método totalmente implícito



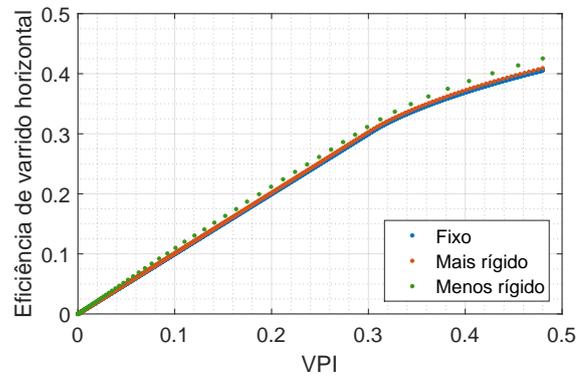
(a) Curva de pressão média



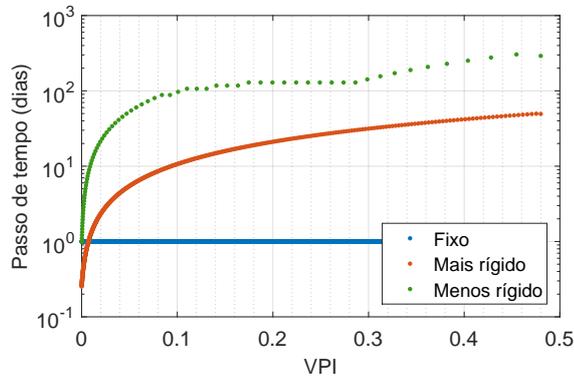
(b) Curva de produção de óleo



(c) Curva de corte de água



(d) Curva de eficiência de varrido horizontal



(e) Curva de passo de tempo

Fonte: do autor

Tabela 5.8: Tempo computacional despendido com o método FIM

Fixo	Mais rígido	Menos rígido
481,315 s	49,825 s	10,6337 s

Fonte: do autor

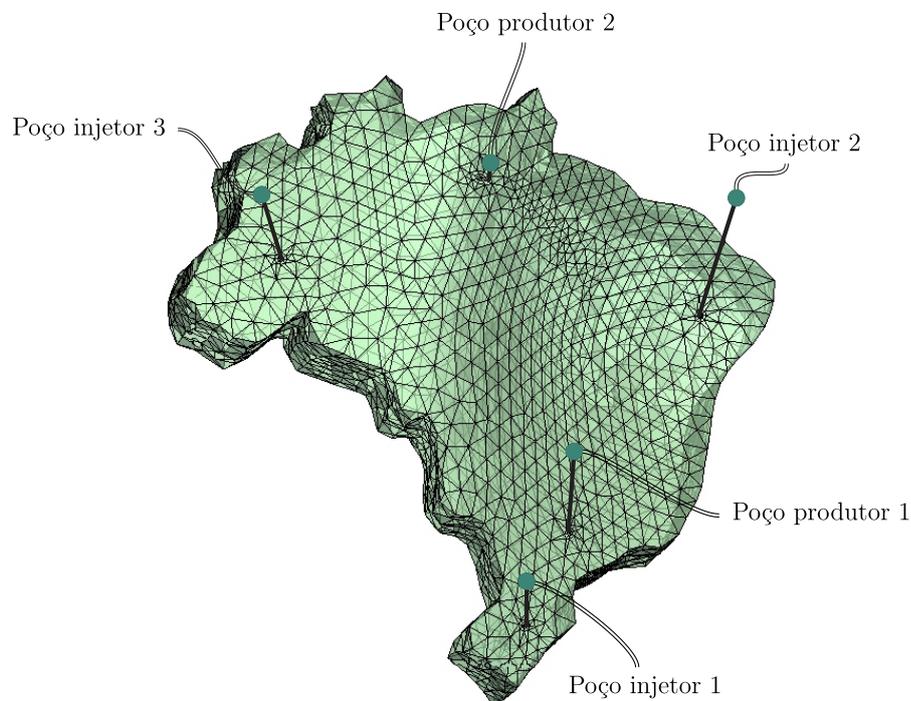
Pode-se inferir dos resultados obtidos que o emprego do passo de tempo adaptativo reduziu o tempo computacional em uma ordem. Além disso, do critério mais rígido para o menos rígido verificou-se uma redução de cinco vezes nesse tempo despendido. Não obstante essa redução esteja inevitavelmente em conjunto com uma maior difusão numérica e por conseguinte menor capacidade de capturar gradientes elevados, todas as soluções apresentadas são fisicamente consistentes. Logo, é evidente que a escolha do esquema de passo de tempo adaptativo a ser utilizado está fortemente relacionado com a precisão com a qual se deseja solucionar o problema.

5.3 DESLOCAMENTO TRIDIMENSIONAL EM MALHA HÍBRIDA

5.3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O problema de deslocamento bifásico tridimensional será simulado em uma malha não-estruturada híbrida com o formato aproximado do território brasileiro. Trata-se de um processo de recuperação secundária de óleo em um reservatório tridimensional no qual há três poços injetores e dois produtores, conforme esquematizado na figura 5.35.

Figura 5.35: Configuração do problema tridimensional

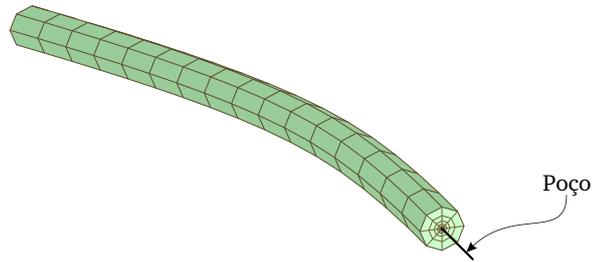


Fonte: do autor

Os três poços injetores são verticais e atravessam integralmente a espessura do reservatório. Os dois poços produtores, por sua vez, são direcionais. Em torno de cada um dos poços a malha tem formato cilíndrico acompanhando a trajetória da linha que representa o poço, conforme ilustrado na figura 5.36. Todas as fronteiras do reservatório são impermeáveis. Tanto as informações relacionadas à malha quanto os dados de entrada estão listados na tabela 5.9.

O modelo de permeabilidade relativa é o mesmo que aquele utilizado nos casos anteriores, *i.e.*, modelo de Corey com expoente quadrático e coeficiente unitário. Ainda, o problema foi resolvido em termos de potenciais. A fim de obter o campo de pressão poder-

Figura 5.36: Ilustração da malha cilíndrica ao redor dos poços



Fonte: modificado de Maliska *et al.* (2012)

Tabela 5.9: Dados do problema de deslocamento bifásico tridimensional

Atributo	Valor
Comprimento máximo do reservatório	200 m
Largura máxima do reservatório	200 m
Espessura máxima do reservatório	130 m
Volume do reservatório	$1,02249 \cdot 10^6 \text{ m}^3$
Número de nós	8073
Número de tetraedros	35286
Número de hexaedros	544
Número de prismas	544
Número de pirâmides	576
Número de poços injetores	3
Número de poços produtores	2
Viscosidade da água	$10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Viscosidade do óleo	$10^{-2} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
Permeabilidade absoluta	10^{-14} m^2
Porosidade	0,1
Vazão de água injetada pelo poço injetor 1	$1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
Vazão de água injetada pelo poço injetor 2	$9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$
Vazão de água injetada pelo poço injetor 3	$8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$
Dias de simulação	3000

se-ia fazer um pós processamento a partir dos dados de densidades das fases e aceleração devida à gravidade. As saturações mínima e máxima de água e óleo foram especificadas como 0 e 1, respectivamente e os campos iniciais de pressão e saturação são nulos. Os critérios de convergência e as tolerâncias especificadas para este problema também foram iguais àqueles utilizados nos problemas anteriores. Já os valores de índice de poço utilizados para os poços 1 e 2 foram, respectivamente, $3,05816 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3$ e $3,92357 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3$.

5.3.2 RESULTADOS OBTIDOS

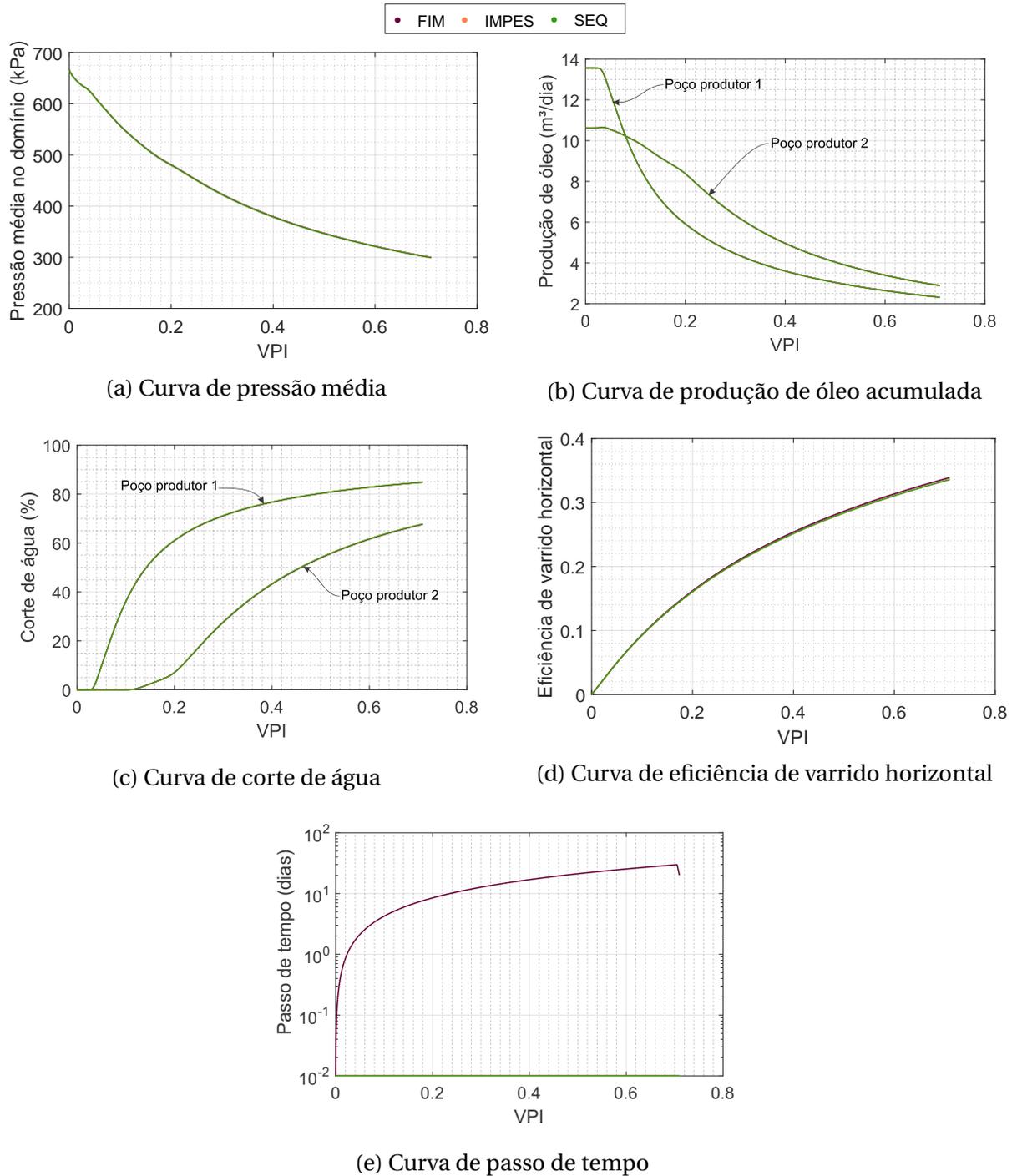
A seguir, os resultados numéricos advindos de cada método – IMPES, totalmente implícito e sequencial – serão apresentados e comparados entre si. Uma vez que foi observado, a partir dos resultados obtidos para o deslocamento bidimensional, que o método IMPES é significativamente sensível ao esquema de passo de tempo adaptativo implementado, optou-se por utilizar passo de tempo fixo quando este método for empregado. Quanto ao método sequencial, verificou-se que sua limitação quanto ao passo de tempo utilizado após o instante de *breakthrough* é severa a ponto de ser mais vantajoso especificar passo de tempo fixo. Sendo assim, apenas para o método FIM foi empregado o esquema de passo de tempo variável mais rígido, cujos parâmetros estão listados na tabela 4.1.

Os resultados obtidos para 3000 dias de simulação podem ser visualizados na figura 5.37. As primeiras curvas expostas são a pressão e saturação média ao longo do tempo. As terceira e quarta curvas correspondem à produção de óleo e ao corte de água, respectivamente. A quinta curva correlaciona o volume injetado adimensional injetado à eficiência de varrido horizontal. Já a última curva apresenta a evolução do passo de tempo da simulação. Por fim, os tempos computacionais despendidos estão listados na tabela 5.10.

Quanto à solução numérica, infere-se que os três métodos apresentam soluções coerentes e quase coincidentes. O método FIM, contudo, apresenta expressiva vantagem em relação ao tempo computacional necessário à simulação do problema, tendo em vista que despendeu apenas 7,69% do tempo computacional gasto pelo método IMPES e 2,96%, do sequencial. É interessante verificar que em nenhum momento foi necessária uma redução do passo de tempo adaptativo quando se empregou a formulação totalmente implícita.

A fim de explorar ainda mais as potencialidades do método totalmente implícito, foram obtidos resultados para 10000 dias de simulação apenas com esse método, os quais podem ser visualizados na figura 5.38. As figuras figura 5.39 e figura 5.40 ilustram, respectivamente, os campos de saturação e pressão para seis instantes de tempo – 496, 997, 3010 e 5000, 7013 e 10000 dias. Em ambas as figuras foi realizado um corte na malha a fim de prover uma melhor visualização da região próxima aos poços injetores. Os campos finais de saturação e pressão – para 10000 dias – podem ser visualizados na figura 5.41. O tempo computacional despendido nesse caso foi de 18909,8 segundos, apenas cerca de 12% a mais que o tempo necessário para simular 3000 dias. Percebe-se, assim, que lançando-se mão de um esquema de passo de tempo adaptativo foi possível utilizar-se da robustez da formulação totalmente implícita a fim de prover uma simulação menos custosa.

Figura 5.37: Resultados obtidos para o deslocamento tridimensional em malha híbrida com os três métodos para 3000 dias de simulação



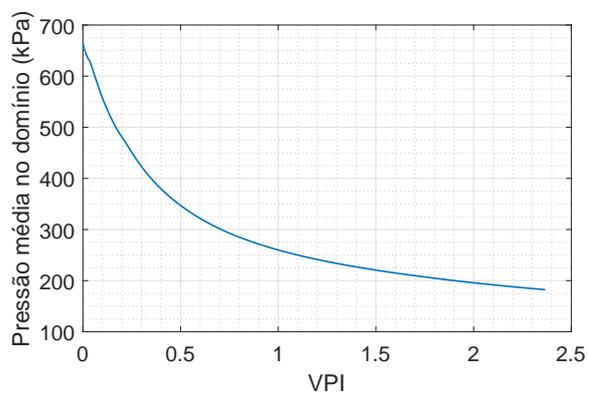
Fonte: do autor

Tabela 5.10: Tempo computacional despendido

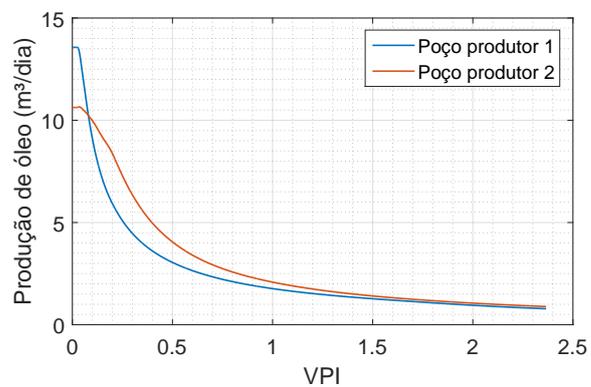
FIM	IMPES	SEQ
16.914,3 s	219.877 s	571.286 s

Fonte: do autor

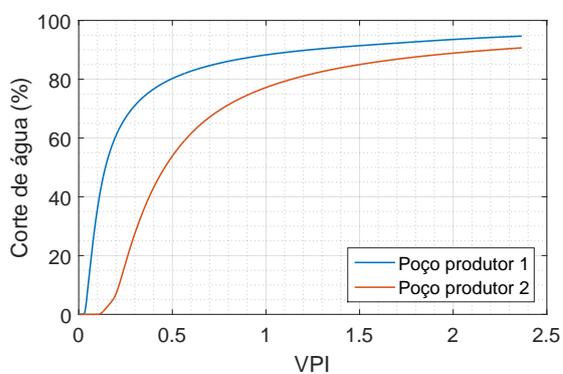
Figura 5.38: Resultados obtidos para o deslocamento tridimensional em malha híbrida com o método totalmente implícito para 10000 dias de simulação



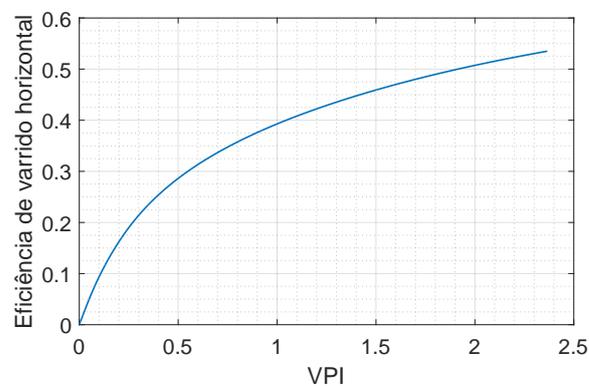
(a) Curva de pressão média



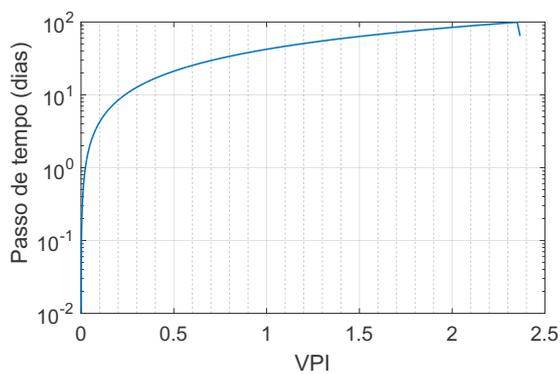
(b) Curva de produção de óleo acumulada



(c) Curva de corte de água



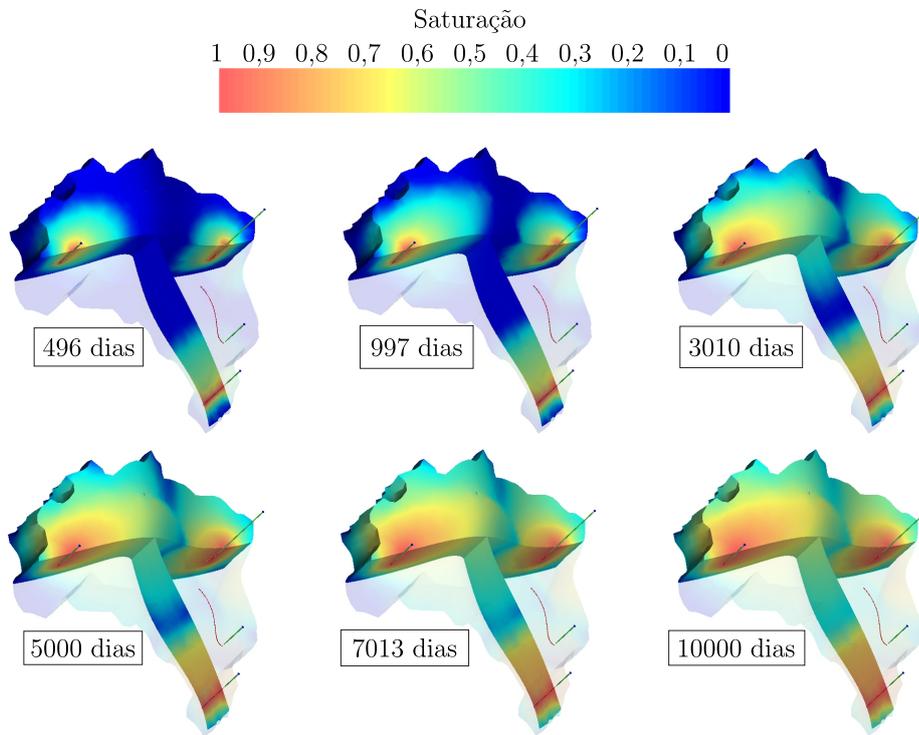
(d) Curva de eficiência de varrido horizontal



(e) Curva de passo de tempo

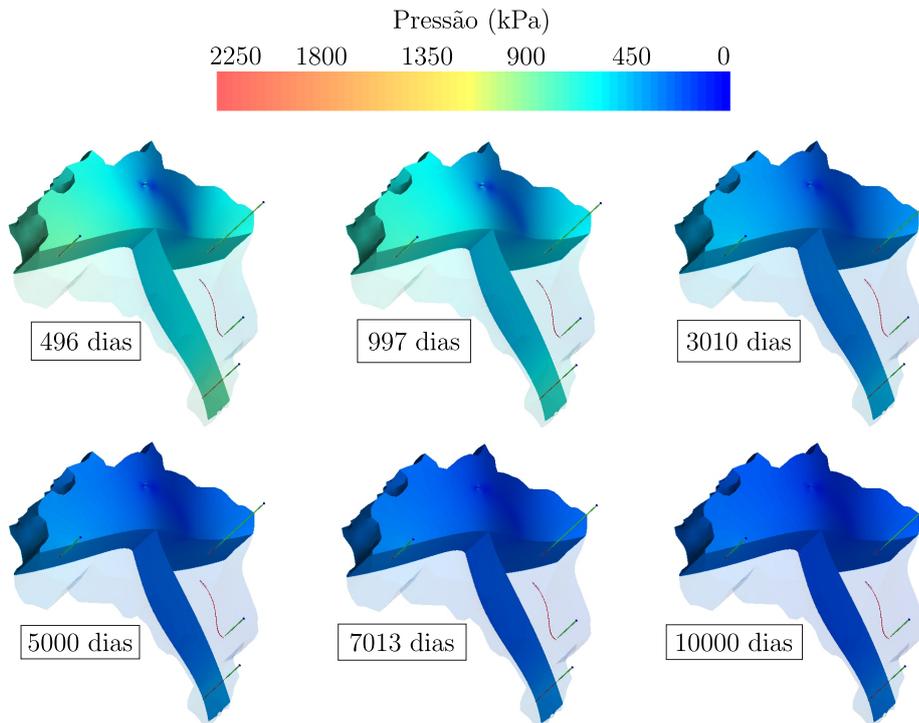
Fonte: do autor

Figura 5.39: Campo de saturação para quatro instantes de tempo



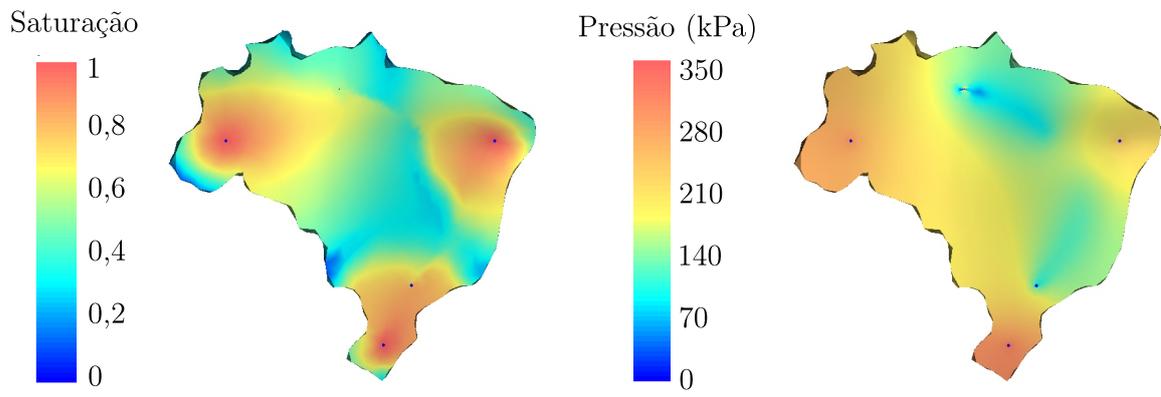
Fonte: do autor

Figura 5.40: Campo de pressão para quatro instantes de tempo



Fonte: do autor

Figura 5.41: Campos finais de pressão e saturação



Fonte: do autor

6 CONCLUSÃO

6.1 SUMÁRIO

Neste trabalho foram expostos o estudo e a implementação de um simulador bifásico, imiscível, isotérmico e incompressível destinado à simulação numérica do deslocamento de fluidos em reservatórios de petróleo. Foram apresentadas e comparadas três formulações distintas – método totalmente implícito, IMPES clássico e sequencial – em termos de estabilidade, acuracidade e tempo computacional. Utilizou-se o método dos volumes finitos baseado em elementos, o qual proporciona uma maior flexibilidade para a representação geométrica de reservatórios. Ainda, foi implementado um esquema de passo de tempo adaptativo a fim de verificar tanto a sensibilidade de cada método em relação a esse esquema quanto a capacidade de reduzir os tempos computacionais despendidos nas simulações.

Os métodos IMPES clássico e sequencial foram adaptados a partir do código desenvolvido em (Grein, 2015) e disponibilizado na EFVLib. Nessas formulações, a pressão é resolvida de forma implícita; a saturação, explícita. A diferença entre ambos é que o método sequencial atualiza os coeficientes do sistema linear da pressão e resolve novamente os campos de pressão e saturação até que a alteração de seus valores seja inferior a uma tolerância especificada.

O método totalmente implícito ou FIM (*Fully implicit method*) foi implementado integralmente. Nessa formulação, as variáveis são resolvidas simultaneamente. Para isso, fez-se necessária a integração de um método capaz de resolver um sistema não-linear de equações à EFVLib. A implementação desse *solver* não-linear na EFVLib consistiu em uma das grandes contribuições deste trabalho. Foi adotado o método de *Newton-Raphson*, o qual foi implementado com o suporte da biblioteca PETSc (Balay *et al.*, 2013). A utilização do método disponível na biblioteca, contudo não foi direta. Foram construídos e informados, manualmente, o vetor resíduo e a matriz jacobiana. O algoritmo de montagem da matriz jacobiana consiste na parte mais custosa e complexa do código computacional. Além disso, o procedimento realizado para calcular corretamente as derivadas numéricas que compõem essa matriz demandou um estudo especial em se tratando do método dos volumes finitos baseado em elementos, o qual se fundamenta em varreduras de elementos da malha computacional.

As três metodologias abordadas foram analisadas por meio de três exemplos de aplicação. O primeiro foi destinado à validação do simulador. Trata-se de um caso de deslocamento unidimensional em uma amostra de rocha no qual é possível calcular uma solução analítica – a solução de *Buckley-Leverett*. O segundo exemplo de aplicação foi o deslocamento bidimensional em configuração *five-spot*, a qual é amplamente empregada em estudos relacionados à simulação numérica de reservatórios de petróleo. Já o último caso analisado foi o deslocamento tridimensional em uma malha híbrida.

6.2 CONCLUSÕES

O primeiro caso avaliado, de deslocamento unidimensional através de um meio poroso, possibilitou a verificação das três metodologias utilizadas. As soluções numéricas apresentaram o comportamento esperado quanto ao refino de malha, *i.e.*, os perfis numéricos de saturação se aproximaram do perfil correspondente à solução analítica à medida que a malha foi refinada. Entretanto, até mesmo na malha mais refinada há considerável presença de difusão numérica, a qual é responsável pela suavização da discontinuidade dos perfis. Quanto à evolução do passo de tempo, inferiu-se que o esquema de passo de tempo adaptativo pode ser responsável por significativa redução do tempo computacional. Além disso, conforme esperado, o passo de tempo deve ser reduzido à medida que a malha é refinada. Verificou-se, também, que sua utilização pode influenciar demasiadamente a qualidade da solução numérica obtida. Quando esse esquema não foi adotado, as soluções determinadas por meio dos três métodos praticamente coincidiram. A solução obtida por meio do método totalmente implícito não foi afetada significativamente quando os critérios de passo de tempo adaptativo foram empregados. O método sequencial, contudo, apresentou sensibilidade ao critério menos rígido. Já o método IMPES apresentou uma solução mais próxima da analítica quando o critério de passo de tempo adaptativo foi aplicado. Isso se deve, possivelmente, a uma condição mais próxima daquela na qual esse método fornece a solução analítica para o caso de *Buckley-Leverett*. Quanto ao tempo computacional despendido em cada simulação, infere-se que o passo de tempo adaptativo é interessante sobretudo ao método totalmente implícito, o qual é capaz de resolver o problema mais rapidamente sob essa condição sem que a solução seja demasiadamente alterada. O método sequencial, muito embora tenha fornecido soluções mais rapidamente que o FIM para alguns casos, apresentou certa sensibilidade em relação ao uso de um passo de tempo adaptativo, de forma que deve-se ter cautela a aplicar essa condição para tal mé-

todo. Já o método IMPES clássico se comportou bem quanto à utilização do passo de tempo adaptativo. Contudo, isso pode ser devido a um caráter particular do problema unidimensional de *Buckley-Leverett*.

O segundo caso analisado, de deslocamento em configuração *quarter five-spot*, foi utilizado a fim de comparar os três métodos quanto ao desempenho e à sensibilidade em relação ao esquema de passo de tempo adaptativo em um problema bidimensional. Quando empregado o esquema de passo de tempo adaptativo, o método IMPES apresentou instabilidades na solução numérica após o instante de *breakthrough*. Essa instabilidade pode ser reduzida substancialmente modificando o IMPES clássico para o método sequencial. Contudo, isso se dá às custas da necessidade um maior tempo de computação. O método totalmente implícito, por sua vez, não apresentou tamanha sensibilidade em relação à esse esquema, provendo soluções consistentes tanto com passo de tempo fixo, quanto variável. Ainda, o tempo computacional despendido por esse método foi aproximadamente dez vezes inferior quando utilizou-se o critério de passo de tempo adaptativo proposto. Além disso, a utilização dessa estratégia permitiu que o método FIM, que demandava o maior custo computacional com passo de tempo fixo, chegasse a um custo menor que aquele despendido pelo método sequencial quando foi utilizado o passo de tempo adaptativo. Ressalta-se ainda que os tempos de simulação correspondentes ao método totalmente implícito com passo de tempo adaptativo ficaram da mesma ordem daqueles correspondentes à utilização da formulação IMPES com passo de tempo fixo e ambos os métodos apresentaram soluções estáveis e consistentes. Portanto, conseguiu-se tirar proveito da robustez do FIM no intuito de utilizar passos de tempo mais elevados e, assim, reduzir o tempo demandado pela simulação numérica.

O terceiro caso analisado, de deslocamento tridimensional em uma malha híbrida, possibilitou a verificação de que, no caso de um problema tridimensional, os métodos IMPES e sequencial são severamente limitados quanto ao máximo passo de tempo que pode ser utilizado, sobretudo em decorrência de um maior grau de refino nas regiões próximas aos poços. À luz dos resultados previamente obtidos, optou-se, nesse caso, por especificar um passo de tempo fixo aos métodos IMPES e sequencial a fim de evitar instabilidades nas soluções numéricas e utilizar o esquema de passo de tempo adaptativo no caso do método totalmente implícito no intuito de reduzir o tempo computacional consumido por essa formulação. Os resultados obtidos praticamente coincidiram para os três métodos. O FIM, contudo, foi capaz de prover as soluções com um custo computacional muito inferior em relação aos outros métodos – apenas 7,69% do tempo despendido pela formulação IMPES e 2,96%, do método sequencial. Certamente, esses resultados podem servir a enco-

rajar futuros desenvolvimentos que utilizem o método totalmente implícito em conjunto com o método dos volumes finitos baseado em elementos.

6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para estudo subsequentes quanto ao tema abordado neste trabalho recomenda-se:

- Estudar esquemas de passo de tempo adaptativo a fim de reduzir a sensibilidade dos métodos IMPES clássico e sequencial à sua utilização;
- Paralelizar o simulador implementado a fim de melhorar seu desempenho quanto ao tempo computacional empregado nas simulações;
- Introduzir um modelo físico mais complexo no simulador;
- Incluir a equação da energia no modelo proposto;
- Acoplar modelos de geomecânica ao modelo proposto;

REFERÊNCIAS

- ARCHER, J. S., WALL, C. G. **Petroleum Engineering – Principles and Practice**. Springer, 1986.
- AZIZ, K. **Reservoir Simulation Grids: Opportunities and Problems**. *Journal of Petroleum Technology*, v. 45, n. 7, pp. 658–663, Julho, 1993.
- AZIZ, K., SETTARI, A. **Petroleum Reservoir Simulation**. Applied Science Publishers, 1979.
- BALAY, S., BUSCHELMAN, K., GROPP, W. D., KAUSHIK, D., KNEPLEY, M. G., MCINNES, L. C., SMITH, B. F., ZHANG, H., 2009. PETSc Web page. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.
- BALAY, S., BROWN, J., BUSCHELMAN, K., GROPP, W. D., KAUSHIK, D., KNEPLEY, M. G., MCINNES, L. C., SMITH, B. F., ZHANG, H. **PETSc (Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation)**. <http://www.mcs.anl.gov/petsc>, 2013.
- BALIGA, B. R., PATANKAR, S. V. A. **A control-volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer**. *Numerical Heat Transfer*, 1983.
- BEJAN, A. **Convection Heat Transfer**, 3^a. John Wiley & Sons, Durham, North Carolina, 2004.
- BUCHWALTER, J. L., MILLER, C. A. **Compositional and Black Oil Reservoir Simulation**. *SPE Rocky Mountain Regional/Low Permeability reservoir symposium*, Abril, 1993.
- CAO, H., AZIZ, K. **Performance of IMPSAT and IMPSAT-AIM models in compositional simulation**. *SPE Annual Technical conference and Exhibition*, Setembro, 2002.
- CHEN, Z. **Reservoir Simulation – Mathematical Techniques in Oil Recovery**. SIAM, 1962.
- CHEN, Z., HUAN, G., MA, Y. **Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media**. Computational Science and Engineering. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 2006.
- CHEN, Z. H., LI, B. **An improved IMPES method for two-phase flow in porous media**. *Transport in Porous Media*, v. 54, pp. 361–376, 2004.
- COATS, K. H. **IMPES stability: selection of stable time steps**. *SPE Reservoir Simulation Symposium*, Fevereiro, 1968.

COATS, K. H. **Reservoir simulation: State of art.** *SPE*, Agosto, 1982.

COATS, K. H., THOMAS, L. K., R.G., P. **A new simplified compositional simulator.** *SPE - Society of Petroleum Engineers*, 1995.

CORDAZZO, J. **Simulação de reservatórios de petróleo utilizando o método EbFVM e Multigrid algébrico.** Master's Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

COREY, A. T., RATHJENS, C. H., HENDERSON, J. H., WYLLIE, M. R. **Three-phase relative permeability.** *SPE - AIME*, 1956.

DA CUNHA, A. R. **Uma metodologia para simulação numérica tridimensional de reservatórios de petróleo utilizando modelo black-oil e formulação em frações mássicas.** Master's Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC, 1996.

DAKE, L. P. **The Practice of Reservoir Engineering**, revised edition. Elsevier, Netherlands, 2001.

DARCY, H. **Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon.** 1856.

DULLIEN, F. A. L. **Porous media. Fluid transport and pore structure.** Academic Press, 1979.

EWING, R. **The Mathematics of Reservoir Simulation.** *SIAM*, 1983.

FARNSTROM, K. L., ERTEKIN, T. **A versatile, fully implicit, black oil simulator with variable bubble-point option.** *SPE California Regional Meeting*, 1987.

GREIN, E. A. **Aplicação da computação paralela na simulação de reservatórios de petróleo.** Master's Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.

HURTADO, F. S. V. **Uma formulação de volumes finitos baseada em elementos para a simulação do deslocamento bifásico imiscível em meios porosos.** Master's Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

HURTADO, F. S. V. **Formulação tridimensional de volumes finitos para simulação de reservatórios de petróleo com malhas não-estruturadas híbridas.** Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2011.

KAVIANY, M. **Principles of Heat Transfer in Porous Media.** Springer, Ann Arbor, Michigan,

1995.

MACDONALD, R. C., COATS, K. H. **Methods for Numerical Simulation of Water and Gas Coning**. *SPE*, n. 10, pp. 425–436, 1970.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. LTC Editora, Rio de Janeiro, RJ, 2004.

MALISKA, C. R., DA SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., RIBEIRO, G. G., JR, A. A. V. B. P., GREIN, E. A., CERBATO, G. **Introdução às malhas poliédricas e ao método baseado na reconstrução explícita do gradiente, Relatório Técnico SINMEC/SiGeR 01**. Technical report 01, SINMEC/EMC/UFSC, Florianópolis, SC, 2012.

MALISKA, C. R., DA SILVA, A. F. C., HURTADO, F. S. V., RIBEIRO, G. G., CERBATO, G. **Desenvolvimento de um esquema para a aproximação dos fluxos na interface entre malhas estruturadas e não estruturadas, Relatório Técnico SINMEC/SiGeR 03**. Technical report 01, SINMEC/EMC/UFSC, Florianópolis, SC, 2015.

MCCAIN JR, W. **The properties of Petroleum Fluids**. PennWell Publishing Company, Tulsa, Oklahoma, 1990.

PEACEMAN, D. W. **Fundamentals of numerical reservoir simulation**. Elsevier Scientific Publishing Company, Houston, Texas, 1977.

PEACEMAN, D. W. **Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation**. *SPE journal*, v. 18, n. 3, pp. 183–194, Junho, 1978.

ROSA, A. J., CARVALHO, R. S., XAVIER, J. A. **Engenharia de reservatórios de petróleo**. Editora Interciência, 2006.

SHELDON, J. W., ZONDEK, B., CARDWELL, W. T. **One Dimensional, Incompressible, Non-capillary, Two-Phase Fluid Flow in a Porous Medium**. *AIME*, v. 216, pp. 290–296, 1959.

STONE, H. L., GARDER, A. O. **Analysis of gas-cap or dissolved-gas reservoir**. *SPE AIME*, v. 222, pp. 94–104, 1961.

THOMAS, J. E. **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. Editora Interciência, Rio de Janeiro, RJ, 2001.

TRANGENSTEIN, J. A., BELL, J. B. **Mathematical Structure Of The Black-Oil Model For Pe-**

roleum Reservoir Simulation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. Vol. 49, pp. 749–783, 1989.

WATTS, J. W. **A compositional formulation of the pressure and saturation equations.** *SPE*, 1985.

YOUNG, L. C., STEPHENSON, E. R. **A generalized compositional approach for reservoir simulation.** *SPEJ*, 1983.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method**, fifth, vol. 1. Butterworth-Heinemann, 2000.

APÊNDICE A – DIFUSÃO NUMÉRICA NO PROBLEMA DE BUCKLEY-LEVERETT

Métodos explícitos requerem que a restrição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) seja satisfeita, ao passo que métodos implícitos são incondicionalmente estáveis (Chen *et al.*, 2006). Esses métodos apresentam não apenas estabilidades diferentes, mas também comportamentos distintos quanto ao custo computacional e à difusão numérica.

No caso específico do problema unidimensional de *Buckley-Leverett*, pode-se elucidar que há uma condição específica em que o método IMPES fornece a solução analítica e que não é possível obtê-la por meio do método totalmente implícito. A equação modelo do problema é

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial X} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Trata-se de uma equação hiperbólica na qual tem-se a propagação unidirecional de uma onda (Chen *et al.*, 2006).

A discretização dessa equação por meio do método dos volumes finitos e do esquema *upwind* para uma malha unidimensional é

$$\frac{S_i - S_i^o}{\Delta \tau} + F'_i \frac{S_i - S_{i-1}}{\Delta X} = 0. \quad (\text{A.2})$$

em que i é o índice do volume de controle da equação e o superíndice o representa uma variável associada ao passo de tempo anterior.

Para o método explícito tem-se

$$S_i - S_i^o + \frac{\Delta \tau F'_i}{\Delta X} (S_i^o - S_{i-1}^o) = 0. \quad (\text{A.3})$$

Identificando o coeficiente que multiplica o termo entre parênteses como o CFL e denotando-o por α , pode-se escrever

$$S_i - (1 - \alpha)S_i^o - \alpha S_{i-1}^o = 0. \quad (\text{A.4})$$

Pode-se observar que a equação (A.4) é numericamente estável para $\alpha \leq 1$. Além disso,

para o caso extremo $\alpha = 1$ tem-se

$$S_i = S_{i-1}^o, \quad (\text{A.5})$$

i.e., a frente de água avança um volume de controle a cada passo de tempo, reproduzindo o comportamento da solução analítica.

Para o método implícito tem-se

$$S_i - S_i^o + \frac{\Delta\tau F'_i}{\Delta X} (S_i - S_{i-1}) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Identificando o coeficiente que multiplica o termo entre parênteses como o CFL e denotando-o por α , pode-se escrever

$$(1 + \alpha)S_i - \alpha S_{i-1} - S_i^o = 0. \quad (\text{A.7})$$

A equação (A.7) é numericamente estável para qualquer α , já que α é necessariamente positivo (Chen *et al.*, 2006). Contudo, não é possível escolher um valor de α tal que a frente de água avance um volume de controle a cada passo de tempo. A frente avança sempre menos que o espaçamento entre os volumes de controle, de forma que há uma suavização da solução obtida pelo método implícito – a difusão numérica.