

MODELOS NÃO ORTOGONAIS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS
COMPLEXOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM FLUIDOS

C.R. MALISKA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
FLORIANÓPOLIS - SC

1. INTRODUÇÃO

A solução de problemas bi e tridimensionais da mecânica dos fluidos e transferência de calor em domínios arbitrários é de grande importância para as diversas áreas da engenharia. Da grande gama de problemas podemos citar alguns de fundamental importância. São eles:

- a) O estudo da camada limite meteorológica com o objetivo de previsão climática.
- b) O estudo dos efeitos de jatos quentes em rios e lagos. A previsão da região de interferência de jatos quentes é necessária para que se possa dimensionar a extensão do ataque ecológico causado, por exemplo, por um jato quente proveniente de uma estação de potência nuclear ou termoelétrica. A previsão do campo de temperatura fornece aos biólogos a possibilidade de antecipar quais as vidas que desaparecerão e quais terão origem em função da mudança da temperatura do habitat.
- c) Dispersão de poluentes em chaminés. Semelhante ao problema anterior a determinação da concentração de poluentes no am

biente, devidas a fontes poluidoras, é de fundamental importância na engenharia ambiental na previsão de contaminações.

- d) Problemas relacionados a engenharia aeronáutica. Problemas de interação fluido/estrutura no projeto de aeronaves e estruturas diversas.
- e) Problemas ligados a área da bioengenharia. Análise dos complexos escoamentos sanguíneos na tentativa de prever, por exemplo, os efeitos de obstrução de veias.
- f) Transferência de calor no núcleo de reatores nucleares.

Todos os problemas listados acima requerem, para as suas soluções, a solução simultânea de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares acopladas. Devido a complexidade matemática deste sistema de equações não existe possibilidade de soluções analíticas e o uso de técnicas numéricas se faz imperativo. A simulação numérica dá origem a grandes sistemas de equações algébricas requerendo então computadores de grande capacidade e de rápido processamento.

O uso de modelos numéricos é também bastante atrativo para substituir testes de laboratório custosos, uma vez que, normalmente, a experimentação numérica é mais barata do que a experimentação de laboratório. Obviamente que o modelo numérico deve ser validado com resultados experimentais dentro das faixas de uso. Isto é conseguido com o teste do modelo com problemas bem escolhidos que apresentam resultados experimentais confiáveis.

Outra situação onde a solução numérica necessita ser empregada é no caso da experimentação de laboratório ser impossível, como é o caso da análise de segurança de reatores nucleares.

Com o advento, nos últimos 15 anos, de grandes computadores, o desenvolvimento das técnicas numéricas experimentaram um avanço ex

traordinário. O desenvolvimento de modelos em diferenças finitas concentrou-se, entretanto, em importantes detalhes, como as não linearidades e o acoplamento entre as equações. Os problemas relacionados com a irregularidade dos contornos não receberam a mesma atenção e apenas na última década modelos mais gerais, aplicados a geometrias arbitrárias, começaram a ser desenvolvidos.

Neste trabalho, paralelamente a apresentação de um modelo não ortogonal geral, aplicado à problemas definidos em domínios irregulares, são identificadas as linhas de pesquisa de fronteira relacionadas aos modelos não ortogonais. O modelo aqui descrito utiliza as equações de conservação (energia, massa e quantidade de movimento) escritas em coordenadas curvilíneas generalizadas que são coincidentes com a geometria irregular do domínio de cálculo.

A grande vantagem do uso de coordenadas coincidentes com a fronteira é a não necessidade de interpolação das condições de contorno, que, normalmente, em problemas de fluidos, são a "força motriz" no estabelecimento da solução. Erros nesta interpolação podem levar a grandes erros na solução.

Entretanto, a grande vantagem do uso deste tipo de coordenadas é a generalidade do código computacional associado, que fica independente da geometria do problema, sendo escrito para uma região fixa retangular. As informações a respeito da geometria física do problema são transferidas através do tensor métrico da transformação de coordenadas.

Este sistema de coordenadas coincidentes com a fronteira poderá ser ortogonal ou não ortogonal. O modelo apresentado neste artigo utiliza coordenadas não ortogonais devido a sua grande flexibilidade na geração das coordenadas, que podem ser obtidas com métodos automáticos em computador, através do digitador ou mesmo a mão, desenhando

o sistema de coordenadas mais apropriado ao problema físico em questão.

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

Em coordenadas Cartesianas os problemas tri-dimensionais de transferência de calor em fluidos são governadas pelo seguinte sistema de equações

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j u_i) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + S^{u_i} \quad \dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho T) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma^T \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + S^T \quad \dots (3)$$

A Eq. (1) representa a conservação da massa enquanto que a Eq. (2) representa a conservação da quantidade de movimento na direção i , com $i = 1, 2, 3$, para o caso tridimensional. A Eq. (3) é a equação da conservação da energia e Γ^{u_i} e Γ^T são os coeficientes de transporte para cada propriedade conservada. No caso de escoamento turbulento as variáveis são médias temporais e os coeficientes de transporte são então coeficientes efetivos levando em consideração o transporte molecular e turbulento da propriedade. Obviamente, é necessário introduzir um modelo de turbulência para correlacionar o coeficiente de transporte turbulento às variáveis do escoamento. Os termos fontes são os apropriados para cada problema.

As incógnitas do problema são u_1 , u_2 , u_3 , a pressão P e a massa específica ρ . Para fechamento do problema a equação de estado $P = P(\rho, T)$ deve ser fornecida.

O sistema de equações dado pelas Eqs. (1)-(3) acrescido das condições de contorno apropriadas constituem os diversos problemas de interesse. Geralmente estes problemas devem ser resolvidos para geometrias arbitrárias conforme mostra a Fig. 1.

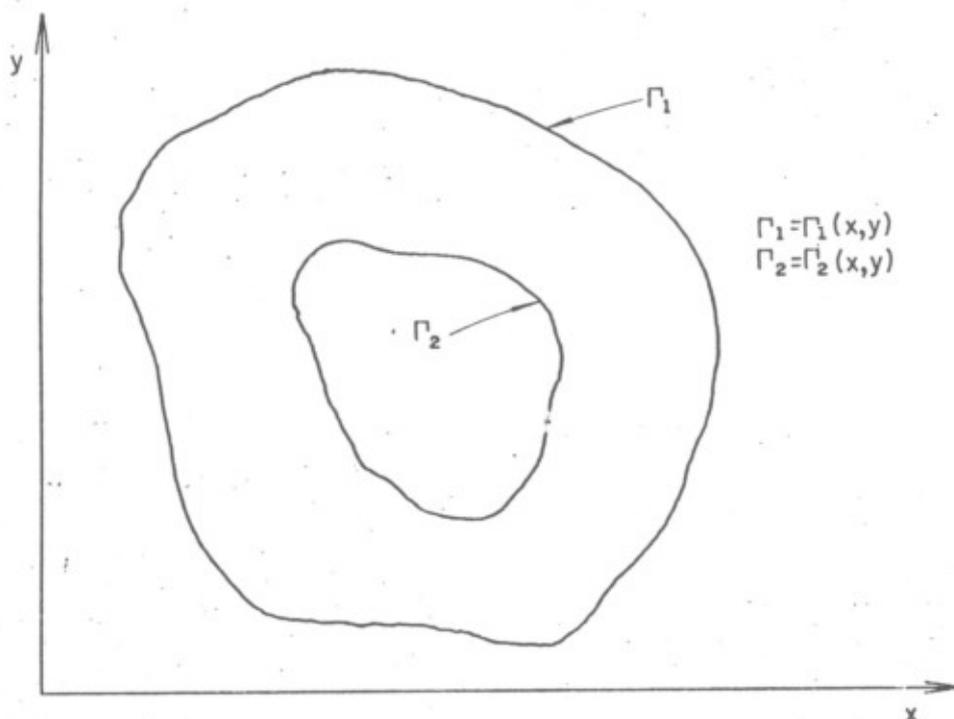


Fig. 1 - Domínio arbitrário

De uma maneira geral as equações de conservação podem ser escritas na forma

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma^j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S^\phi \quad \dots (4)$$

onde ϕ , quando igual a 1 com $S^\phi = 0$, representa a equação da conservação da massa. $\phi = u_1, u_2, u_3$ ou T , com o respectivo termo fonte, recupera as equações da conservação da quantidade de movimento e da energia.

2.1 - FORMULAÇÃO "INCOMPRESSÍVEL"

Quando a massa específica ρ não varia significativamente com a pressão, mas ainda tem variação com a temperatura, isto é $\rho = \rho(T)$, o problema, rigorosamente, ainda pode ser definido como compressível. Entretanto, a equação de estado, $P = P(\rho, T)$, não pode ser mais usada como a equação para determinação da pressão porque pequenos erros na determinação da massa específica, através da equação da continuidade, vai causar grandes erros na determinação da pressão através da equação $P = P(\rho, T)$. Desta maneira, a massa específica necessita ser calculada através de $\rho = \rho(T)$. A equação da conservação da massa, por consequência, não é mais uma equação para a determinação de ρ e, o que representa um grande problema numérico, não existe mais uma equação para calcular a pressão. Esta formulação é chamada "incompressível" [1] e o caso em que ρ não varia nem com P e nem com T é um caso particular.

Desta maneira a equação da conservação da massa não é mais uma equação que avança uma variável dependente dentro do algoritmo numérico, mas apenas atua como uma restrição que a solução deve satisfazer. A construção de esquemas numéricos para avançar os valores da pressão, já que ela não possui uma equação própria no sistema, é um tópico atual e importante de pesquisa.

2.2 - DIFICULDADES PRINCIPAIS NA CONSTRUÇÃO DOS ALGORÍTIMOS PARA SOLUÇÃO

As principais dificuldades encontradas no desenvolvimento de modelos numéricos são agora apresentadas.

- a) Tratamento das não-linearidades nas equações de conservação.

- b) Acoplamento pressão-velocidade. Problema que aparece por que normalmente é apenas viável a solução do sistema de equações iterativamente.
- c) Solução do sistema de equações algébricas resultantes. Devido ao tamanho do sistema grande capacidade de armazenamento computacional é necessária.
- d) Geometria irregular do domínio de solução.

Este último item se constitui no assunto do presente trabalho.

3. O SISTEMA DE COORDENADAS

A obtenção do sistema de equações algébricas requer a discretização do domínio de cálculo em volumes formados pelas linhas coordenadas do sistema coordenado no qual as equações são expressas. No caso da Eq. (4) a discretização do domínio da Fig. 1 seria como mostrado na Fig. 2.

Mesmo sendo possível a solução do problema com a discretização mostrada, dois problemas importantes aparecem. Um deles é a precisão da solução obtida, devido a interpolação das condições de contorno na fronteira, e o segundo, é a complexidade do código computacional, que exigiria subrotinas longas e complexas para cada problema em particular, já que a geometria muda de problema para problema.

A solução para este problema, conforme comentado na introdução, é o uso de sistemas de coordenadas fisicamente naturais e geometricamente naturais, conforme mostrado na Fig. 3.

Estes sistemas de coordenadas podem ser ortogonais ou não ortogonais. Os primeiros apresentam a vantagem de que todas as informa-

ções que são conhecidas a respeito de esquemas numéricos, que foram desenvolvidos para coordenadas Cartesianas, podem ser facilmente aplicáveis aos modelos para coordenadas ortogonais curvilíneas gerais.

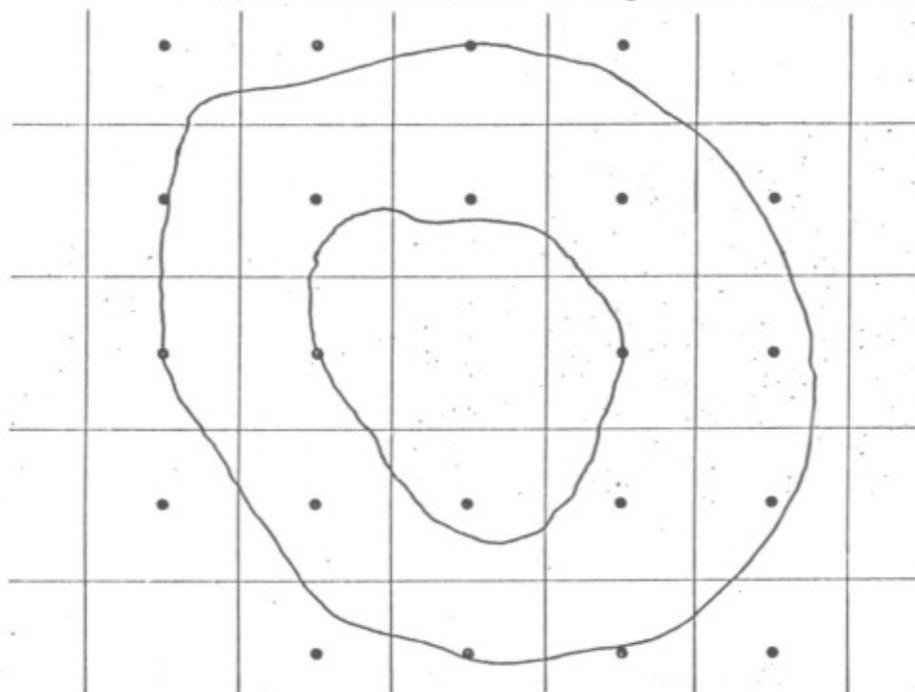


Fig. 2 - Discretização Cartesiana da região arbitrária

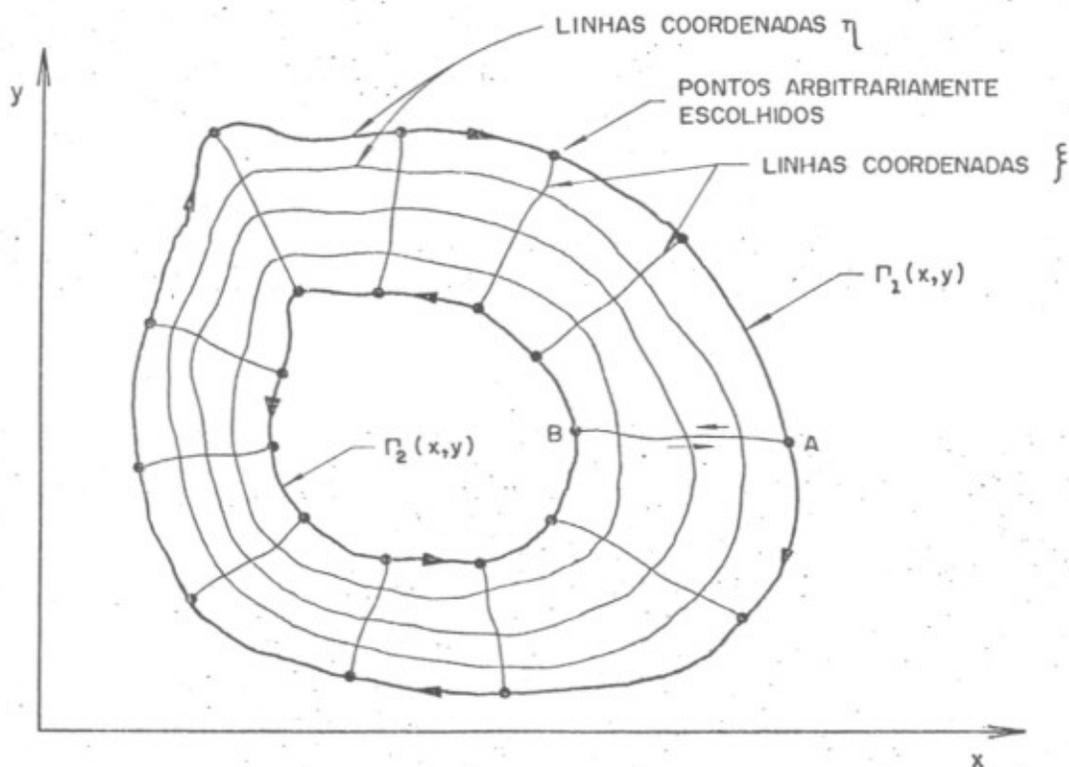


Fig. 3 - Sistema natural de coordenadas

A desvantagem de se desenvolver um modelo numérico para coordenadas ortogonais é que a obtenção do sistema coordenado não é trivial. A geração das coordenadas, por ter que ser respeitada a condição de ortogonalidade é complexa e nem sempre é possível determinar, por um método automático, um sistema coordenado ortogonal para qualquer geometria. A concentração de linhas coordenadas em determinadas regiões do domínio, de acordo com o problema físico em análise, também não é uma tarefa fácil quando se necessita respeitar a ortogonalidade entre as linhas.

Por outro lado, a geração de um sistema não ortogonal é bastante simples e pode ser realizada automaticamente ou mesmo manualmente, já que a condição de ortogonalidade é relaxada. O modelo numérico resultante é então bastante geral, sendo possível, sempre, e para qualquer geometria, a geração de um sistema de coordenadas não ortogonal coincidente com a geometria do problema.

O método para gerar estas coordenadas é objeto da discussão que se segue.

3.1 - GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

Existem diversos métodos para gerar sistemas de coordenadas. Uma revisão completa pode ser encontrada em [2]. O método utilizado neste trabalho foi desenvolvido por Thompson, Thames and Mastin [3], a partir das idéias de Chu [4]. O método consiste em resolver um sistema de equações elípticas definido na geometria de interesse. O sistema elíptico é claramente apropriado porque muitos problemas de campo, cujas soluções podem ser utilizadas como linhas coordenadas, são governados por este tipo de equação. A explicação matemática para isto é que a solução de um sistema elíptico são funções harmônicas que

obedecem ao princípio de máximo, que garante que o máximo e o mínimo da função ocorrem na fronteira. Isto garante que o Jacobiano da transformação não será zero, pelo menos devido a presença de um extremo. O princípio de máximo também garante a unicidade das funções coordenadas $\eta(x,y)$ e $\xi(x,y)$ a serem determinadas.

O sistema de equações elípticas para a determinação de coordenadas bi-dimensionais é dado por

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = P(x,y) \quad \dots (5)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = Q(x,y) \quad \dots (6)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\eta = \eta_1 = \text{constante em } \Gamma_1 \quad \dots (7)$$

$$\eta = \eta_2 = \text{constante em } \Gamma_2 \quad \dots (8)$$

$$\xi = \xi_1(x,y); \text{ função especificada em } \Gamma_1 \quad \dots (9)$$

$$\xi = \xi_2(x,y); \text{ função especificada em } \Gamma_2 \quad \dots (10)$$

Pelas condições de contorno dadas pelas Eqs. (9) e (10) podemos notar que a solução do sistema dado pelas Eqs. (5) e (6) será não ortogonal, uma vez que se arbitra o ponto, em Γ_1 , onde a linha ξ inicia, e também o ponto, em Γ_2 , onde ela chega. Esta especificação viola a condição de ortogonalidade.

A solução do sistema elíptico de equações nos dará as funções $\xi(x,y)$ e $\eta(x,y)$, que nada mais é do que a transformação de coordenadas, que será utilizada depois para transformar a Eq. (4) do plano (x,y) para o plano (ξ,η) , no caso de problemas bi-dimensionais, e do sistema $(x-y-z)$ para o sistema $(\xi-\eta-\Gamma)$ no caso de problemas tridi

mensionais. A geração do sistema coordenado tridimensional pode ser criado usando também o sistema de equações composto pelas Eqs. (4) e (5), resolvendo-o tantas vezes quantos forem os planos desejados na terceira direção.

A solução do sistema elíptico de equações não é, entretanto, trivial. A solução necessita ser numérica, e como o domínio de cálculo é irregular o problema de discretização já aparece na geração do sistema de coordenadas. Para evitar o problema da interpolação, também na geração das linhas coordenadas, as variáveis dependentes e independentes das Eqs. (5) e (6) são intercambiadas [3].

O sistema de equações transformado tem a seguinte forma

$$\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \quad \dots(11)$$

$$\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + \frac{1}{J^2} (Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \quad \dots(12)$$

com as seguintes condições de contorno do tipo Dirichlet

$$x = f_1(\xi, \eta_1) \text{ em } \Gamma_1^* \quad \dots(13)$$

$$y = f_2(\xi, \eta_1) \text{ em } \Gamma_1^* \quad \dots(14)$$

$$x = g_1(\xi, \eta_2) \text{ em } \Gamma_2^* \quad \dots(15)$$

$$y = g_2(\xi, \eta_2) \text{ em } \Gamma_2^*$$

Desta maneira o sistema dado pelas Eqs. (11) e (12) é agora resolvido em um domínio retangular, conforme Fig. 4, sem necessidade de interpolação. Além disto $\Delta\eta$ e $\Delta\xi$ podem ser arbitrariamente escolhidos de acordo com a conveniência, sendo normalmente tomados igual a unidade.

Com este mesmo método pode-se tratar domínios simplesmente e multiplamente conexos. Para maiores detalhes ver [5].

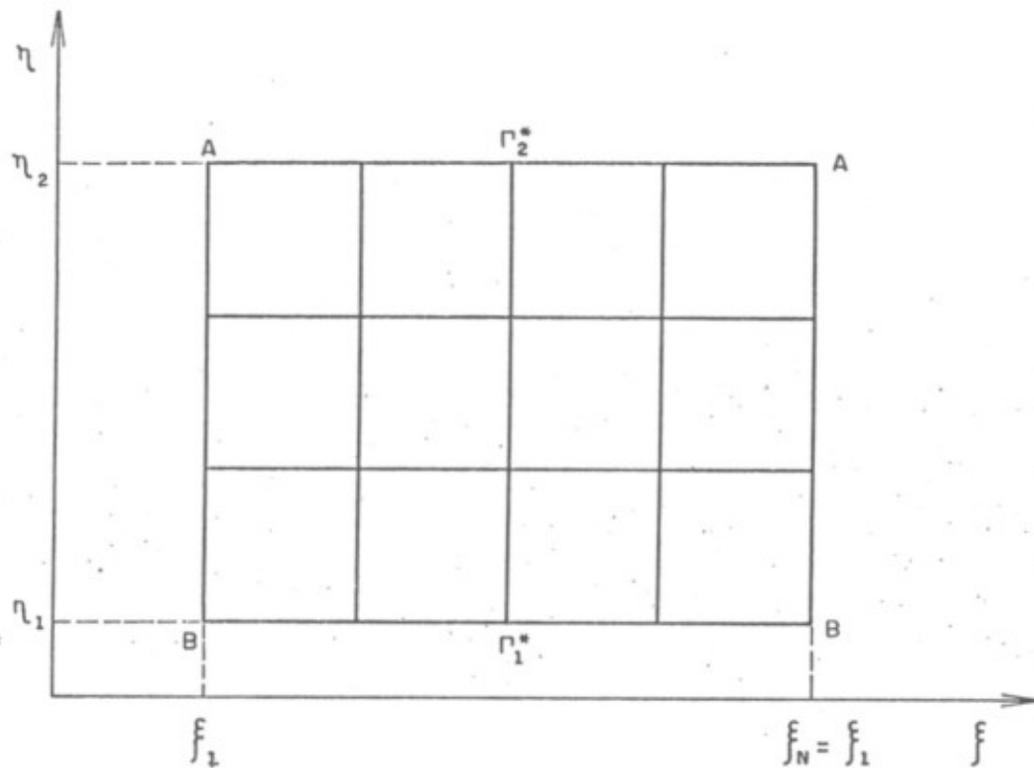


Fig. 4 - Domínio transformado

Nas Eqs. (11) e (12) P e Q são funções que permitem concentrar as linhas coordenadas e J é o Jacobiano da transformação dado por

$$J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \quad \dots(17)$$

e α , β e γ são as componentes do tensor métrico dado por

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad \dots(18)$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \quad \dots(19)$$

$$\gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad \dots(20)$$

As Eqs. (11) e (12) são aproximadas por diferenças finitas e o sistema linear de equações resultante pode ser resolvido por qualquer método existente para solução de sistemas lineares.

Ao finalizar esta secção é importante lembrar que o desenvolvimento de métodos de geração de malhas é um importante tópico de pesquisa, especialmente para geração de malhas ortogonais com possibili-

dade de concentrar as linhas coordenadas onde for necessário.

4. TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Um detalhe importante no momento de se transformar a Eq. (4) do plano (x,y) para o plano transformado (ξ,η) é a escolha das variáveis dependentes. Na Eq. (4) as variáveis dependentes são as componentes Cartesianas do vetor velocidade. Estas mesmas componentes, ou as componentes contravariantes, se desejado, poderão ser as variáveis dependentes nas equações do movimento no plano transformado. O uso das componentes contravariantes dá origem a equações transformadas bastante complexas onde o significado físico de cada termo é perdido. Neste trabalho optamos então pela manutenção das componentes Cartesianas, a pesar disto acarretar um problema menor que será logo mais discutido.

A Eq. (4) transformada para o plano ($\xi-\eta$) tem a seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial \xi}(\rho U\phi) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho V\phi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c_4 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + c_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + \hat{S}\phi \quad \dots (21)$$

Na equação acima U e V são as componentes contravariantes, sem normalização métrica, do vetor velocidade e são expressas por

$$U = u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \dots (21)$$

$$V = v \frac{\partial x}{\partial \xi} - u \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \dots (22)$$

Os coeficientes que aparecem do lado direito da equação são os coeficientes de transporte transformados. Para detalhes ver [6]. A Figura 5 mostra, na malha não ortogonal, as componentes Cartesianas e contra

variantes do vetor velocidade. É importante lembrar que na Eq. (21) ϕ ainda é igual a 1, u, v ou T. O termo \hat{S}^ϕ inclui os gradientes de pressão quando apropriado.

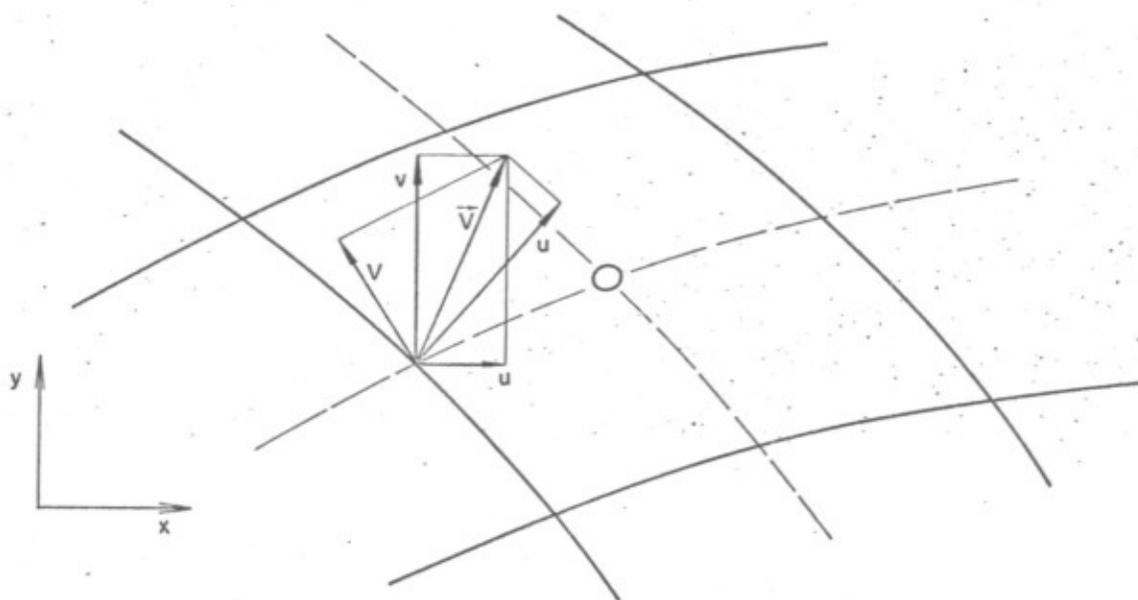


Fig. 5 - Componentes Cartesianas e contravariantes do vetor velocidade

4.1 - POSIÇÃO RELATIVA DAS VARIÁVEIS NA MALHA

A escolha da posição das variáveis na malha deve ser de tal maneira que facilite os balanços de conservação no volume finito. Esta é a regra fundamental que quando não observada pode dar origem a esquemas numéricos não conservativos com dificuldade de convergência.

Classicamente todas as variáveis u, v e T, e qualquer outro escalar, eram localizados no mesmo ponto e no centro da célula. A inconveniência deste procedimento, como por exemplo da necessidade de se fazer médias de velocidades para o cálculo do fluxo de massa através da fronteira do elemento, é bem avaliada em [7]. Para evitar problemas desta natureza, que influenciam na estabilidade da solução, a localização desencontrada das variáveis na malha foi proposta em [8].

Como podemos observar na Fig. 6, a localização ali mostrada é fisicamente coerente porque balanços de massa e quantidade de movimento são realizados sem interpolações de velocidades já que as velocidades es tão convenientemente localizadas.

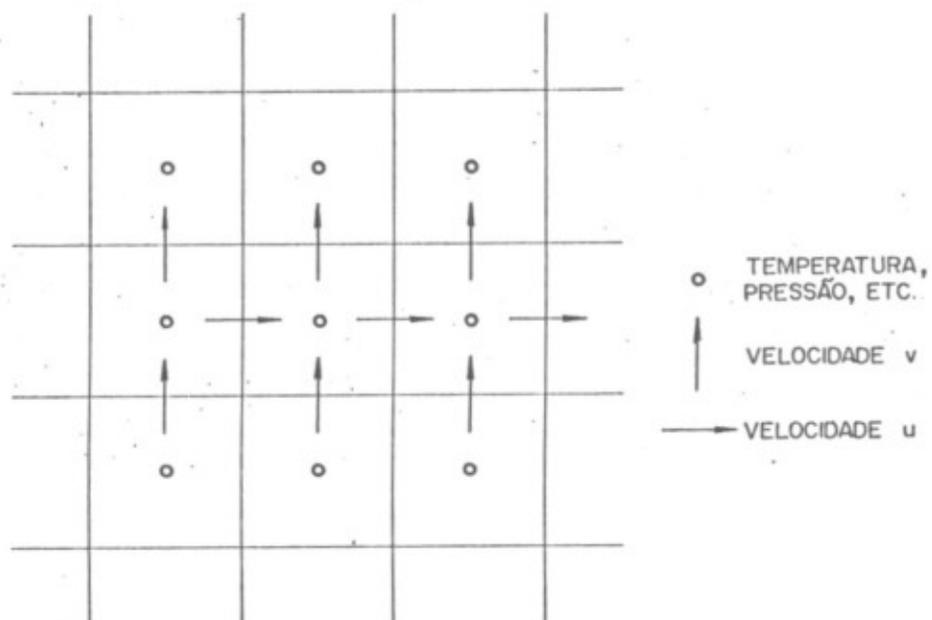
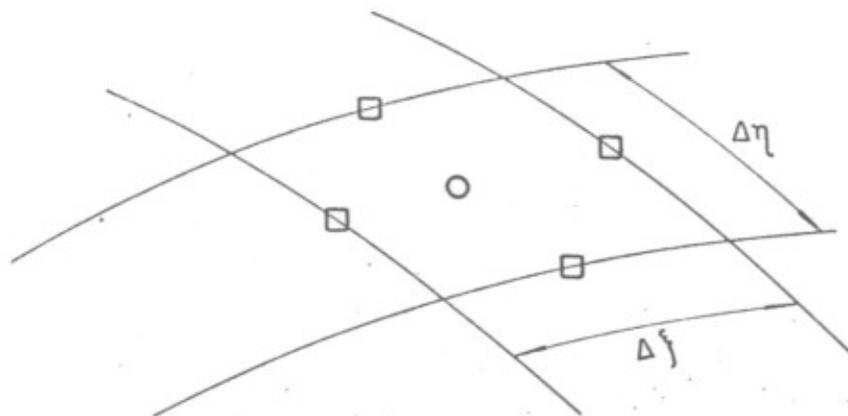


Fig. 6 - Arranjo das variáveis em uma malha Cartesiana

Entretanto, para o caso não-ortogonal não é possível localizar apenas u ou apenas v em uma determinada face, uma vez que u e v não são normais às linhas coordenadas, sendo então necessário localizar ambos, u e v , no mesmo ponto para que se possa fazer os balanços de massa na fronteira do elemento. O arranjo das variáveis na malha está mostrado na Fig. 7, seguindo a idéia proposta em [8]. Uma discussão completa sobre o assunto pode ser encontrada em [9,10].

4.2 - APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Para obter as equações em diferenças finitas a Eq. (21) é integrada sobre o volume de controle mostrado na Fig. 7. Aproximações referente as funções definidas entre os pontos são introduzidas [6]



○ PRESSÃO, TEMPERATURA, ETC.
 □ u, v, U e V

Fig. 7 - Arranjo das variáveis na malha não ortogonal

para reduzir a equação integral na seguinte equação algébrica

$$A_P \phi_P^{n+1} = A_e \phi_E^{n+1} + A_w \phi_W^{n+1} + A_n \phi_N^{n+1} + A_s \phi_S^{n+1} + \frac{A_P}{1+E} \phi_P^n + L[\hat{S}T] \phi \Delta V \quad \dots(24)$$

onde

$$\hat{S}T \phi = \hat{S} \phi + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c_5 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \quad \dots(25)$$

$$A_P = A_P^* \frac{1+E}{E} \quad \dots(26)$$

$$A_P^* = A_e + A_w + A_n + A_s \quad \dots(27)$$

e A_e , A_w , A_n e A_s são os coeficientes obtidos com os termos difusivos e convectivos da equação de conservação. Na Eq. (24) $L []$ significa a aproximação em diferenças finitas da quantidade entre colchetes. E é uma constante que não pode exceder a unidade quando a formulação for explícita.

As equações para as componentes contravariantes da velocidade são obtidas fazendo $\phi=u$ e v na Eq. (24) e usando, após, as Eqs.

(22) e (23). Para o volume de controle mostrado na Fig. 8 as expressões para U_e e V_n são

$$U_e = \hat{U}_e - \left(\frac{\Delta V}{\Delta_P^u} \alpha \right)_e (P_E - P_P) + \left(\frac{\Delta V}{4 \Delta_P^u} \beta \right)_e (P_{NE} + P_N - P_{SE} - P_S) \dots (28)$$

$$V_n = \hat{V}_n - \left(\frac{\Delta V}{\Delta_P^v} \gamma \right)_n (P_N - P_P) + \left(\frac{\Delta V}{4 \Delta_P^v} \beta \right)_n (P_{NE} + P_E - P_{NW} - P_W) \dots (29)$$

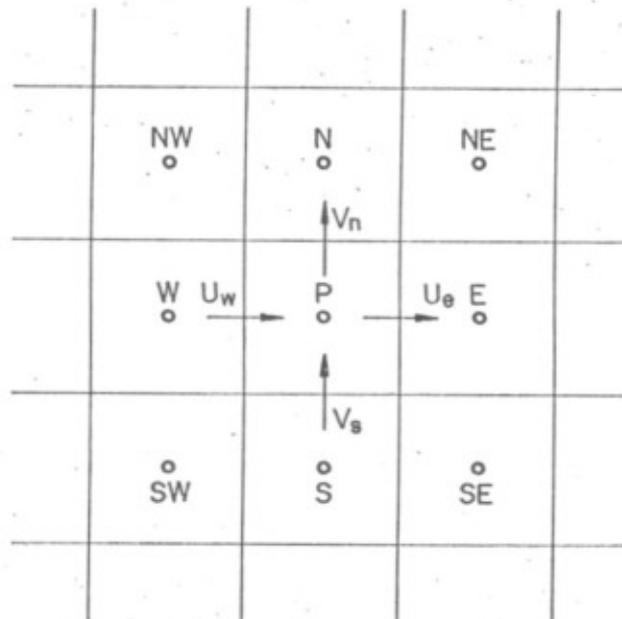


Fig. 8 - Volume de controle para a pressão no domínio transformado

A equação da conservação da massa, para $\Delta\eta = \Delta\xi = 1$ tem a seguinte forma

$$(\rho U)_e - (\rho U)_w + (\rho V)_n - (\rho V)_s = 0 \dots (30)$$

4.3 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO

Um ponto de fundamental importância, talvez o principal, na solução de problemas "incompressíveis" é a determinação do campo de pressões, pois a pressão não possui uma equação de evolução e os métodos, por razões econômicas, são normalmente iterativos. A questão cha

ve é então a determinação de um campo de pressões que quando inserido nas equações de movimento origine um campo de velocidades que satisfaça a equação de conservação da massa. Diversos métodos podem ser utilizados [6]. Neste trabalho o método PRIME [11,6] é empregado. Este método tem a vantagem de necessitar da solução de apenas uma equação de Poisson para cada ciclo de determinação de um campo de velocidades. Em essência o método consiste em substituir as Eqs. (28) e (29), e as equações para U_w e V_s , não mostradas aqui, na equação da conservação da massa, Eq. (30), obtendo assim uma equação para a pressão da forma

$$A_P P_P = A_e P_E + A_w P_W + A_s P_S + A_n P_N + A_{ne} P_{NE} + A_{se} P_{SE} + A_{nw} P_{NW} + A_{sw} P_{SW} + B \quad \dots(31)$$

Uma grande vantagem do modelo não ortogonal desenvolvido é que todas as suas equações se revertem para as equações dos modelos ortogonais quando a malha utilizada for ortogonal. Por exemplo, se o sistema de coordenadas utilizado for o Cartesiano o método terá exatamente as mesmas características de um modelo desenvolvido apenas para o sistema Cartesiano. O mesmo se aplica para qualquer outro sistema ortogonal. Ver [6,9] para detalhes.

A solução do sistema de equações é iterativa e uma das possíveis sequências é a seguinte:

- a) Estimar uma distribuição para u , v e T . Normalmente estes campos são feitos iguais a zero.
- b) Calcular os coeficientes das equações para U e para V .
- c) Calcular \hat{U}_e , \hat{V}_n , \hat{U}_w , \hat{V}_s e B . B é o divergente de \hat{V} .
- d) Calcular os coeficientes para a equação da pressão.
- e) Resolver a Eq. (31).
- f) Com o campo de pressões obtido corrigir U_e , U_w , V_n e V_s , utilizando as equações do movimento, Eqs. (28) e (29), no caso de U_e e V_n . Equações similares existem para U_w e V_s .

- g) Determinar U_s , U_n , V_e e V_w , utilizando as componentes contravariantes determinadas no ítem f. Esta determinação é um processo de interpolação. ———
- h) Iterar, voltando ao ítem b, até a convergência. Um critério deve ser estabelecido.
- i) Calcular os coeficientes da equação da energia, Eq. (24) com $\phi=T$ e o termo fonte apropriado. Determinar T.

Caso o problema seja de convecção natural o ítem i deve ser incluído no processo iterativo porque o campo de velocidades é, neste caso, dependente do de temperatura.

Detalhes do esquema numérico com relação as condições de contorno da equação da pressão e o número de pontos de pressão envolvidos, assuntos de extrema importância em modelos não ortogonais são encontrados em [6].

5. ALGUNS RESULTADOS

Apenas para ilustrar a aplicação do método, a solução do problema do escoamento em uma cavidade quadrada com uma parede em movimento é mostrada. O problema, com esquema mostrado na Fig. 9, foi resolvido usando um sistema de coordenadas Cartesiano e um não ortogonal, este último também mostrado na Fig. 9. Os resultados, para uma condição onde os efeitos convectivos são dominantes (número de Reynolds igual a 400), estão mostrados na Fig. 10.

Um ponto importante a ser observado é a convergência do modelo numérico usando os dois sistemas coordenados. Pode-se notar, pela Fig. 11, que a convergência é praticamente a mesma para as duas malhas, o que torna o modelo ortogonal competitivo em função de sua grande ge

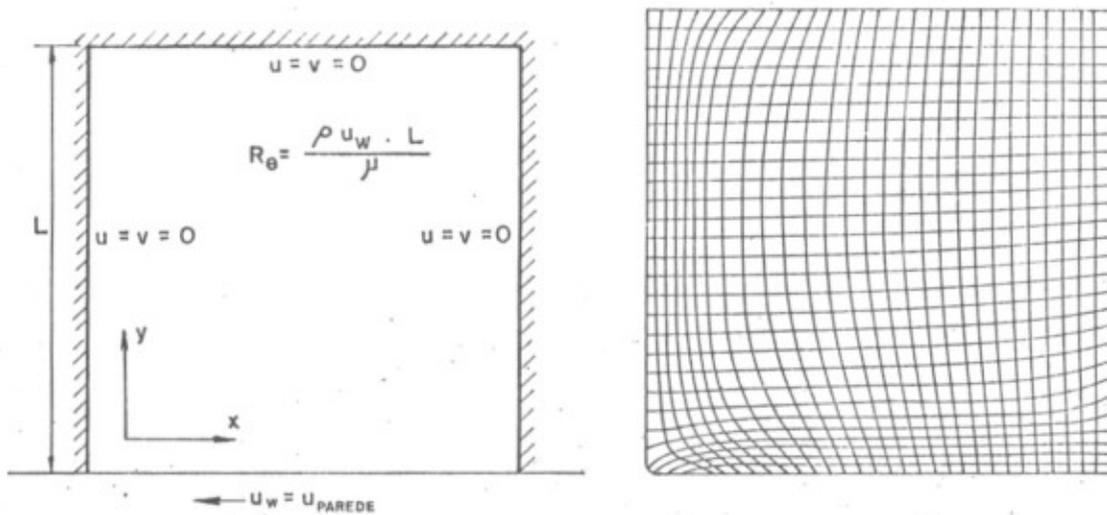


Fig. 9 - O problema da cavidade quadrada - malha não ortogonal utilizada

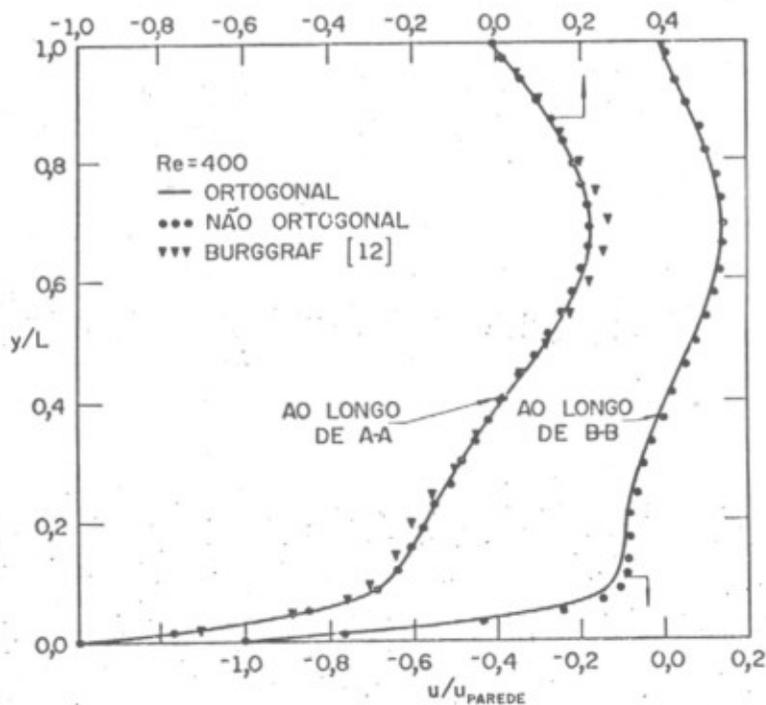


Fig. 10 - Distribuição de velocidades para o problema da cavidade quadrada

neralidade.

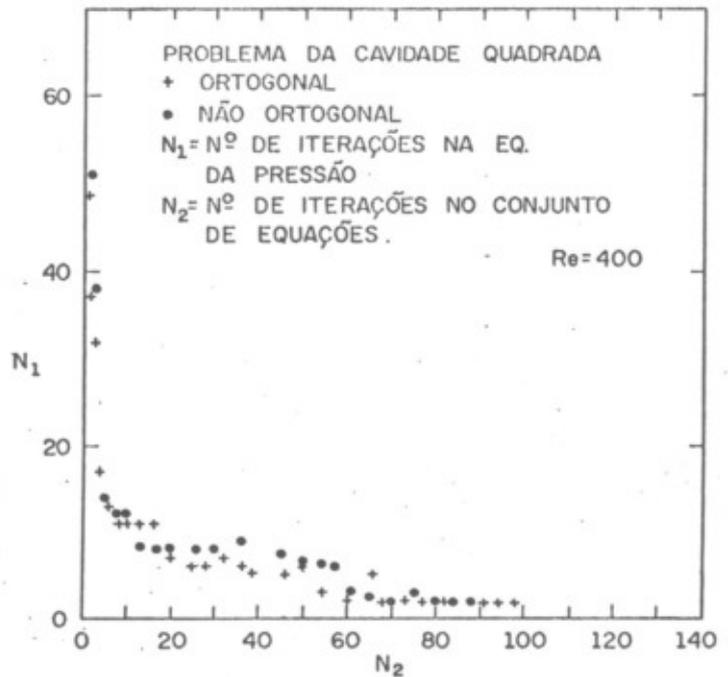


Fig. 11 - Velocidade de convergência - comparação

Diversos outros problemas, não relatados aqui, foram resolvidos usando este modelo, tais como: Escoamento no interior de dutos com secção transversal variável [9], convecção natural em cavidades arbitrárias e convecção natural e forçada combinadas em escoamentos cruzados. Estes resultados serão publicados futuramente.

6. CONCLUSÕES

A experiência obtida com o uso de grades não ortogonais mostra que estes modelos são bastante promissores devido a generalidade na solução de problemas definidos em geometrias arbitrárias.

Existe muito a ser feito, entretanto, porque esta linha de trabalho é relativamente nova. Toda a experiência na aproximação dos termos não lineares da equação de Navier-Stokes, os esquemas híbridos e os modelos para evitar a difusão numérica em problemas de convecção.

dominante existente para coordenadas Cartesianas e sistemas ortogonais necessita ser estendida para sistemas não ortogonais. Em resumo, as seguintes linhas são de pesquisa de fronteira no assunto.

- Desenvolvimento de métodos rápidos para geração de malhas ortogonais.
- Desenvolvimento e aperfeiçoamento de modelos para a solução das equações de conservação em malhas não ortogonais.
- Modelos para neutralizar a difusão numérica e
- Solução de grandes sistemas de equações algébricas diretamente. O uso de técnicas de esparsidade é um caminho que está sendo seguido para evitar o armazenamento da grande quantidade de zeros das matrizes envolvidas. A solução direta do conjunto de sistemas de equações algébricas evita o sério problema do acoplamento pressão-velocidade.

São tópicos de pesquisa que hoje envolvem cientistas da área de matemática aplicada, ciências da engenharia e computação.

7. REFERÊNCIAS

- [1] RAITHBY, G.D. e SCHNEIDER, G.E. - Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Velocity - Pressure Coupling, Numerical Heat Transfer, Vol 2, pp. 417-440, 1979.
- [2] THACKER, W.C. - A Brief Review of Techniques for Generating Irregular Computational Grids, Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 15, pp. 1335-1341, 1980.
- [3] THOMPSON, J.F., THAMES, F.C. e MASTIN, C.W. - Automatic Numerical Generation of Body - Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, J. Comp. Phys., Vol 15, pp. 299-319, 1974.
- [4] CHU, W.H. - Development of a General Finite Difference Approximation

for a General Domain, Part I, Machine Transformation, J. Comp. Phys., Vol 8, pp. 392-408, 1971.

- [5] THOMPSON, J.F., THAMES, F.C. e MASTIN, W.C. - Boundary Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies, NASA Langley Research Center, CR-2729, 1976.
- [6] MALISKA, C.R. - A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, Canadá, 1981.
- [7] PATANKAR, S.V. - Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [8] HARLOW, F.H. e WELCH, J.E. - Numerical Calculation of Time Dependent Viscous Flow of Fluid with Free Surface, Physics of Fluids, Vol 8, pp. 2182-2189, 1965.
- [9] MALISKA, C.R. e RAITBY, G.D. - A Method for Computing Three Dimensional Flows Using Non-Orthogonal Boundary-Fitted Coordinates, Intl. Journal for Numerical Meth. in Fluids, Vol 4, pp. 519-537, 1984.
- [10] MALISKA, C.R. - Grid Layout Design for Nonorthogonal Numerical Fluid Flow Modelling, VII COBEM, pp. 87-95, 1983.
- [11] VAN DOORMAAL, J.P. e RAITBY, G.D. - The Application of the Quasi-Continuum Approach for Three-Dimensional Elliptic Flows in Complex Geometries, Waterloo Research Institute, Report to Atomic Energy of Canada Ltd., September, 1981.
- [12] BURGGRAF, O.R. - Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows, J. Fluid Mechanics, Vol 24, pp. 113-151, 1966.