

## ESTUDO SOBRE A SOLUÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE UM JATO LAMINAR

FERNANDO TADEU BÓÇON

Depto. de Eng. Mecânica - Universidade Federal do Paraná

CLÓVIS RAIMUNDO MALISKA

Depto. de Eng. Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina

### RESUMO

É simulada numericamente a descarga de um jato bidimensional isotérmico e laminar em um ambiente uniforme contendo o mesmo fluido do jato. Utiliza-se o método dos volumes finitos. Detalhes da solução numérica são discutidos, como as dimensões apropriadas do domínio de cálculo e a aplicação das condições de contorno, já que trata-se de um problema de fronteira livre. Três tipos de jatos são estudados. Para o caso de jato axissimétrico os resultados são comparados com dados experimentais e numéricos existentes. Também são estudados os casos de jato plano simétrico (descarregado em ambiente calmo) e não-simétrico (descarregado em ambiente com escoamento transversal ao jato). Linhas de corrente e perfis de velocidades são apresentados para os casos estudados.

### INTRODUÇÃO

O fenômeno da descarga de um fluido em um ambiente é um interessante problema da mecânica dos fluidos encontrado em diversos campos da engenharia, especialmente no que diz respeito à descarga de rejeitos em leitos aquosos ou na atmosfera. Um estudo experimental sobre jatos axissimétricos foi feito por Akaike e Nemoto (1988). Jatos laminares com transferência de calor foram estudados por Dählmann et al (1989) e Laschefski et al (1992). O escoamento hidrodinâmico de jatos turbulentos planos, axissimétricos e tridimensionais foi estudado por Quim e Miltzer (1986), Cruz (1991) e Coelho (1989). Thompson e Neto (1987) estudaram teórica e experimentalmente o escoamento de jatos planos sujeitos à excitação acústica periódica.

O objetivo do presente trabalho é o estudo da solução numérica do escoamento de um jato laminar, isotérmico e bidimensional de um fluido sendo descarregado em um ambiente aberto ocupado pelo mesmo fluido do jato. Investiga-se a séria questão das dimensões do domínio de cálculo e a aplicação de condições de contorno em escoamentos com fronteira livre dos quais o problema dos jatos é um bom exemplo para esse estudo.

Na fig. 1 temos uma representação esquemática do problema com a posição do sistema de coordenadas utilizado ( $x, y$  para o caso de um jato plano e  $x, r$  para o caso de jato axissimétrico). Três tipos distintos de jatos são estudados:

- 1) Jato tridimensional axissimétrico descarregado em ambiente em repouso;
- 2) Jato plano descarregado em ambiente em repouso (bidimensional e simétrico);
- 3) Jato plano descarregado em ambiente com velocidade perpendicular à direção da descarga (bidimensional, não simétrico).

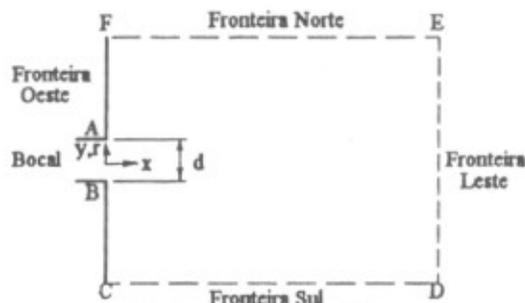


Fig. 1 - Esquema do problema

### EQUAÇÕES GOVERNANTES

O problema de mecânica dos fluidos (no presente trabalho puramente hidrodinâmico) é descrito pelas equações da conservação da massa e da conservação da quantidade de movimento. No modelo

matemático utilizado para descrever o fenômeno físico do presente problema foram assumidas as hipóteses de fluido newtoniano; escoamento laminar, bidimensional e incompressível; propriedades físicas constantes e regime permanente.

### CONDIÇÕES DE CONTORNO

A correta aplicação das condições de contorno constitui elemento decisivo para obtenção de bons resultados na solução de problemas nos quais não se tem perfeitamente definidas as fronteiras do domínio. Tanto o tipo de condição de contorno como a posição em que ela deve ser aplicada influem significativamente na qualidade da solução numérica.

Referindo-se a fig. 1, temos na descarga do jato (segmento AB) velocidade prescrita  $u = u_0$  ( $Re$ ). Ao longo da parede (segmentos AF e BC) temos condição de não deslizamento e impermeabilidade,  $u = v = 0$ . Suficientemente distante da descarga (segmento CDEF) optou-se por especificar condições de escoamento localmente parabólico, ou seja

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ em DE e } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ em CD e EF} \quad (1)$$

por entendermos que este é o tipo de condição que melhor pode representar o que ocorre neste tipo de problema, uma vez que na realidade não dispomos de condições de contorno nas fronteiras livres.

Na verdade as condições dadas por (1) só poderiam ser aplicadas no infinito mas, no entanto, a limitação do domínio é necessária para a obtenção de uma solução numérica. O procedimento adotado então é o de estender o domínio até uma posição suficientemente afastada da descarga do jato de maneira que a qualidade e a precisão da solução sejam satisfatórias.

A natureza do problema do jato, que apresenta o característico fenômeno de incorporação de massa ao jato, ou "entrainment", não permite aplicar condições de Dirichlet para a velocidade na região aberta do domínio (segmento CDEF). A aplicação de condições de contorno de 2ª espécie em 3 das 4 fronteiras do domínio faz com que a convergência da solução seja mais lenta, uma vez que são condições fracas. Em outras palavras, o método numérico deve ser robusto.

No caso do jato descarregado em ambiente com velocidade transversal, as condições de contorno para a fronteira sul (CD) são  $u = 0$  e  $v = v_0$  ( $Re$ ), constante. Nas demais faces as condições de contorno são as mesmas descritas acima.

Para o estabelecimento das dimensões do domínio de cálculo foram feitos diversos testes nos quais os perfis de velocidades nas duas direções foram analisados para a verificação da validade da aplicação das condições de contorno localmente parabólicas. Para os casos dos jatos simétricos (plano e axissimétrico) o domínio foi fixado com comprimento e semi-altura respectivamente iguais a 300 e 150 vezes o tamanho do bocal de descarga do jato. Foi testado um caso com domínio 600 x 300 vezes o tamanho do bocal que apresentou diferenças desprezíveis em

relação ao domínio 300 x 150. Maiores detalhes a respeito do tamanho do domínio para todos os casos estudados serão vistos logo mais.

## MÉTODO NUMÉRICO

Foi utilizado o método dos volumes finitos em coordenadas generalizadas. Este novo sistema coordenado, coincidente com a fronteira do domínio, é dado pela transformação

$$\xi = \xi(x, y) \quad \eta = \eta(x, y) \quad (2)$$

Como está se usando malhas estruturadas, é mais conveniente transformar a equação diferencial e integrá-la no domínio  $(\xi, \eta)$ , do que integrá-la no domínio  $(x, y)$  irregular. A equação transformada, para uma variável  $\phi$  genérica, tem a forma

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho v \phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} (J \alpha \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - J \beta \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \gamma \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - J \beta \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial \xi}) + \hat{S} \quad (3)$$

onde  $J$  é o Jacobiano e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são métricas da transformação. Neste sistema, as linhas coordenadas coincidem com as fronteiras do domínio de cálculo. As variáveis dependentes, representadas por  $\phi$ , são mantidas no novo sistema de coordenadas. Desta forma, continuamos tendo as equações de conservação da massa, de conservação da quantidade de movimento na direção  $x$  e de conservação da quantidade de movimento na direção  $y$  escritas no novo sistema de coordenadas. A grande vantagem é que podemos resolver problemas em geometrias as mais diversas com o mesmo código computacional. Além disso, uma outra grande vantagem é que, devido às linhas coordenadas coincidirem com as fronteiras do domínio, não são necessárias interpolações quando da aplicação das condições de contorno, o que diminui muito as imprecisões do método numérico. Com o uso de coordenadas generalizadas também torna-se mais simples a adequação da malha ao problema, de forma a melhorar a qualidade da solução, através de mudança de orientação, concentração ou afastamento de linhas.

A equação transformada (3) é então integrada no espaço (volume elementar  $\Delta \xi \times \Delta \eta$ ) e no tempo a fim de obter-se uma equação algébrica para o volume. Detalhes desta integração são apresentados por Maliska (1992). É utilizado o arranjo colocalizado de variáveis, isto é, os volumes de controle para todas as variáveis dependentes ( $u, v, p$ ) coincidem. É adotada uma formulação implícita, isto é, todos os termos são avaliados no instante  $t + \Delta t$  e com derivadas para trás para avaliar a variação temporal. Após a integração há a necessidade de avaliar os valores de  $\phi$  e suas derivadas nas faces do volume elementar. Para tanto, faz-se uso de funções de interpolação. No caso, o esquema adotado é o WUDS - Weighted Upstream Differencing Scheme - (Raithby e Torrance, 1967).

Como se está utilizando um método segregado de solução para o sistema de equações diferenciais, em que cada equação é responsável pelo avanço de uma variável, é necessário empregar um método para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Neste trabalho o método adotado foi o SIMPLEC (Van Doormal e Raithby, 1984) e o código computacional utilizado foi o SINFLOW, 1993. O conjunto das equações de cada volume elementar constitui um sistema linear de equações que foi resolvido aplicando o método TDMA, ligeiramente modificado, uma vez que a matriz dos coeficientes possui 9 diagonais.

Embora busque-se somente a solução do problema em regime permanente, os termos transientes foram mantidos no método numérico com a finalidade de se ter um melhor controle do avanço da solução. A adoção de um incremento de tempo que garantisse a convergência foi feita pela determinação do intervalo de tempo que o fluido do jato leva para percorrer o primeiro volume elementar após a sua descarga, conforme mostrado no esquema abaixo.

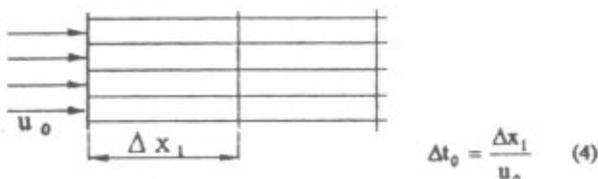


Fig. 2

Os valores de  $\Delta t$  que levaram a solução a convergir variam de  $0,5 \Delta t_0$  a  $10 \Delta t_0$ . Valores menores ou maiores, na maioria dos casos, levaram à divergência.

**Crítérios de Convergência.** Foram utilizados 2 critérios de convergência. Um deles, por tratar-se de um problema puramente hidrodinâmico, baseia-se na variação das velocidades cartesianas  $u$  e  $v$ . O segundo critério baseia-se no balanço global de massa, isto porque o problema tem fronteiras com fluxo de massa e condição de contorno localmente parabólicas para a velocidade. O critério de erro para as velocidades é o seguinte:

$$e_v = \frac{\phi^{t+\Delta t} - \phi^t}{\phi_{\max}^{t+\Delta t} - \phi_{\min}^{t+\Delta t}} \quad (5)$$

Desta forma o erro está normalizado em função da variação de  $\phi$  evitando que regiões do escoamento que não sejam significativas retardem a convergência da solução. O valor de  $e_v$  adotado foi  $10^{-4}$ . Testes foram feitos com valores de  $e_v$  menores mas não houve mudança nos perfis de velocidades nem nas linhas de corrente. No segundo critério de convergência, o erro no balanço de massa é calculado como

$$e_m = \frac{m_{out} - m_{in}}{m_{in}} \quad (6)$$

O numerador da expressão acima é o resíduo no balanço global de massa e o denominador é o fluxo mássico do jato que entra. O valor de  $e_m$  adotado foi de  $10^{-3}$ . O problema é considerado convergido quando os 2 critérios estão satisfeitos. Logicamente que em um problema real não tem sentido atender 2 critérios. Aqui isto foi feito para garantir a qualidade da solução.

## DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

A obtenção de uma malha adequada ao problema é um fator decisivo para a qualidade da solução. Para o problema do jato, não só o tipo da malha e a disposição dos volumes é importante mas também o tamanho desta. Conforme já foi discutido no item referente às condições de contorno, a extensão do domínio de cálculo deve ser suficiente para permitir a aplicação da condição de escoamento localmente parabólico.

Para os casos de jato axissimétrico e plano com simetria a malha utilizada pode ser vista na fig. 3, com 100 x 100 volumes e uma concentração na região de descarga, bem como ao longo da linha de simetria, que é a região onde se encontram os maiores gradientes de pressão e velocidade. A malha tem comprimento e altura respectivamente de 300 e 150 vezes o tamanho do bocal de descarga e foi gerada algebricamente.

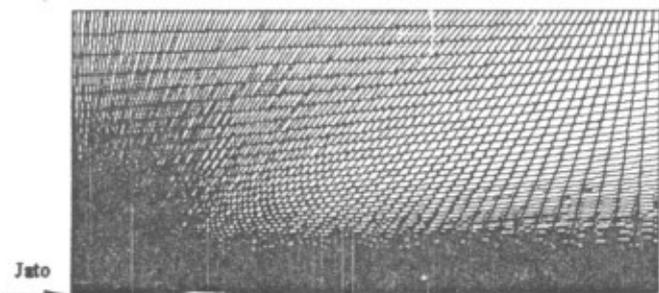


Fig. 3 - Malha para os problemas simétricos

Para os casos de jato plano não simétrico, isto é, descarregado em ambiente com escoamento perpendicular à direção da descarga, a malha utilizada pode ser vista na fig. 4, com 100 x 100 volumes e uma concentração na região de descarga, que não está no centro da fronteira oeste da malha, mas sim deslocada mais para o lado da fronteira sul. Isto deve-se ao fato de que o escoamento no ambiente é vertical, de baixo para cima, isto é, a condição de contorno na fronteira sul é de velocidade prescrita  $v = v_0$  (Rc), constante, e  $u = 0$ . Os efeitos do jato sobre o escoamento transversal do ambiente são muito menos sentidos a montante do bocal de descarga do que a jusante do mesmo, como será visto nas linhas de corrente, apresentadas nos resultados. A malha

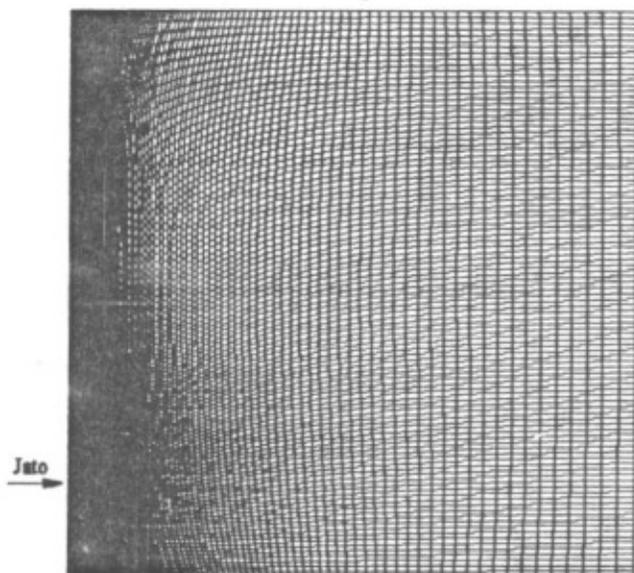


Fig. 4 - Malha para os problemas não-simétricos

menor tem comprimento e altura de 150 vezes o tamanho do bocal de descarga e foi utilizada nos casos em que a velocidade transversal é igual à velocidade da descarga do jato. A malha maior tem comprimento e altura de 300 vezes o tamanho do bocal de descarga e foi utilizada nos casos em que a velocidade da descarga é 10 vezes maior que a velocidade transversal. Ambas as malhas foram obtidas através de geração elíptica.

#### COMPARAÇÃO COM RESULTADOS DA LITERATURA

Nesta seção são confrontados alguns resultados obtidos neste trabalho com outros numéricos e experimentais disponíveis na literatura, possibilitando a comparação dos mesmos e visando dar credibilidade aos resultados apresentados na próxima seção.

Akaike e Nemoto (1988) realizaram experimentos para estudar o desenvolvimento de um jato de água laminar e axissimétrico descarregado em um ambiente contendo o mesmo fluido em repouso, para  $Re=158$  e  $Re=308$ , baseados no diâmetro do bocal injetor. Dihlmann (1992) estudou o mesmo problema de Akaike e Nemoto, simulando numericamente o escoamento do jato. Os resultados do presente trabalho são comparados com os destes dois estudos.

Na fig. 5 pode-se comparar os resultados numéricos e experimentais. O gráfico mostra o decaimento da velocidade axial adimensional, dada por (7), ao longo da linha de centro do jato.

$$U = \frac{u}{u_{max}} \quad (7)$$

A fig. 6 mostra o gráfico dos perfis da velocidade axial adimensional, dada por (8), ao longo da seção transversal do jato para algumas posições distantes  $x/d$  do bocal.

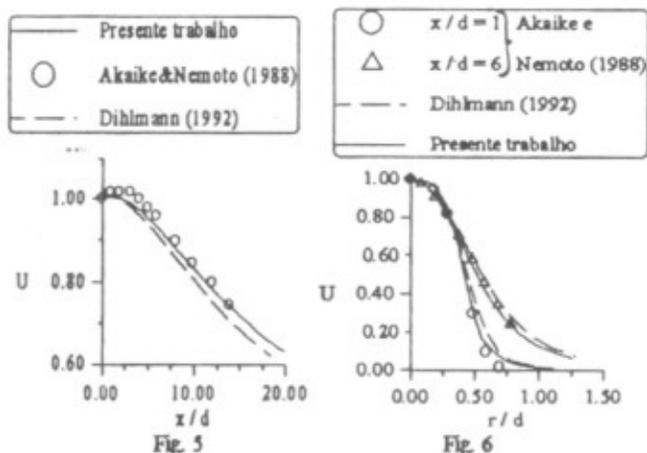
$$U = \frac{u}{u_{max}} \quad (8)$$

onde  $u_{max}$  é o valor máximo da velocidade axial naquela seção do jato, que é justamente a velocidade  $u$  na linha de centro.

#### RESULTADOS

Nesta seção são apresentados os resultados para os 3 tipos de jatos estudados. Os problemas do jato axissimétrico e plano simétrico foram calculados para os mesmos números de Reynolds ( $Re=158$  e  $308$ ), mesmas condições de contorno e mesma malha, para que os resultados possam ser comparados.

Um fenômeno característico do escoamento de jatos é o da incorporação de fluido do ambiente à massa do jato à medida que este se desenvolve. Este fenômeno é conhecido como "entrainment". Na fig. 8, que mostra as linhas de corrente do jato axissimétrico descarregado em ambiente calmo, é fácil de ver como a massa de fluido do ambiente vai



sendo arrastada por efeito viscoso para incorporar-se ao jato. A fim de comparar os jatos axissimétrico e plano simétrico com respeito a esse fenômeno, definiu-se a razão de "entrainment":

$$E = \frac{m_e}{m_j} \quad (9)$$

onde  $m_e$  é o fluxo mássico que entra no domínio pelas fronteiras norte e leste, que é a massa incorporada ao jato, e  $m_j$  é o fluxo mássico do jato no bocal de descarga. A tabela 1 apresenta os valores da razão de entrainment para os casos de  $Re=158$  e  $308$ . Cabe ressaltar que a razão de "entrainment", tal como foi definida, varia em função do tamanho do domínio na direção axial do jato. Os valores dados na tabela acima referem-se ao tamanho da malha usada, no caso com dimensão de 300 vezes o tamanho do bocal de descarga, na direção axial.

O jato axissimétrico apresenta um "entrainment" muito maior que o plano já que pode se dizer que ele possui uma dimensão a mais para incorporar massa por troca de quantidade de movimento, por tratar-se na verdade de um caso particular de escoamento tridimensional. Devido a ceder maior quantidade de movimento à massa do ambiente, o jato axissimétrico tem um decaimento mais acentuado da velocidade axial quando comparado ao jato plano, como pode ser visto na fig. 7.

Tabela 1 - Razão de "entrainment"

Re	Axissimétrico	Plano
158	34.4	2.72
308	20.0	2.08

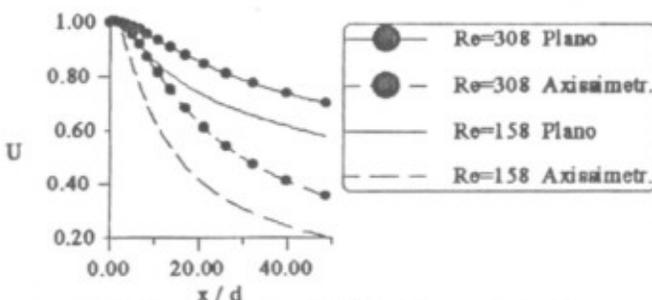


Fig. 7 - Decaimento da velocidade axial no centro do jato

**Jato Axissimétrico.** Alguns resultados para o jato axissimétrico já foram apresentados na seção anterior, quando foram comparados com resultados da literatura. A fig. 8 mostra as linhas de corrente para  $Re=308$ , onde pode-se notar o significativo arraste de massa que vai se incorporar ao jato, o "entrainment".

**Jato Plano Simétrico.** Foram tomados os mesmos números de Reynolds do jato axissimétrico. Para efeito de comparação, na fig. 7 está o gráfico da velocidade axial ao longo da linha de simetria para os jatos axissimétricos e plano, para  $Re=158$  e  $308$ . Pode-se notar que a velocidade axial do jato axissimétrico decai mais rapidamente que a do jato plano, devido ao maior "entrainment" apresentado pelo primeiro, no qual ocorre uma maior difusão de quantidade de movimento da



Fig. 8 - Linhas de corrente para jato axissimétrico (Re=308)

massa que entra para a massa de fluido do ambiente, que vai sendo acelerada e incorporada ao jato.

**Jato Plano Não Simétrico.** Neste caso o jato é descarregado num ambiente com o fluido em movimento com velocidade perpendicular a direção de descarga. Foram estudados 4 casos, mostrados na tabela 2, na qual  $u_0$  é a velocidade prescrita na descarga do jato, assumida constante e função do número de Reynolds baseado na dimensão do bocal de descarga ( $d$ )

$$Re = \frac{u_0 d}{\nu} \quad (10)$$

e  $v_0$  é a velocidade do fluido no ambiente (na direção  $y$ ), prescrita na face sul do domínio. As linhas de corrente para o caso 1 estão mostradas na fig. 9. Podemos ver que a recirculação formada na saída do jato foi bem captada pela solução numérica.

A tabela 2 mostra a distância máxima aproximada atingida pelo jato ao ser então desviado para o sentido da velocidade do meio ( $x_{max} / d$ ).

Tabela 2 - Jatos não simétricos

Caso	Re	$v_0$	$x_{max} / d$
1	50	$0.1 u_0$	43.0
2	500	$0.1 u_0$	58.0
3	50	$u_0$	3.0
4	500	$u_0$	5.8

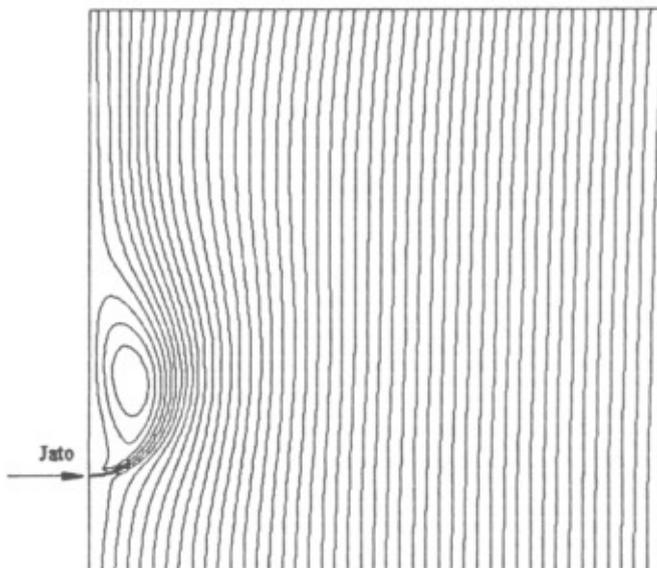


Fig. 9 - Linhas de corrente para jato não simétrico - caso 1

## CONCLUSÃO

Alguns aspectos do escoamento hidrodinâmico de jatos bidimensionais foram previstos por simulação numérica empregando o método dos volumes finitos, utilizando malhas moderadamente refinadas

(10.000 volumes elementares). A comparação com outros resultados numéricos e experimentais revelaram uma boa aproximação. A extensão suficiente do domínio de cálculo, para permitir a aplicação de condições de contorno localmente parabólicas para as velocidades cartesianas, foi extensivamente testada, para a definição das dimensões apropriadas das malhas. Diversos casos de jatos planos e axissimétricos foram estudados e comparados sempre que possível. Um melhor refinamento das malhas deve melhorar a precisão dos resultados, o que não foi feito no presente trabalho por requerer um tempo de computação ainda mais elevado.

## REFERÊNCIAS

- # Akaïke, S. e Nemoto, M., "Potential Core of a Submerged Laminar Jet", *Transactions of the ASME*, vol. 110, p.392, December 1988.
- # Coelho, S.L.V., "On the Modelling of Turbulent Jets in Cross Flows", *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, p. 93, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.
- # Cruz, G.M.M., "Solução Numérica de um Escoamento Turbulento com o Modelo k-ε / Aplicação: Escoamento Atrás de Grelhas e Jato de Ar Turbulento Axi-Simétrico", *Anais do XI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, p. 473, São Paulo, Brasil, 1991.
- # Dählmann, A., "Simulação Numérica da Descarga Térmica de Chaminés em Ambiente Uniforme e Estratificado", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 1992.
- # Dählmann, A., Maliska, C.R. e Silva, A.F.C., "Solução Numérica do Problema da Descarga de Jatos Poluentes em um Meio Estratificado", *Anais do X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, p. 101, Rio de Janeiro, Brasil, 1989.
- # Laschefski, H., Holl, A., Grosse-Gorgemann, A., Mitra, N.K. e Page, R.H., "Comparison of Heat Transfer on a Flat Plate by Impinging Axial and Radial Jets", *Anais do IV Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, p.131, Rio de Janeiro, Brasil, 1992.
- # Maliska, C.R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional - Coordenadas Generalizadas", Monografia para o Concurso de Professor Titular na Área de Ciências Térmicas, EMC-UFSC, Florianópolis, Brasil, 1992.
- # Quinn, W.R. e Miltzer, J., "Experimental and Numerical Study of a Turbulent Free Square Jet", *Anais do I Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, p. 239, Rio de Janeiro, Brasil, 1986.
- # Raithby, G.D. e Torrance, K.E., "Upstream-weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Computer and Fluids*, vol. 2, pp. 12-26, 1967.
- # SINFLOW - "Código Computacional para a Solução de Problemas de Mecânica dos Fluidos em Geometrias Bidimensionais Arbitrárias", SINMEC - Laboratório de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor Computacional, Departamento de Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, Brasil, 1993.
- # Thompson, C.A. e Neto, F.S., "Wave Velocity Behaviour in the Center Line of a Plane Turbulent Jet", *Anais do IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, p. 201, Florianópolis, Brasil, 1987.
- # Van Doormal, J.P. e Raithby, G.D., "Enhancements of the Simple Method for Predicting Incompressible Fluid Flows", *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, pp. 147-163, 1984.

## ABSTRACT

The numerical simulation of a laminar isothermal jet discharged in a moving and quiet ambient is realized using a finite-volume method. The numerical solution is discussed in some detail, like the appropriate size of the domain and the correct application of the boundary conditions, since it's an unbounded domain problem. Three types of jets are studied. For the case of an axisymmetric jet the results are compared with experimental and numerical data available in the literature. Also are studied the cases of symmetric and non symmetric plane jets. The non symmetric jet is the one discharged in an ambient with a transversal flow with respect to the jet direction. Streamlines and velocity profiles are presented for the cases studied.