



CONSIDERAÇÕES SOBRE O USO DA FUNÇÃO DE CALOR
EM PROBLEMAS DE CONVECÇÃO NATURAL EM CAVIDADES

SERGIO POLINA, ANTONIO F.C. DA SILVA e CLOVIS R. MALISKA
Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos
e Transferência de Calor - SINMEC
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC
Cx. Postal 476 - 88049 - Florianópolis - SC



RESUMO

A função de calor, como definida por Kimura e Bejan não envolve, explicitamente, uma temperatura de referência para a avaliação do fluxo convectivo de energia. Como resultado, diferentes campos podem ser obtidos para um mesmo problema físico. Neste trabalho a função de calor é redefinida e escrita para um sistema de coordenadas generalizado. Resultados são apresentados para alguns problemas de convecção natural em cavidades irregulares adotando-se a temperatura da parede fria como temperatura de referência.

INTRODUÇÃO

Em problemas de condução pura é comum a apresentação dos resultados através do traçado das isotermas. Tal procedimento é bastante conveniente pois além de permitir uma rápida visualização do campo de temperaturas, permite inferir as regiões de maior fluxo de calor e a trajetória ou caminho percorrido pela energia já que, para meios isotrópicos, o vetor fluxo de calor é perpendicular às isotermas.

No caso de um fluido em movimento, a transferência de calor se dá através dos processos de condução e convecção. A esse mecanismo combinado dá-se simplesmente o nome de transferência de calor por convecção. Diversas são as técnicas empregadas, neste caso, na visualização das características do escoamento com transferência de calor. A apresentação das linhas de corrente, vetores velocidade e isotermas são as mais comuns e bastante úteis. No entanto, em problemas de convecção, a apresentação de isotermas permite apenas visualizar regiões de maior ou menor fluxo de calor por condução. Nenhuma informação pode ser obtida a respeito do fluxo convectivo de energia. Evidentemente, através da observação simultânea do campo de velocidades (desenho de vetores) e do campo de temperaturas, pode-se tirar algumas conclusões a respeito do fluxo de energia. Por exemplo, se o gradiente de temperatura, a temperatura e a velocidade forem baixas em uma determinada direção, é lógico que o transporte de energia nesse ponto e nessa direção será baixo em relação a outras regiões do escoamento. Com a motivação de reunir estas informações em uma mesma fonte Kimura & Bejan [1] definiram a função de calor que, quando integrada em uma determinada direção quantifica o fluxo total de calor normal a esta direção.

Como trata-se de quantificar o calor transportado pela massa de fluido em movimento, uma adequada temperatura de referência deve ser empregada. Kimura e Bejan [1], implicitamente incluem uma temperatura de referência em função da natureza da adimensionalização empregada. Entretanto se outra adimensionalização das equações for usada, a formulação apresentada pelos mesmos não é geral. Neste trabalho a equação da função de calor é deduzida de forma a contemplar qualquer adimensionalização, portanto, de uma forma geral. Outra contribuição do presente trabalho é a análise relativa ao local de cálculo na malha da função de calor quando coordenadas generalizadas são empregadas. Para finalizar o conceito de função de calor é empregado na análise da convecção natural em diversas cavidades de fronteiras regulares e irregulares.

DEFINIÇÃO DA FUNÇÃO DE CALOR

Nesta seção serão obtidas a equação diferencial

e as condições de contorno para a determinação da função de calor. A título de exemplo será adotado o bem conhecido problema da convecção natural em uma cavidade quadrada, conforme mostra a Fig. 1. O procedimento é bastante semelhante ao da obtenção da função de corrente e já foi previamente apresentado em [1]. No entanto, no referido trabalho, os autores omitem a necessidade do estabelecimento de uma temperatura de referência. Além disso, suas equações assumem que a temperatura da parede mais fria da cavidade é igual a zero, particularizando, portanto, a equação da função de calor. A seguir a equação da função de calor será novamente deduzida de forma mais correta do ponto de vista conceitual.

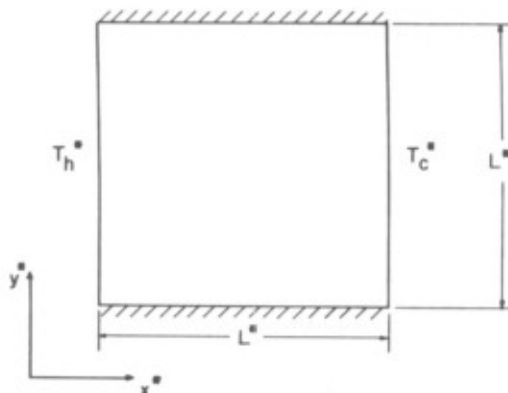


Fig. 1 - Problema adotado como exemplo.

A equação da energia em forma dimensional de um escoamento bidimensional de um fluido com propriedades físicas constantes em regime permanente, pode ser escrita da forma

$$\frac{\partial}{\partial x^*}(\rho c_p u^* T^*) - k \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*}(\rho c_p v^* T^*) - k \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = 0 \quad (1)$$

Define-se a função de calor H^* de forma que $\partial H^* / \partial y^*$ seja o fluxo total de energia na direção x^* e $-\partial H^* / \partial x^*$ seja o fluxo total de energia na direção y^* . No entanto, como a parte convectiva do fluxo depende do valor da temperatura é conveniente arbitrar um nível energético de referência. Será adotado como esse nível o correspondente a uma temperatura de referência T^*_{ref} . Assim

$$\frac{\partial H^*}{\partial y^*} = \rho c_p u^* (T^* - T^*_{ref}) - k \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \quad (2)$$

$$-\frac{\partial H^*}{\partial x^*} = \rho c_p v^*(T^* - T_{ref}^*) - k \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \quad (3)$$

É fácil verificar que $H^*(x^*, y^*)$ satisfaz idênticamente a equação da energia, Eq. (1).

Derivando a Eq. (2) com relação a x^* e a Eq. (3) com relação a y^* e subtraindo a segunda da primeira obtêm-se que

$$\frac{\partial^2 H^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 H^*}{\partial y^{*2}} = \frac{\partial}{\partial y^*} [\rho c_p u^*(T^* - T_{ref}^*)] - \frac{\partial}{\partial x^*} [\rho c_p v^*(T^* - T_{ref}^*)] \quad (4)$$

Definindo-se as variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} x &= x^*/L^* & ; & & y &= y^*/L^* \\ u &= u^*L^*/\alpha\sqrt{Ra/Pr} & ; & & v &= v^*L^*/\alpha\sqrt{Ra/Pr} \\ T &= (T^* - T_{ref}^*)/(T_h^* - T_{ref}^*) \\ H &= H^*/[k(T_h^* - T_{ref}^*)] \end{aligned} \quad (5)$$

a Eq. (4) resulta em

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \sqrt{Ra/Pr} \left[\frac{\partial}{\partial y} (uT) - \frac{\partial}{\partial x} (vT) \right] \quad (6)$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA H

Integrando-se a expressão para $\partial H^*/\partial y^*$ de $y^*=0$ a um valor genérico y^* ao longo de $x^*=0$ obtêm-se

$$H^*(0, y^*) - H^*(0, 0) = \int_0^{y^*} -k \frac{\partial T^*}{\partial x^*} \Big|_{0, y^*} dy^* \quad (7)$$

pois na parede $u^*(x^*, y^*)$ é nulo. Atribuindo valor zero ao valor da função H^* ao longo da face inferior, isto é,

$$H^*(x^*, 0) = 0 \quad (8)$$

obtêm-se da Eq. (7), após a adimensionalização, que

$$H(0, y) = \int_0^y - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{0, y} dy \quad (9)$$

Analogamente, na face direita

$$H(1, y) = \int_0^y - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{1, y} dy \quad (10)$$

Na face superior H é constante pois a fronteira é impermeável e isolada, e o seu valor pode ser calculado através das Eqs. (9) e (10) fazendo a integral até $y=1$. Assim,

$$H(x, 1) = \int_0^1 - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{0, y} dy \quad (11)$$

A equação diferencial dada pela Eq. (6) e as condições de contorno Eqs. (8) - (11) completam a formulação do problema.

EQUAÇÃO TRANSFORMADA

Para a avaliação do lado direito da Eq. (6) é necessário que os campos de u , v , T já estejam definidos. Para cavidades com geometria complexa é conveniente que a solução numérica das equações para as variáveis acima seja obtida através de uma discretização não ortogonal com linhas coordenadas que se ajustam as

fronteiras da cavidade. Portanto os valores de u , v , e T são conhecidos em pontos discretos da malha. Por questões de precisão e facilidade na obtenção das velocidades que formam o termo fonte de H , é conveniente empregar na solução de H a mesma malha empregada na solução de u , v e T . A metodologia numérica empregada é baseada em [2]. Assim, através da transformação

$$\xi = \xi(x, y) \quad ; \quad \eta = \eta(x, y) \quad (12)$$

a Eq. (6), resultará, no sistema coordenado ξ, η em

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 \frac{\partial H}{\partial \xi} + C_2 \frac{\partial H}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 \frac{\partial H}{\partial \eta} + C_2 \frac{\partial H}{\partial \xi}) = \frac{\bar{S}H}{J} \quad (13)$$

onde

$$\frac{\bar{S}H}{J} = \sqrt{Ra/Pr} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (C_4 UT - C_2 VT) - \frac{\partial}{\partial \xi} (C_1 VT - C_2 UT) \right] \quad (14)$$

$$U = y_\eta u - x_\eta v \quad ; \quad V = x_\xi v - y_\xi u$$

Os coeficientes C_1 , C_2 e C_4 , as métricas e o jacobiano da transformação são dados por

$$\begin{aligned} C_1 &= J\alpha & C_2 &= -J\beta & C_4 &= J\gamma \\ \alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2 & \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 & J &= 1 / (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \end{aligned} \quad (15)$$

A Eq. (13) é discretizada através do esquema de diferenças centrais e a solução do sistema linear é obtida pelo método MSI [3].

LOCALIZAÇÃO DE H NA MALHA

No esquema numérico utilizado as variáveis u , v e T são armazenadas conforme mostra a Fig. 2. Uma decisão precisa deve ser tomada com relação a localização da variável H na malha. A primeira vista parece conveniente armazenar H na mesma posição que T , isto é, no centro dos volumes de controle aos quais é aplicado o princípio da conservação da massa como mostra a Fig 2a. No entanto, como será demonstrado a seguir, essa escolha não é a mais adequada. Admita por hipótese que a malha seja cartesiana igualmente espaçada. A avaliação do termo fonte para H (lado direito da Eq. (6)) envolve a derivadas $\partial(vT)/\partial x$ e $\partial(uT)/\partial y$. A avaliação da primeira derivada seria efetuada através da expressão

$$(v_e T_e - v_w T_w) / \Delta x \quad (16)$$

onde as temperaturas nas faces leste e oeste do volume de controle seriam obtidas através da média aritmética das temperaturas dos pontos vizinhos. Ocorre que as velocidades v nas faces leste e oeste não participam diretamente da conservação da massa e tem seu valor definido em função da média das velocidades v vizinhas. A mesma conclusão é válida para as velocidades u nas faces norte e sul. Esse excessivo

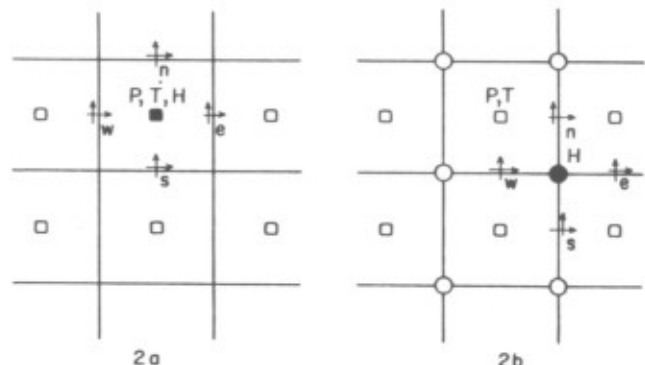


Fig. 2 - Armazenamento da variável H na malha.

processo de médias deteriora os resultados (na realidade esse esquema de armazenamento chegou a ser empregado pelos autores). Embora esse defeito não seja evidente para malhas não ortogonais, não é interessante a adoção de um esquema de armazenamento que não produza bons resultados para o caso particular da discretização cartesiana.

Já para H armazenado nos vértices dos volumes de controle da continuidade, conforme Fig. 2b, esse processo de média de velocidades desaparece completamente. Além disso, este esquema de armazenamento torna muito mais fácil a aplicação das condições de contorno de H. A avaliação das temperaturas nas interfaces envolve um processo de média semelhante ao exigido pelo outro esquema de armazenamento.

RESULTADOS

Para demonstrar a aplicação da função de calor apresenta-se a seguir alguns resultados para problemas de convecção natural em cavidades retangulares, hexagonais [4] e triangulares [5]. Em todos os casos a temperatura de referência adotada foi a temperatura da parede fria. Esta escolha será justificada posteriormente.

Apresenta-se inicialmente a aplicação da função de calor a um problema condutivo em uma cavidade hexagonal, que tem como condições de contorno as fronteiras horizontais isoladas e as fronteiras inclinadas sendo uma aquecida e outra resfriada. O caminho percorrido pela energia no interior do domínio está representado pelas linhas de calor na Fig. 3. Para enfatizar a perpendicularidade entre as isotermas e o fluxo de calor apresenta-se na Fig. 4 as isotermas deste problema.

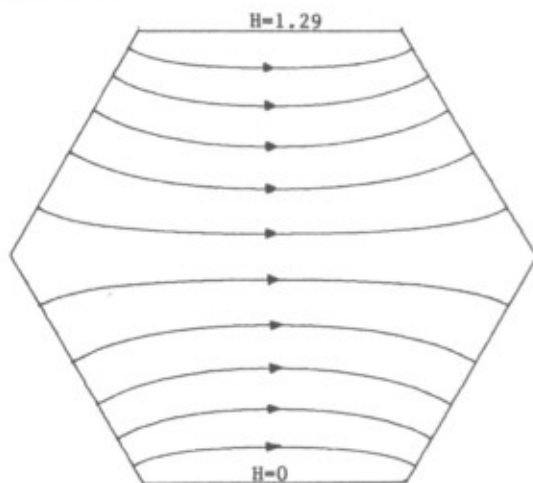


Fig. 3 - Linhas de calor do hexágono $\theta = 120^\circ - Ra=0$.

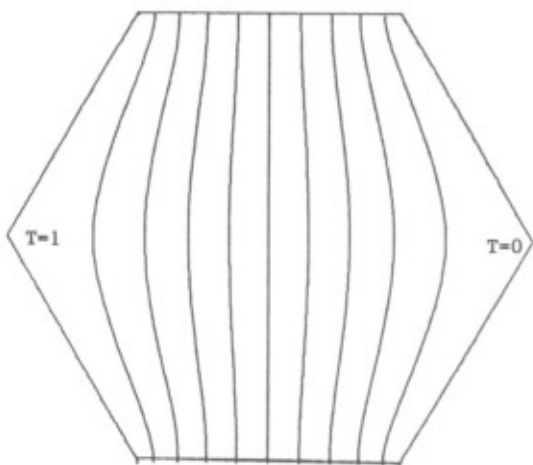
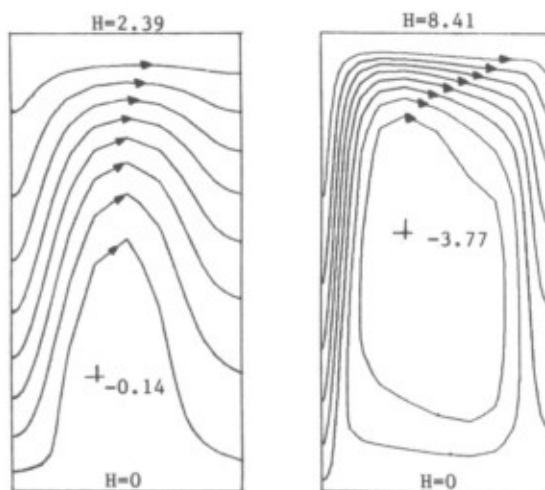


Fig. 4 - Isoterma do hexágono $\theta = 120^\circ - Ra=0$.

Passando-se para problemas convectivos temos nas Figs. 5a e 5b as linhas de calor apresentadas para uma geometria retangular com $Ra=10^3$ e $Ra=10^5$, respectivamente, onde pode-se verificar o caminho percorrido pelo fluxo de calor da fronteira esquerda para a direita. A concentração das linhas de calor perto da parede superior no caso de $Ra=10^5$, permitem visualizar a interferência do campo de velocidade no caminho de transferência da energia. Observa-se que nas fronteiras de troca de calor pode-se também, pela concentração das linhas que partem da parede, detectar as regiões da parede mais efetivas na troca térmica. Estes locais tem, obviamente, os maiores coeficientes de transferência de calor por convecção.



(a) $Ra=10^3$ (b) $Ra=10^5$
Fig. 5 - Linhas de Calor da cavidade retangular.

Apresentam-se, a seguir, nas Figs. 6 e 7, alguns resultados para cavidades hexagonais, onde as condições de contorno são de fronteiras horizontais isoladas e as inclinadas isotérmicas.

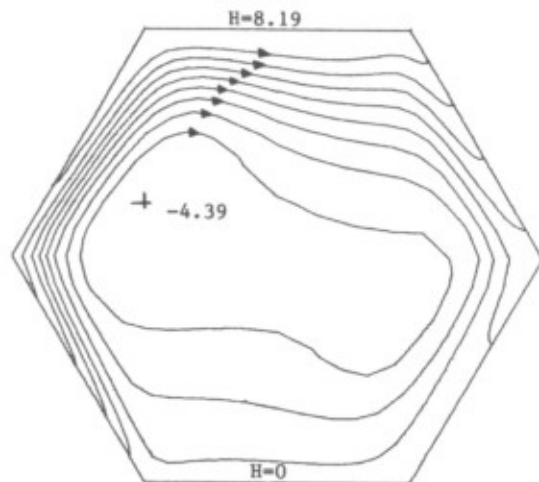


Fig. 6 - Linhas de Calor do hexágono $\theta = 120^\circ Ra=10^5$.

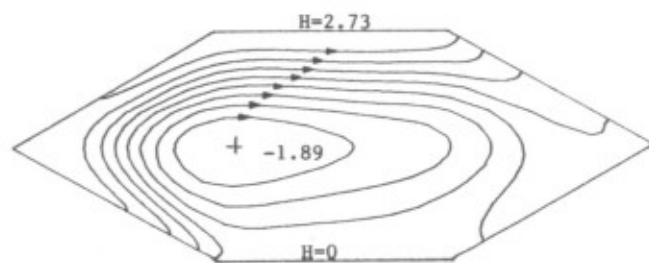


Fig. 7 - Linhas de Calor do hexágono $\theta = 60^\circ Ra=10^4$.

Na Fig. 7 observa-se que uma grande área junto ao vértice troca a mesma quantidade de calor que a pequena área junto a base esquerda. Isto é devido a existência de recirculações nos vértices que dificultam a troca de calor. Esta recirculação pode ser vista na Fig. 8.

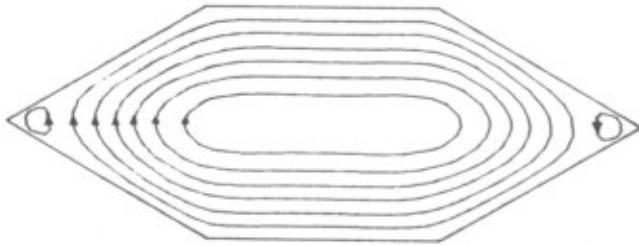


Fig. 8 - Linhas de Corrente do hexágono $\theta = 60^\circ$ $Ra = 10^4$.

A seguir, na Fig. 9 apresentam-se as linhas de calor para uma cavidade triangular onde a base é isolada, a fronteira esquerda aquecida e a direita resfriada, as temperaturas prescritas na região do topo se aproximam pela direita e pela esquerda assintoticamente da temperatura média.

Os exemplos apresentados servem para demonstrar que o caso da função de calor em coordenadas generalizadas é uma ferramenta auxiliar importante na visualização do fenômeno de convecção, principalmente para cavidades irregulares. A seguir comentários são tecidos sobre a escolha da temperatura de referência.

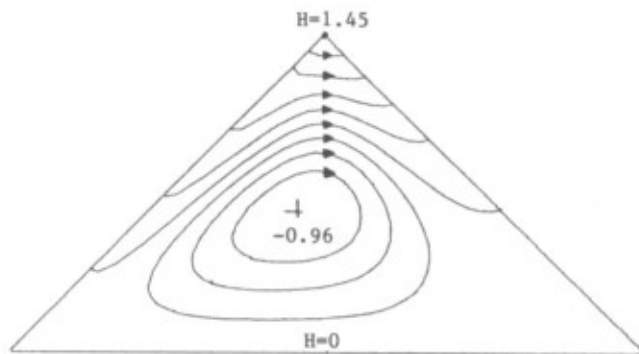


Fig. 9 - Linhas de Calor da cavidades triangular isósceles, $Ra = 10^4$.

ESCOLHA DA TEMPERATURA DE REFERÊNCIA

No cálculo das linhas de calor acima apresentadas foi assumida como temperatura de referência a temperatura da parede fria. Os padrões apresentados seriam distintos caso outra referência fosse adotada e possivelmente a interpretação dos resultados seria diferente. No entanto, no entendimento dos autores, a temperatura de referência que permite a correta interpretação do mecanismo de transporte de energia no escoamento é a temperatura da parede fria. A adoção de uma temperatura de referência superior a da parede fria implicará no transporte convectivo de energia negativa nas regiões de temperatura mais baixa da cavidade. Já a adoção de uma temperatura de referência inferior a da parede fria implica em transporte de energia no interior da cavidade mesmo que a temperatura da parede quente seja reduzida até o valor da temperatura da parede fria quando o problema de transferência de calor deixaria de existir e nada mais haveria a visualizar. Apesar da definição da função de calor apresentada por Kimura & Bejan sequer citar a existência de qualquer nível de referência, a mesma referência está implicitamente aplicada no caso particular da adimensionalização empregada, pois seus resultados são compatíveis com os apresentados do presente trabalho considerando $T_{ref}^* = T_c^*$.

CONCLUSÕES

As linhas de calor se apresentam como uma maneira rápida de visualização do fluxo de calor em um problema convectivo, fornecendo informações das regiões que mais efetivamente contribuem para a troca de calor, bem como melhorar a compreensão global do fenômeno físico. O uso de linhas de calor até aqui tem sido muito pouco difundido e, no ponto de vista dos autores, a utilização de mais este recurso para visualização de problemas convectivos e condutivos em meios anisotrópicos deve ser explorado. O custo adicional para isto é apenas a solução de mais uma equação do tipo Poisson.

A extensão desta ferramenta para uso em problemas de fronteiras irregulares bem como a redefinição da função de calor empregando uma temperatura com referencial da energia convectiva, foram temas abordados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Kimura, S. and Bejan, A., The "Heatline" Visualization of Convective Heat Transfer, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 105, pp. 916-919, Novembro 1983.
- [2] Maliska, C.R. and Raithby, G.D., A Method for Computing Three-Dimensional Flows Using Nonorthogonal Boundary-fitted Coordinates, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 4, pp. 519-537, 1984.
- [3] Schneider, G.E. and Zedan, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems, *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 1-19, 1981.
- [4] Polina, S., Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., Previsão Numérica da Convecção Natural em Cavidades Hexagonais, *Anais do I Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, pp. 55-58, Rio de Janeiro, RJ, Dezembro 1986.
- [5] Polina, S., Jucá, P.C.S., Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., Convecção Natural em Cavidades Triangulares: Tratamento da Condição de Contorno Singular, *Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, pp. 73-76, Florianópolis, SC, Dezembro 1987.

ABSTRACT

The heatline, as defined by Kimura & Bejan does not involve, explicitly, a reference temperature for the energy converted by the flow. As a result different flow patterns may be obtained for the same physical problem. In this paper the heat function is re-defined and the temperature of the cold wall, in natural convection flow problem inside cavities, is used as reference temperature. The heat function, as defined here, is also written in a generalized coordinate system and is employed to visualize the heat flow in some natural convection problems inside irregular cavities.

UMA FORMULAÇÃO SEGREGADA EM VOLUMES FINITOS PARA ESCOAMENTOS COMPRESSÍVEIS E/OU INCOMPRESSÍVEIS EM COORDENADAS GENERALIZADAS



Antonio Fábio Carvalho da Silva
Clovis Raimundo Maliska

Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC
Cx. Postal 476 - 88049 - Florianópolis - SC

RESUMO

As equações diferenciais governantes do escoamento viscoso expressas em um sistema de coordenadas generalizado são discretizadas pelo método dos volumes finitos e resolvidas de forma segregada. O cálculo da densidade pela equação de estado e o tratamento das não linearidades na equação da continuidade tornam o método aplicável para escoamentos compressíveis e/ou incompressíveis. As equações resultantes permitem a solução de escoamentos bidimensionais planos ou axissimétricos. Resultados são apresentados para escoamento sobre cilindros e sobre o veículo espacial Scout.

INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos desenvolvidos para a solução de problemas de mecânica dos fluidos podem ser grosseiramente divididos entre os destinados a escoamentos compressíveis e os destinados a escoamentos incompressíveis. Poucos trabalhos são encontrados na literatura em que são apresentados métodos numéricos que buscam abranger os diversos regimes de escoamento. Esta constatação desperta o interesse nessa área haja vista que é comum a ocorrência em um mesmo escoamento de regiões supersônicas e regiões de escoamento baixo-subsonico.

Os métodos desenvolvidos para escoamentos compressíveis seguem, via de regra, um procedimento básico que é a solução das equações que modelam os princípios de conservação da massa, quantidade de movimento e energia de forma simultânea, isto é, um mesmo sistema de equações algébricas engloba todas as variáveis dependentes. Sempre que é necessário o valor da pressão, esta é calculada a partir de uma equação de estado. A esta característica é creditada a falha das formulações para baixos números de Mach. O texto de Anderson et al [1] reúne as principais características dessa metodologia.

Como em escoamentos incompressíveis (convecção natural incluída) a pressão não pode ser calculada pela equação de estado surge o bem conhecido problema do acoplamento pressão-velocidade. Neste tipo de formulação a equação da continuidade funciona como uma equação de restrição que é satisfeita iterativamente. O campo de pressões estará correto quando gerar velocidades, através das equações de conservação da quantidade de movimento, que satisfaçam a conservação da massa. Diversos métodos são conhecidos [2] para transformar erros na conservação da massa nos volumes de controle elementares em correções no campo de pressões. Além disso, cada variável dependente é calculada isoladamente e iterações são realizadas para atualização dos coeficientes. Por esse motivo esses métodos são conhecidos como métodos segregados, cujos fundamentos podem ser vistos em [3].

Recentemente, Van Doormaal [4] estendeu a capacidade dos métodos segregados para a solução de escoamentos compressíveis. Essa generalização foi conseguida através do novo tratamento dado a linearização da equação da continuidade. Silva e Maliska [5] reproduziram os resultados de Van Doormaal [4] e aplicaram a metodologia ao caso limite incompressível.

O presente trabalho é uma sequência natural do anterior dos mesmos autores [5] cujo objetivo é, entre outros, a extensão da metodologia para discretização não ortogonal possibilitando o uso de sistemas de coordenadas que se ajustam às fronteiras (normalmente

irregulares) da região de solução.

A formulação a ser apresentada possui diversos aspectos inovadores em relação às existentes, a saber: a) apenas um conjunto u, v, U e V de componentes do vetor velocidade são armazenadas para cada ponto de pressão; b) não há superposição de volumes de controle para uma mesma equação de conservação e c) possibilita através da alteração de um único parâmetro transformar um problema bidimensional plano em um problema axissimétrico. Embora este último recurso seja comum em discretizações ortogonais, não é de conhecimento dos autores que o mesmo tenha já sido implementado em coordenadas generalizadas.

Outros aspectos que merecem atenção são a manutenção das componentes u e v como variáveis dependentes (e não as contravariantes U e V) e o fato de, para malhas cartesianas ou cilíndricas, a formulação recuperar, exatamente, as características de uma metodologia ortogonal.

EQUAÇÕES GOVERNANTES

A equação de conservação de um escalar genérico ϕ em um escoamento laminar bidimensional com k, μ e c_p constantes, forças de campo e dissipação viscosa desprezíveis, pode ser representada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\rho u \phi) + \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} (\rho x_2^j v \phi) = \Gamma \phi \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \Gamma \phi \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_2^j \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) - P \phi + S \phi \quad (1)$$

onde os valores que $\phi, \Gamma \phi, S \phi$ e $P \phi$ assumem para as diversas equações de conservação são os da Tab.1. Na Eq.(1) se $x_1 = x, x_2 = y$ e $j = 0$ obtém-se a forma

Tabela 1. Valores assumidos por $\phi, \Gamma \phi, S \phi$ e $P \phi$ para as diversas equações de conservação.

| ϕ | $\Gamma \phi$ | $P \phi$ | $S \phi$ |
|--------|---------------|-----------------------------------|--|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| u | μ | $\frac{\partial P}{\partial x_1}$ | $\frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_1} (v \cdot \vec{V})$ |
| v | μ | $\frac{\partial P}{\partial x_2}$ | $\frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_2} (v \cdot \vec{V}) - j \mu v / x_2^2$ |
| T | k/c_p | 0 | $\left[\frac{\partial P}{\partial t} + v \cdot (\rho \vec{V}) - \rho v \cdot \vec{V} \right] / c_p$ |

cartesiana. Se $x_1 = z$, $x_2 = r$ e $j = 1$ a forma cilíndrica é recuperada. As velocidades u e v são as componentes do vetor velocidade nas direções x_1 e x_2 respectivamente.

A Eq.(1) para $\phi = 1$, u , v e T mais uma equação de estado do tipo

$$\rho = \rho(P, T) \quad (2)$$

formam um sistema de cinco equações e cinco incógnitas que, submetidas às condições de contorno e inicial completam a formulação do problema.

EQUAÇÕES GOVERNANTES TRANSFORMADAS

A Eq.(1), escrita para um sistema de coordenadas ortogonal, transformada para um sistema curvilíneo generalizado $\xi - \eta$ resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{1}{x_1^j} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho x_2^j U \phi) + \frac{1}{x_2^j} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho x_1^j V \phi) = \\ & + \frac{1}{x_1^j} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} [x_2^j (\Gamma^\phi J \alpha)] \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + x_2^j (-\Gamma^\phi J \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \\ & + \frac{1}{x_2^j} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} [x_1^j (\Gamma^\phi J \gamma)] \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + x_1^j (-\Gamma^\phi J \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) - \bar{P}^\phi + \bar{S}^\phi \end{aligned} \quad (3)$$

onde

$$\begin{aligned} U &= u(x_2)_\eta - v(x_1)_\eta & V &= v(x_1)_\xi - u(x_2)_\xi \\ \alpha &= (x_1)_\eta^2 + (x_2)_\eta^2 & \beta &= (x_1)_\xi (x_1)_\eta + (x_2)_\xi (x_2)_\eta \\ \gamma &= (x_1)_\xi^2 + (x_2)_\xi^2 & J &= [(x_1)_\xi (x_2)_\eta - (x_1)_\eta (x_2)_\xi]^{-1} \end{aligned}$$

e as expressões de \bar{P}^ϕ e \bar{S}^ϕ são dadas na Tab. 2.

Tabela 2. Expressões para \bar{P}^ϕ e \bar{S}^ϕ .

| ϕ | \bar{P}^ϕ | \bar{S}^ϕ |
|--------|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| u | $\frac{\partial P}{\partial \xi} (x_2)_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} (x_2)_\xi$ | $\frac{\mu}{3} [(x_2)_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{V}) - (x_2)_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{V})]$ |
| v | $\frac{\partial P}{\partial \eta} (x_1)_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} (x_1)_\eta$ | $\frac{\mu}{3} [(x_1)_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{V}) - (x_1)_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{V})] - \frac{j \mu v}{J x_2^j}$ |
| T | 0 | $[\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot (P \vec{V}) - P \nabla \cdot \vec{V}] / (J c_p)$ |

DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

As equações discretizadas são obtidas através da integração aproximada da Eq.(3) sobre volumes de controle elementares e do instante t a $(t+\Delta t)$. Por exemplo, a integração do segundo termo do lado esquerdo da Eq.(3) resultará em

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left(\frac{1}{x_1^j} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho x_2^j U \phi) \right) x_2^j d\eta d\xi dt = [(\dot{M}\phi)_e - (\dot{M}\phi)_w] \Delta t \quad (4)$$

onde \dot{M} é o fluxo de massa na face do volume de controle indicada pelo subscrito.

A Eq.(4) antecipa que as equações algébricas resultantes, tanto para problemas bidimensionais planos como para problemas axissimétricos, terão exatamente a mesma forma.

O procedimento descrito acima resultará, para $\phi = 1$, em

$$(M_p - M_p^0) / \Delta t + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (5)$$

onde o superescrito "0" se refere ao tempo anterior. Esta equação será alvo de discussão posterior.

Para ϕ igual a u , v ou T a Eq.(4) resultará em

$$a_{P\phi} \phi_P = \int a_{nb} \phi_{nb} + (M_P \phi_P)^0 / \Delta t - L[\bar{P}^\phi] \Delta \xi \Delta \eta + L[\bar{S}^\phi] \Delta \xi \Delta \eta \quad (6)$$

onde a notação $L[]$ representa a aproximação numérica do termo no interior dos colchetes.

A Eq.(6) permite que, para um conjunto de coeficientes e um dado campo de pressões, sejam calculados novos campos de u e v que satisfaçam as equações da conservação da quantidade de movimento nas direções x_1 e x_2 .

EQUAÇÃO DA CONSERVAÇÃO DA MASSA

Para que a presente formulação tenha capacidade de resolver problemas compressíveis e/ou incompressíveis é necessário que não só as velocidades como também as densidades sejam afetadas pelo campo de pressões no ciclo iterativo referente ao acoplamento pressão-velocidade. Tem-se portanto na realidade o acoplamento pressão-velocidade e o acoplamento pressão densidade.

Assim, o termo \dot{M}_e da Eq.(5) será aproximado por [4]

$$\dot{M}_e = (\rho^* x_1^j U + \rho x_2^j U^* - \rho^* x_2^j U^*) \Delta \eta \quad (7)$$

onde os valores com asterisco são assumidos conhecidos de um nível iterativo anterior.

Deve-se portanto relacionar os valores de ρ e U na Eq.(7) com correções no campo de pressões. Dessa forma a equação da continuidade se transforma em uma equação para P^+ .

Expressão de ρ em função de P^+ . Seja ρ^* o campo correspondente a um campo de pressões P^* (para um dado campo de temperaturas), isto é,

$$\rho^* = C^0 P^* + b^0 \quad (8)$$

Admita também que o campo P seja o campo que origina velocidades e densidades de forma a satisfazer a continuidade. O campo de densidades gerado será

$$\rho = C^0 P + b^0 \quad (9)$$

Das Eqs.(8) e (9) obtém-se que

$$\rho = \rho^* + C^0 P^+ \quad (10)$$

onde

$$P^+ = P - P^* \quad (11)$$

A Eq.(10) permite, conhecido um campo P^+ , calcular, a partir de um campo estimado ρ^* , um campo de densidades ρ que satisfará a continuidade.

Expressão de U e V em função de P^+ . Na formulação proposta no presente trabalho as variáveis armazenadas são as expostas na Fig.1. A conservação da quantidade de movimento nas direções x_1 e x_2 é aplicada apenas nos volumes centrados em u e v respectivamente. Dessa forma, não existe aqui qualquer superposição de volumes (para o mesmo princípio de conservação) comum a muitas metodologias não ortogonais.

A equação de conservação da quantidade de movimento na direção x_1 , Eq.(6) para $\phi = u$, pode ser expressa na forma

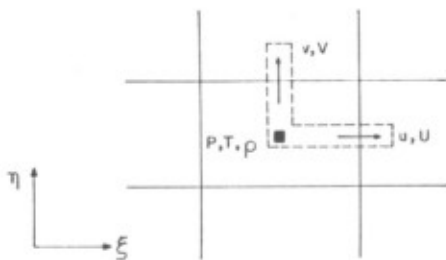


Figura 1. Arranjo das variáveis na malha.

$$a_p^u u_p = \sum a_{nb}^u u_{nb} + b^u - L[\bar{P}^u] \Delta \xi \Delta \eta \quad (12)$$

Se u^* é um campo de velocidades gerado pelo campo P^* , o campo u , gerado por P , que satisfaz a continuidade, pode ser aproximado por [6]

$$u_p = u_p^* - \frac{d u_p}{d P} L[\bar{P}^u] \Delta \xi \quad (13)$$

Para uma componente v hipotética armazenada coincidentemente com u pode-se escrever que

$$v_p = v_p^* - \frac{d v_p}{d P} L[\bar{P}^v] \Delta \xi \quad (14)$$

Multiplicando-se a Eq.(13) por $(x_2)_\eta$ e a Eq.(14) por $(x_1)_\eta$, subtraindo a segunda da primeira e da definição de U chega-se a

$$U_p = u_p^* - \frac{d u_p}{d P} \{ \alpha (P_E^* - P_P^*) - \beta (P_N^* + P_{NE}^* - P_S^* - P_{SE}^*) \} \Delta \xi / (4 \Delta \eta) \quad (15)$$

Note que U_p é a velocidade localizada na face este do volume de controle da continuidade, Fig.1, e é portanto a velocidade desejada na Eq.(7). Expressões semelhantes à Eq. (15) podem ser obtidas para as velocidades contravariantes nas outras faces do volume de controle.

Se expressões análogas a Eq.(7) são substituídas na equação da continuidade, Eq.(5), é obtido um sistema de equações, com nove diagonais não nulas, do tipo

$$a_p^{P'} P'_p = \sum a_{nb}^{P'} P'_{nb} + b^{P'} \quad (16)$$

O campo P' aplicado em expressões do tipo de (15) e (10) gera novos campos de velocidades e densidades que conservam a massa.

PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

O procedimento completo de solução envolve diversos ciclos iterativos, desde o mais externo, referente ao avanço no tempo, ao mais interno, referente a solução do problema do acoplamento pressão-velocidade-densidade. Como na maioria das situações esses ciclos internos são executados apenas uma vez, o procedimento de solução pode ser resumido nos seguintes passos:

- É gerada a malha e calculadas as métricas e componentes do tensor métrico;
- Conhecidos no instante t os valores de todas as variáveis dependentes são calculadas as velocidades U e V nas posições mostradas na Fig.1. Este cálculo envolve um processo de média.
- São calculados os coeficientes e termos-fonte das equações de conservação da quantidade de movimento e determinados novos campos u^* e v^* . São calculadas as velocidades U^* e V^* que não conservam a massa.
- São calculados os coeficientes e termos-fonte da equação da continuidade e determinado um campo P' . Com o campo P' novos campos de u ,

U e V que conservam a massa são calculados. Conhecidos U e V as velocidades u e v podem ser determinadas.

- É resolvida a equação da energia, determinado um novo campo de temperaturas. Com P e T , é calculado um novo campo de densidades através da equação de estado.
- A solução obtida até o momento passa a ser um campo inicial. Retorna-se ao item b) e itera-se até que o regime permanente seja atingido.

Para a solução dos sistemas de equações envolvidos no cálculo de u , v , P e T foi empregado o método MSI [7]. Para interrupção do processo iterativo foi aplicado um critério de convergência na pressão. No tratamento do acoplamento pressão-velocidade foi adotado o método SIMPLEX [2].

RESULTADOS

Para teste da metodologia foi construído um programa em FORTRAN, em precisão simples, e executado em uma máquina IBM 4341. O programa foi empregado na solução do escoamento contra cilindros infinitos e sobre esferas para números de Mach variando de 2.0 a 10.0. Foi resolvido também o escoamento de ar com Mach igual a 2.16, sem ângulo de ataque (axissimétrico portanto) sobre o veículo Scout.

Não se teve em todos os casos a preocupação de realmente obter a solução do problema o que implicaria em um grande refino na malha para a captação adequada da camada limite e também na região de choques, o que seria incompatível com as facilidades computacionais disponíveis. Dessa forma os choques e expansões aparecerão atenuados em uma região não tão estreita e a parte difusiva dos coeficientes é quase que anulada em relação a parte convectiva devido às dimensões da malha.

A Fig. 2 mostra linhas de Mach constante e vetores velocidade para o escoamento de ar contra um cilindro com M_∞ igual a 4.0. Na obtenção dessa solução os coeficientes de difusão foram feitos iguais a zero e a condição de contorno na superfície do corpo foi de impermeabilidade. Dessa forma, na verdade foram resolvidas as equações de Euler. Percebe-se que o choque está atenuado ao longo de uma certa espessura, o que é inevitável em técnicas numéricas que não tratam o choque como uma descontinuidade, isto é, nenhum tipo de relação termodinâmica é usada para o cálculo do salto das variáveis no choque. Evidentemente essa atenuação poderia ser minimizada com o uso de malhas adaptativas ou mesmo com o simples

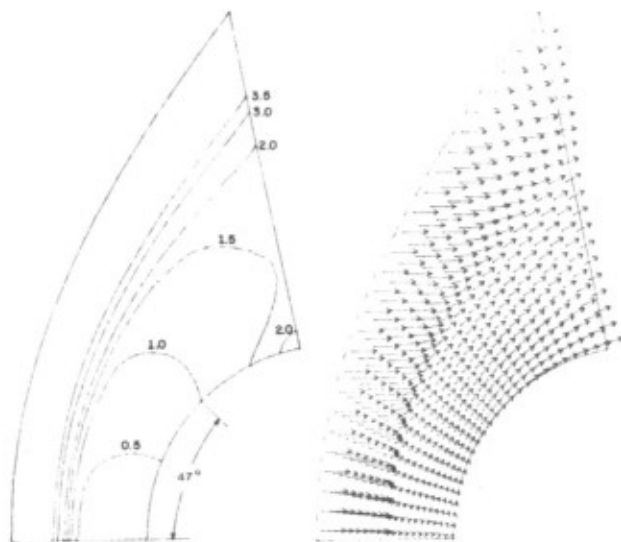


Figura 2. Linhas de Mach constante e vetores velocidade para $M_\infty = 4.0$.

refino da malha. A mesma figura mostra que a linha sônica encontra a superfície do cilindro em um ângulo de 47° . A fig. 6-6 de [8] mostra para essa situação também um ângulo de 47° embora o restante da linha sônica não apresente tão boa concordância.

A Fig. 3 mostra uma malha gerada sobre parte do veículo Scout. Na realidade, a malha adotada na solução teve os primeiros volumes próximos a superfície do corpo subdivididos em volumes menores. O programa foi executado para $M_\infty = 2.16$ e condições ambientes idênticas às do ensaio em túnel de vento descrito em [9].

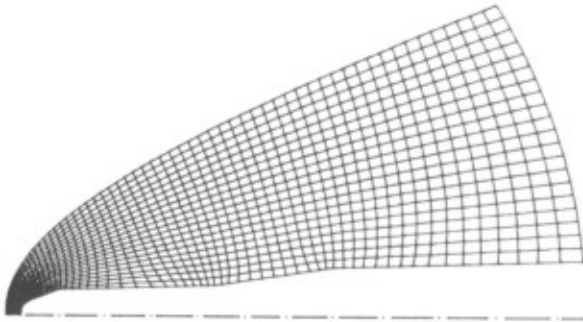


Figura 3. Malha gerada sobre o veículo Scout.

A Fig. 4 mostra a distribuição de pressão adimensional sobre o corpo obtida no presente trabalho e os resultados experimentais [9]. A concordância pode ser considerada excelente. Deve-se notar que a solução não apresenta oscilações, comuns em muitas metodologias, nas regiões próximas aos cantos de expansão e compressão.

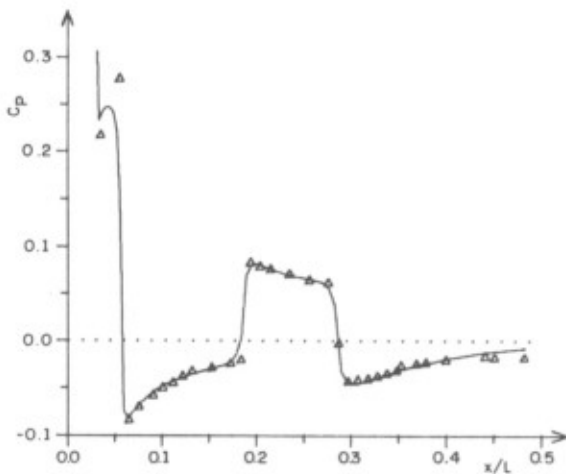


Figura 4. Distribuição de pressão sobre o veículo Scout.

CONCLUSÕES

Os testes já realizados com a metodologia demonstram que:

a) O processo iterativo de solução converge estavelmente para uma ampla faixa de números de Mach de escoamentos que apresentam regiões supersônicas e regiões praticamente incompressíveis;

b) Embora o incremento de tempo adotado tenha influência na taxa de convergência, a escolha de valor adequado não se constitui numa tarefa difícil;

c) Seu comportamento independe do tipo de equações governantes, se Euler ou Navier-Stokes. Note que no primeiro caso todos os termos não ortogonais das equações de conservação da quantidade de movimento

e da energia se anulam assim como a parcela difusiva dos coeficientes restantes;

d) As soluções são fisicamente realistas e, dadas às limitações dos testes realizados, apresentam boa concordância com outros resultados.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido dentro do projeto de cooperação técnico-científico com o Instituto de Atividades Espaciais do CTA. Os autores agradecem o apoio recebido.

Os autores são gratos também ao estudante de graduação Carlos Henrique Marchi pelo processamento e pós-processamento de parte dos resultados.

REFERÊNCIAS

- [1] Anderson, D.A.; Tannehill, J.C. and Pletcher, R.H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. McGraw-Hill, Washington (1984).
- [2] Van Doormaal, J.P.; Raithby, G.D. and McDonald, B.H., The Segregated Approach to Predicting Viscous Compressible Fluid Flows. A.S.M.E. Paper, no. 86-GT-196, presented at the International Gas Turbine Conference and Exhibit, Dusseldorf, West Germany, June 8-12 (1986).
- [3] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill, New York (1980).
- [4] Van Doormaal, J.P., Numerical Methods for the Solution of Incompressible and Compressible Fluid Flows. Tese de Doutorado, University of Waterloo, Canada (1985).
- [5] Silva, A.F.C. e Maliska, C.R., Avaliação no Limite Incompressível de uma Formulação para Qualquer Regime de Escoamento. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, 1987. Anais do COBEM 87, pp. 241-244 (1987).
- [6] Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., Desenvolvimento de Códigos Computacionais para a Solução de Problemas de Escoamentos de Alta Velocidade. Parte II, Relatório ao CTA / Instituto de Atividades Espaciais, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, dezembro (1987).
- [7] Schneider, G.E. and Zedan, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems. Numerical Heat Transfer, vol. 4, pp.1-19 (1981).
- [8] Hayes, W.D. and Probstein, R.F., Hypersonic Flow Theory - Inviscid Flows, Academic Press, New York (1966).
- [9] Jernell, L.S., Aerodynamic Loading Characteristics of a 1/10-Scale Model of the Three-Stage Scout Vehicle at Mach Numbers from 1.57 to 4.65. NASA Technical Note D-1930 (1963).

ABSTRACT

The Navier-Stokes equations written in generalized coordinates are solved in segregated fashion using a finite volume method. The use of the equation of state to compute the density, instead of pressure, and the approach used to linearize the mass conservation equation allows the method to be applied to compressible and incompressible flows. The equations can be used to predict 2-D planar as well as axisymmetric flows. The results are computed for the supersonic flow over cylinders and the Scout launch vehicle.