

SOLUÇÃO SIMULTÂNEA DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DE MASSA E DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO EM COORDENADAS GENERALIZADAS

FRANÇA FILHO, M.F. e MALISKA, C. R.

Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos - SINMEC
 Depto. de Eng. Mecânica - Universidade Federal de Santa Catarina
 C.P. 476 - CEP 88049 - Florianópolis - SC - Brasil

SUMMARY

O presente trabalho apresenta uma extensão do método CELS para a solução simultânea de u , v e p em escoamentos incompressíveis em domínios com discretizações não-ortogonais. Tal extensão é feita a partir da definição das equações algébricas de conservação de quantidade de movimento para as componentes contravariantes do vetor velocidade. O desempenho da extensão proposta é mostrado, resolvendo-se o escoamento em um canal com malha não - ortogonal.

INTRODUÇÃO

Na tentativa de promover um tratamento do acoplamento pressão-velocidade mais eficiente que aqueles conseguidos com métodos de abordagem segregada, como os algoritmos SIMPLE (Patankar e Spalding, 1972), SIMPLER (Patankar, 1980) ou SIMPLEC (Van Doormaal e Raithby, 1984), Galpin et al. (1985) desenvolveram o método CELS (Coupled Equation Line Solver), um método iterativo para a solução simultânea, linha-por-linha, das equações de conservação de massa e de quantidade de movimento para escoamentos incompressíveis. Em vista do bom desempenho apresentado pelo CELS, nos testes realizados (Galpin et al., 1985), e considerando-se a crescente necessidade de solução de problemas que exijam uma discretização não-ortogonal do domínio de cálculo, uma extensão do CELS para coordenadas generalizadas, com base na definição das equações algébricas de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes do vetor velocidade é apresentada (França F^o., 1991) e alguns testes são realizados a fim de aumentar a base de conhecimento relativa a este novo método. Os testes são realizados com a solução de problemas de escoamentos isotérmicos bi-dimensionais.

EQUAÇÕES

As equações discretizadas para problemas de escoamentos incompressíveis bi-dimensionais em coordenadas cartesianas são dadas por

$$\Delta y u_e - \Delta y u_w + \Delta x v_n - \Delta x v_s = 0 \quad (1)$$

$$A_P^2 u_{2P} = \sum A_{NB}^2 u_{2NB} - \Delta V \frac{\Delta p}{\Delta x} \Big|_P + B_P^{u2} \quad (2)$$

$$A_P^1 v_{1P} = \sum A_{NB}^1 v_{1NB} - \Delta V \frac{\Delta p}{\Delta y} \Big|_P + B_P^{v1} \quad (3)$$

onde

$$A_P^2 = \left(\frac{1 + E}{E} \right) \sum A_{NB}^2 \quad e \quad B_P^{u2} = (E^{-1}) \sum A_{NB}^2 \quad (4)$$

$$A_P^1 = \left(\frac{1 + E}{E} \right) \sum A_{NB}^1 \quad e \quad B_P^{v1} = (E^{-1}) \sum A_{NB}^1 \quad (5)$$

As equações acima foram obtidas através do método de volumes finitos, como descrito por Patankar (1980). Para a avaliação das variáveis e de seus fluxos sobre

as fronteiras dos volumes de controle, adotou-se o esquema WUDS de Raithby e Torrance (1974). As variáveis são dispostas na malha segundo o arranjo desencontrado, proposto por Harlow e Welch (1965), como mostrado na Fig. (1). Deve-se observar nesta figura, que as componentes situadas sobre linhas $y = cte.$ recebem o índice 1, e aquelas sobre linhas $x = cte.$ recebem o índice 2. O avanço da solução é controlado através do passo de tempo adimensional, E , cujo significado pode ser visto em Van Doormaal e Raithby, (1984).

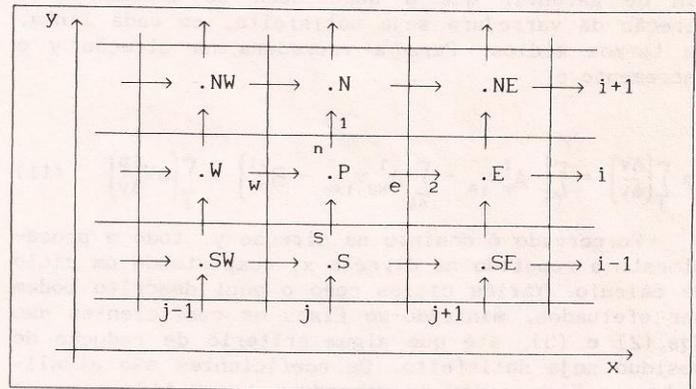


Fig. (1) - Arranjo das variáveis na malha

REVISÃO DO MÉTODO CELS EM COORDENADAS CARTESIANAS

Como descrito em Galpin et al. (1985), o método CELS consiste em resolver, simultaneamente, as variáveis u , v e p de uma dada linha i , a partir de valores sobre as linhas vizinhas, conhecidos de um nível iterativo anterior. Feito isso, passa-se à próxima linha, $i+1$, até que todo o domínio seja percorrido. Completada a varredura em uma direção, repete-se todo o processo para a outra.

Para a solução sobre uma linha de $i=cte$, os valores de u , v , e p sobre as linhas $i+1$ e $i-1$ são transferidos para os termos-fonte das Eqs. (1) a (3), as quais se transformam em

$$\Delta y u_e - \Delta y u_w + \Delta x v_n - b^C = 0 \quad (6)$$

$$A_P^2 u_{2P} = A_E^2 u_{2E} + A_W^2 u_{2W} - \Delta V \frac{\Delta p}{\Delta x} \Big|_P + b^{u2} \quad (7)$$

$$A_P^1 v_{1P} = A_E^1 v_{1E} + A_W^1 v_{1W} - \Delta V \frac{\Delta p}{\Delta y} \Big|_P + b^{v1} \quad (8)$$

A Eq. (6) é explicitada em termos de \mathbf{v} , e aplicada aos volumes das posições $j-1$ e $j+1$. As expressões resultantes são substituídas na Eq. (8), obtendo-se

$$A_P^P \mathbf{p}_P = A_E^P \mathbf{u}_{2P} + A_W^P \mathbf{u}_{2W} + A_{WW}^P \mathbf{u}_{2WW} + A_{EE}^P \mathbf{u}_{2E} + B_P^P \quad (9)$$

Aplicando-se a Eq. (9) aos volumes j , e $j+1$, chega-se a expressões para a pressão em tais posições. Substituindo-as na Eq. (7), obtém-se a Eq. (10), onde aparecem, explicitamente, apenas as componentes \mathbf{u} .

$$A_P^u \mathbf{u}_{2P} = A_E^u \mathbf{u}_{2E} + A_W^u \mathbf{u}_{2W} + A_{WW}^u \mathbf{u}_{2WW} + A_{EE}^u \mathbf{u}_{2EE} + B_P^u \quad (10)$$

Os coeficientes das Eqs. (9) e (10) são dados em Galpin et al. (1985).

A estrutura pentadiagonal do sistema representado pela Eq. (10), permite que a sua solução seja eficientemente obtida por meio do algoritmo PDMA, derivado a partir do método de eliminação de Gauss, da mesma forma como na obtenção do algoritmo de Thomas para matrizes tridiagonais.

Uma vez calculadas as componentes \mathbf{u} , a pressão e a componente \mathbf{v} são calculadas de forma explícita, via Eqs. (9) e (6), respectivamente.

Na solução sobre a última linha, as componentes \mathbf{v} são conhecidas (condições de contorno). Assim, as componentes \mathbf{u} são obtidas explicitamente a partir da equação de conservação de massa. Já a pressão é calculada aplicando-se a Eq. (8) sobre a penúltima linha.

A varredura assim efetuada provoca um desacoplamento entre as pressões das linhas i e $i-1$, fato que afeta a taxa de convergência do método. Para contornar esta situação, sugere-se (Galpin et al., 1985) a adoção de um bloco de correção de pressão, tendo como referência a pressão sobre a última linha. Neste bloco, soma-se um incremento de pressão a cada linha, a fim de garantir que a quantidade de movimento na direção da varredura seja satisfeita, em cada linha, em termos médios. Para a varredura na direção y o incremento é

$$\delta p \sum_j \left(\frac{\Delta V}{\Delta y} \right) = \sum_j \left(A_P^1 \mathbf{v}_{1P} - \sum_{nb} A_{NB}^1 \mathbf{v}_{1NB} - B_P^{\mathbf{v}1} \right) + \sum_j \left(\Delta V \frac{\Delta p}{\Delta y} \right) \quad (11)$$

Percorrido o domínio na direção y , todo o procedimento é repetido na direção x , completando um ciclo de cálculo. Vários ciclos como o aqui descrito podem ser efetuados, mantendo-se fixos os coeficientes das Eqs. (2) e (3), até que algum critério de redução de resíduo seja satisfeito. Os coeficientes são atualizados, e o processo de varredura é repetido para os novos coeficientes, até que a solução convergida seja alcançada.

Uma última consideração em relação ao CELS (Galpin et al., 1985) trata do fator de relaxação, e , introduzido nas Eqs. (2) e (3) com o objetivo de conferir ao método uma elevada taxa de convergência, até mesmo quando grandes valores são atribuídos ao parâmetro E . Nesse sentido, as equações de conservação de quantidade de movimento são alteradas como exemplificado para a componente \mathbf{v} .

$$A_P^1 \mathbf{v}_{1P} \left(\frac{e+1}{e} \right) = \sum A_{NB}^1 \mathbf{v}_{1NB} - \Delta V \frac{\Delta p}{\Delta y} \Big|_P + B_P^{\mathbf{v}1} + \frac{A_P^1 \mathbf{v}_{1P}^0}{e} \quad (12)$$

Em Galpin et al. (1985), é afirmado que, para os testes realizados, quando $E > 20$ deve-se ter $e \rightarrow \infty$, enquanto que se $E < 20$, deve-se ter $e \approx 5$. Para este último caso é dito ainda que o método é insensível ao valor preciso de e . Em decorrência dessa nova relaxação, os coeficientes das Eqs. (9) e (10) devem ser convenientemente alterados, trocando-se

$$A_P^1 \text{ por } A_P^1 \left(\frac{e+1}{e} \right) \text{ e } A_P^2 \text{ por } A_P^2 \left(\frac{e+1}{e} \right) \quad (13)$$

O MÉTODO CELS EM COORDENADAS GENERALIZADAS

A extensão do método CELS para a solução de problemas nos quais se emprega um sistema de coordenadas generalizadas é agora apresentada. Para tanto, as equações diferenciais governantes são reescritas em um sistema coordenado arbitrário $(\xi-\eta)$ e, a partir dessas novas equações, chega-se às equações algébricas abaixo, como mostrado em França F^o, (1991).

$$U_{2e} - U_{2w} + V_{1n} - V_{1s} = 0 \quad (14)$$

$$A_P^2 \mathbf{u}_{2P} = \sum A_{NB} \mathbf{u}_{2NB} - \frac{\Delta p}{\Delta \xi} y_\eta \Big|_P + \frac{\Delta p}{\Delta \eta} y_\xi \Big|_P + B_P^{\mathbf{u}2} \quad (15)$$

$$A_P^1 \mathbf{v}_{1P} = \sum A_{NB} \mathbf{v}_{1NB} - \frac{\Delta p}{\Delta \eta} x_\xi \Big|_P + \frac{\Delta p}{\Delta \xi} x_\eta \Big|_P + B_P^{\mathbf{v}1} \quad (16)$$

onde, na Eq. (14), U_2 e V_1 são as componentes contravariantes do vetor velocidade, responsáveis pelo fluxo de massa através das faces dos volumes de controle.

Se uma extensão for tentada diretamente a partir das Eqs. (15) e (16), o primeiro coeficiente da Eq. (9) assumirá o valor y_η quando da varredura na direção η , limitando a aplicabilidade da extensão a malhas onde y_η não se anule em nenhum ponto do domínio, para que não se tenha indeterminações no cálculo dos coeficientes da Eq. (10). E mesmo que tal condição seja satisfeita, não é difícil verificar que a solução fornecida pelo CELS será tanto mais diferente daquela obtida via SIMPLEX ou SIMPLER, quanto menos refinada e mais distorcida for a malha empregada. O motivo para tal diferença, como explicado em França F^o, (1991) deve-se ao fato de que a extensão assim efetuada leva à solução de um conjunto de equações diferente daquele resolvido nos outros métodos.

A fim de garantir que o conjunto de equações a ser resolvido seja o mesmo nos três métodos, e de possibilitar que a extensão do CELS seja aplicável também para casos em que y_η e x_ξ sejam nulos, foram propostas por França F^o, (1991) as equações algébricas de conservação de quantidade de movimento para as componentes contravariantes do vetor velocidade, como descrito a seguir.

Lembrando que em uma linha de $\eta = \text{cte.}$, a componente contravariante V_1 , é dada por $V_1 = \mathbf{v}_1 x_\xi - \mathbf{u}_1 y_\xi$, substituem-se as componentes cartesianas por suas respectivas expressões obtidas a partir de equações equivalentes às Eqs. (15) e (16). Assim,

$$A_P^1 \mathbf{v}_{1P} = \sum A_{NB}^1 \left(\mathbf{v}_{NB} x_\xi - \mathbf{u}_{NB} y_\xi \right) \Big|_P - \left(\gamma \frac{\Delta p}{\Delta \eta} + \beta \frac{\Delta p}{\Delta \xi} \right) \Big|_P + S_P^{\mathbf{v}1} \quad (17)$$

O somatório da Eq. (17) pode ser reescrito na seguinte forma

$$\sum A_{NB}^1 \left(\mathbf{v}_{NB} x_\xi - \mathbf{u}_{NB} y_\xi \right) \Big|_P = \sum A_{NB}^1 V_{1NB} - b_P^{\mathbf{v}1} \quad (18)$$

onde

$$b_P^{\mathbf{v}1} = A_E^1 \left(\mathbf{v} \delta(x_\xi) - \mathbf{u} \delta(y_\xi) \right)_E + A_W^1 \left(\mathbf{v} \delta(x_\xi) - \mathbf{u} \delta(y_\xi) \right)_W + A_N^1 \left(\mathbf{v} \delta(x_\xi) - \mathbf{u} \delta(y_\xi) \right)_N + A_S^1 \left(\mathbf{v} \delta(x_\xi) - \mathbf{u} \delta(y_\xi) \right)_S \quad (19)$$

Na Eq. (19) os $\delta(\)$ significam, por exemplo,

$$\delta(x_\xi)_E = (x_\xi)_E^1 - (x_\xi)_E^0 \quad (20)$$

Obtém-se, finalmente,

$$A_{1P}^1 V_{1P} = \sum A_{1NB}^1 V_{1NB} - \gamma_{1P} \frac{\Delta p}{\Delta \eta} \Big|_P + B_P^{V1} \quad (21)$$

De forma semelhante, relacionando-se as equações de conservação de quantidade de movimento para as componentes cartesianas u e v situadas em uma face de $\xi = \text{cte.}$, tem-se

$$A_{2P}^2 U_{2P} = \sum A_{2NB}^2 U_{2NB} - \alpha_{2P} \frac{\Delta p}{\Delta \xi} \Big|_P + B_P^{U2} \quad (22)$$

É interessante observar que com a definição das equações algébricas de quantidade de movimento para as componentes contravariantes, Eqs. (21) e (22), o conjunto de equações para o sistema generalizado de coordenadas fica bastante semelhante ao conjunto de equações para o sistema cartesiano, Eqs. (1) a (3), o que permite uma extensão direta do CELS.

Assim a Eq. (9) fica

$$A_{PP}^P = A_{E2P}^P + A_{W2W}^P + A_{WW2WW}^P + A_{EE2EE}^P + B_P^P \quad (23)$$

onde

$$A_P^P = \gamma_{1P} \quad (24)$$

$$A_E^P = - \left(A_P^1 + A_E^1 \right) \quad (25)$$

$$A_W^P = - \left(A_P^1 + A_W^1 \right) \quad (26)$$

$$A_{EE}^P = A_E^1 \quad (27)$$

$$A_{WW}^P = - A_W^1 \quad (28)$$

$$B_P^P = \left(A_{P1s}^1 v_s - A_{E1se}^1 v_{se} - A_{W1sw}^1 v_{sw} - b_P^{v1} \right) \quad (29)$$

e a Eq. (10) se transforma em

$$A_{P2P}^u = A_{E2E}^u + A_{W2W}^u + A_{WW2WW}^u + A_{EE2EE}^u + B_P^u \quad (30)$$

onde

$$A_P^u = \left(A_P^2 - \alpha_{2P} \left(A_E^P (A_P^P)^{-1} - A_{W(j+1)}^P (A_P^P)^{-1} \right) \right) \quad (31)$$

$$A_E^u = \left(A_E^2 + \alpha_{2P} \left(A_{EE}^P (A_P^P)^{-1} - A_{E(j+1)}^P (A_P^P)^{-1} \right) \right) \quad (32)$$

$$A_W^u = \left(A_W^2 + \alpha_{2P} \left(A_W^P (A_P^P)^{-1} - A_{WW(j+1)}^P (A_P^P)^{-1} \right) \right) \quad (33)$$

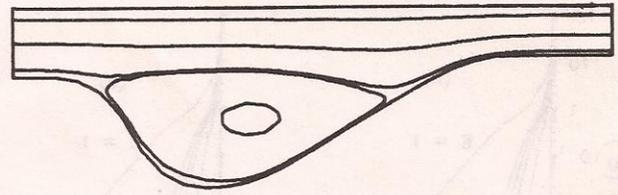
$$A_{WW}^u = A_{WW}^P \alpha_{2P} (A_P^P)^{-1} \quad (34)$$

$$A_{EE}^u = - A_{EE(j+1)}^P \alpha_{2P} (A_P^P)^{-1} \quad (35)$$

$$B_P^u = b_P^{u2} + \alpha_{2P} \left(B_P^P (A_P^P)^{-1} - B_{P(j+1)}^P (A_P^P)^{-1} \right) \quad (36)$$

ANÁLISE DE DESEMPENHO NA SOLUÇÃO DE ALGUNS ESCOAMENTOS

O desempenho do método CELS é agora avaliado, mediante a solução do escoamento através do canal divergente / convergente (d/c), Fig. (2), para número de Reynolds, Re , iguais a 10 e 500. A malha empregada é constituída de 20 x 28 volumes, como mostrado na Fig. (3).



fronteira oeste (W)	leste (E)
$u = u_{\max} \left(\frac{2y}{L} - \left(\frac{y}{L} \right)^2 \right), v = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$
norte (N)	sul (S)
$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0$	$u = 0, v = 0$

Fig. (2) - Canal d/c - Geometria, cond. de contorno e linhas de corrente ($Re = 500$)

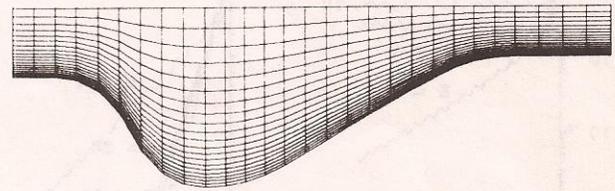


Fig. (3) - Canal d/c - Malha computacional

Os resultados mostrados a seguir foram obtidos a partir de códigos computacionais implementados em um IBM 3090, usando-se o FORTRAN-VS, em dupla precisão. Adotou-se um esquema no qual os coeficientes das equações algébricas são atualizados a cada iteração nos campos de velocidade e pressão. Nas análises apresentadas procura-se avaliar o esforço computacional (tempo de CPU e número de ciclos de atualizações de coeficientes) do método na tarefa de avançar as soluções intermediárias em direção à solução numérica "exata" de cada escoamento. O parâmetro que quantifica tal esforço relaciona, ponto-a-ponto, a pressão após o ciclo n com a pressão da solução numérica exata (p_{ref}). Define-se então um residuo dado por

$$\epsilon_P^n = \frac{2}{\rho u_{in}^2} \left((p_{ref} - \bar{p}_{ref}) - (p^n - \bar{p}^n) \right)_{\max} \quad (37)$$

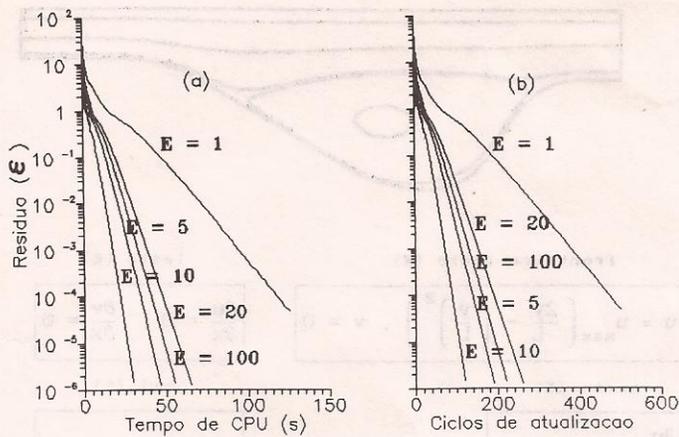
onde a barra (-) indica valores médios nos campos.

Para $Re = 10$, o método CELS apresenta uma boa habilidade (baixo número de ciclos de atualização) no tratamento dos acoplamentos e um custo (tempo de CPU) bastante satisfatório, Fig. (4). A faixa de valores para os quais a solução é alcançada é bastante ampla, devendo ser observado que aumentos no parâmetro E não se traduzem em aumento de tempo de CPU.

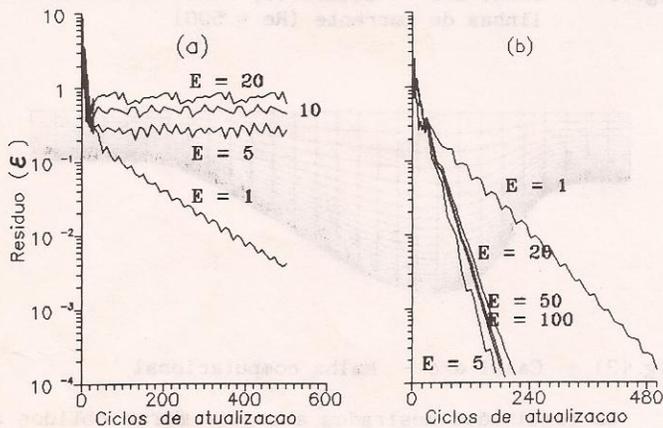
Para $Re = 500$, o processo iterativo do CELS é bastante instável, Fig. (5.a), e a solução é alcançada apenas quando $E = 1$.

Uma comparação (França $F^0.$, 1991) com os resultados obtidos através dos métodos SIMPLE, SIMPLER e SIMPLER, revela uma significativa superioridade do CELS para o caso de $Re = 10$. Já no caso de $Re = 500$, o tempo de CPU do CELS é maior que aqueles dos métodos segregados, os quais mostraram-se pouco sensíveis ao aumento de Re .

Promovendo-se uma mudança na malha, de modo a que os espaçamentos entre as linhas η sejam constantes, observou-se uma melhora considerável no desempenho do CELS, para a situação de $Re = 500$, como mostrado na Fig. (5.b).

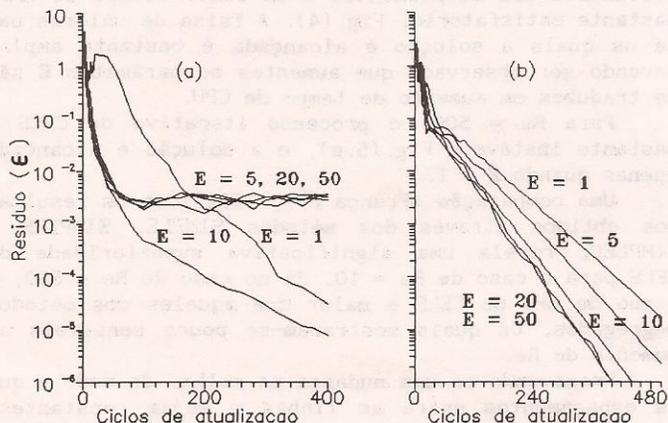


Fig(4) Desempenho do CELS - canal d/c - $Re = 10$ malha 20x28 concentrada na direção η



Fig(5) Desempenho do CELS - canal d/c - $Re = 500$ malha 20x28 a) concentrada em η b) igual. espacada

Para verificar se a deficiência observada na situação de $Re = 500$ estava associada às resultados de ortogonalidade da malha e para comprovar os resultados mostrados por Galpin et al. (1985), resolveu-se o escoamento em uma cavidade retangular com uma malha ortogonal 20×20 , $Re = 64000$ e demais condições como mostrado em Galpin et al. (1985). Um aspecto muito importante, relacionado à solução deste problema é mostrado na Fig. (6. a). Observe-se nesta figura que, para determinados valores de E , o método CELS converge apenas para resíduos da ordem de 0.5%. Se resíduos menores, por exemplo 0.1%, fossem pretendidos, as conclusões de Galpin et al. (1985) a respeito do método certamente seriam outras. Coincidentemente, em Galpin et al. (1985), nenhuma curva do tipo resíduo \times tempo é mos-



Fig(6) Desempenho do CELS - cavidade retangular - $Re = 64000$ malha ortogonal a) 20x20 b) 40x10

trada, e um resíduo de 0.5% é considerado satisfatório, sem que os autores façam qualquer comentário sobre o comportamento do CELS durante o processo iterativo.

Na solução do mesmo problema da cavidade retangular, quando uma malha 40×10 (razão de aspecto dos volumes = 1) é empregada, tem-se um melhor comportamento do CELS, o qual passa a convergir para valores de E variando de 1 a 100, como mostrado na Fig. (6. b).

CONCLUSÕES

Uma extensão do método CELS, para torná-lo aplicável a geometrias com discretização não-ortogonal foi apresentada. A extensão é obtida mediante a definição das equações discretizadas de quantidade de movimento em termos das componentes contravariantes. Tais equações, se empregadas também nos métodos de abordagem segregada, garantem que as soluções obtidas por esses métodos e aquela da extensão do CELS serão as mesmas, inclusive para malhas pouco refinadas. Uma outra vantagem dessas novas equações é eliminar a limitação de emprego do CELS quando a discretização do domínio tiver pontos de η e x_ξ nulos.

Quanto ao desempenho do CELS, parece haver uma enorme sensibilidade do método em relação à anisotropia dos coeficientes, que é tanto maior quanto maiores são as velocidades e a razão de aspecto dos volumes de controle. Outro ponto negativo tem a ver com o custo de cada iteração. Se por um lado a correção de pressão, Eq. (11), melhora o tratamento do acoplamento $p \times V$, por outro, impõe um aumento no tempo de CPU em cada iteração. Este fato pode tornar proibitivo o emprego do método em malhas mais refinadas. Por fim, o método não demonstrou ser tão robusto quanto o afirmado por Galpin et al. (1985). Em França F^o (1991) o desempenho do CELS é relatado com mais detalhes.

REFERÊNCIAS

- .França F^o , M.F. Estudo Comparativo de Métodos de Tratamento do Acoplamento Pressão-Velocidade, Disser-tação de Mestrado - UFSC, 1991
- .Galpin, P.F., Van Doormaal, J.P. and Raithby, G.D. Solution of Incompressible Mass and Momentum Equations by Application of a Coupled Equation Line Solver, Int. J. Numerical M. in Fluids, vol 5, 1985
- .Harlow, F.H. and Welch, J.E. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Physics of Fluids, Vol. 8, 1965
- .Patankar, S.V., and Spalding, D.B. A calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows, Journal Heat Mass Transfer, vol. 15, pp 1787-1806, 1972
- .Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1980
- .Raithby, G.D. and Torrance, K.E., Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computers and Fluids, vol. 2, pp 191-206, 1974
- .Van Doormaal, J.P. and Raithby, G.D. Enhancements of the SIMPLE method for Predicting Incompressible Fluid Flows, Numerical H. Transfer, vol.7, pp 147-163, 1984

ABSTRACT

This paper presents an extension of the CELS methodology to handle problems defined in generalized coordinates. The method solves the mass conservation and momentum equations simultaneously in a line-by-line fashion. The discretized equations were written in terms of the contravariant velocity components in order to have the extension in the same basis as for cartesian grids. The method is applied for the solution of 2D incompressible flows.